第四章　多项式环与有限域 习题

1．在模 8 的剩余类环中找出所有子环、理想和主理想。

2．求 GF（2）上多项式的最大公因子。

$$(x^2+x+1,\ \mathrm{x}^4+x^3+x^2+1)=C(x)$$

并将它表示成 $A(x)(x^2+x+1)+B(x)(x^4+x^3+x^2+1)=C(x)$ 的形式。

3．构成 GF(2)上模 $f(x)=x^3+x+1$ 多项式剩余类环，并列出加法表和乘法表。

4．在模 $x^6-1\in GF(2)[x]$ 多项式剩余类环中有几个真理想？并找出它们的生成元。

5．构造 GF（7）的加法表和乘法表？找出每一个元素的级，找出哪些元素是生成元。

6．模 9 剩余加群是否是循环群？若是，则确定每个元素的级，找出所有生成元。

7．若 *G*（*a*）群的阶数为素数，问有几个有限循环子群？

8．基于*GF*（2）上的多项式*p*（*x*）=x^5+x^2+1，构造*GF*（2^5）的加法表和乘法表。令 α 是*GF*(2^5)的本原域元素，求 α^3和 α^7的最小多项式。

9．分解*GF*（2）上的多项式：x^{63}-1 和x^{21}-1，为*GF*（2）上的既约多项式之积。求出它们的分圆多项式。

10．能完全分解x^{17}-1 为*GF*（2）上既约多项式的次数各为多少？能完全分解x^{17}-1 为一次因式的最小分离域是什么？

11．求出 *GF*（2）上次数≤5 次的全部既约多项式。

12．设 α 是GF（2）上四次既约多项式*p*（*x*）=$x^4+x^3+x^2+x+1$ 在扩域GF（2^4）上之根。试求 $\alpha+1$ 的最小多项式，并判断这一最小多项式是否为本原多项式？

13．试证明互反多项式的 3 个性质。

14．证明次数＞2 的任何多项式，如果互反多项式也是自身，则它不可能是本原多项式。

15．证明定理 4.4.2（提示：在 GF（*q*）中找一个有最大级为 *r* 的元素，证明域中的一切元素的级都是 *r* 的因子）。

16．证明推论 4.5.2。

17．证明推论 4.5.6。

18．找出GF（2^{16}）及GF（2^{20}）中的所有真子域，并用图表示之。

19．找出GF（2^4）中元素的正规基表示，α 是$\mathrm{x}^4+\mathrm{x}^3+1$ 的根，并找出它的对偶基。

20．找出GF（2^4）中自然基的对偶基，其中，α 是本原元，它是$\mathrm{x}^4+\mathrm{x}+1$ 的根。

21．证明定理 4.7.1 中迹的前四个性质。

22．$\alpha\in$GF（q^{m}）是任一元素，定义 $N(\alpha)=\alpha\alpha^q\ ...\alpha^{q^{m-1}}$ 为 α 的范数，证明范数有以下性质：

⑴ $N(\alpha) \in GF(q)$;

(2)$N(\alpha, \beta) = N(\alpha)N(\beta)$;

(3)$N(\lambda\alpha) = \lambda N(\alpha) \qquad \lambda \in GF(q)$;

(4)$N(\alpha^q) = N(\alpha)$。