



通信原理 (Principle of Communications)

华南理工大学
电子与信息学院
余翔宇

yuxy@scut.edu.cn

2019级信息工程5班

2021/10/12





第二章 信号分析基础

学习内容



◆ 确定信号的分析方法回顾；

- 能量谱密度和功率谱密度
- 相关函数
- 信号的矢量表示
- 希尔伯特变换和解析信号

◆ 随机信号的统计分析方法；

- 高斯过程
- 高斯白噪声
- 窄带平稳随机过程
- 循环平稳随机过程

◆ 信号的功率密度谱分析；

◆ 匹配滤波器

◆ 信号的带宽

信号分类



确定信号与随机信号

确定信号：信号在任何时候的取值都是确定的；

如：各种测试信号、训练序列信号等。

随机信号：信号的取值具有不确定性。含有不可预知成分的信号。

Matlab中函数**rand** 生成 $[0,1]$ 均匀分布的随机变量。

如：

- (1) 携带信息的信号；对于数字通信，符号集是已知的，但当前发送其中那一个符号是未知的；
- (2) 噪声，通常噪声是一种纯随机的信号；
- (3) 其他随机信号，如干扰等。



周期信号和非周期信号

周期信号: $x(t) = x(t + T_0)$ for $-\infty < t < \infty$

式中 T_0 为周期，是满足上式的最小常数；

非周期信号: 没有上述特性的信号。

连续信号与离散信号

连续信号: $x(t)$ ——是时间的连续信号；

离散信号: $x[n]$ ——只在特定的时刻上取值的信号， k 是整数， T 是固定的时间间隔。

思考一下，连续周期信号抽样后是离散周期信号么？

能量信号和功率信号



能量信号: $x(t)$ 在所有时间上的能量 E_x 不为零且有限

$$0 < E_x < \infty$$

$$E_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

功率信号: $x(t)$ 的功率 P_x 不为零且有限

$$0 < P_x < \infty$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$

思考一下，会不会有信号同时是能量和功率信号

虽然一般使用功率信号的数学模型来简化分析过程，但实际的信号都为能量信号。
(Couch P26)

计算信号能量和功率的Matlab代码



```
dt = 0.01;  
t = 0:dt:5;
```

```
s1 = exp(-5*t).*cos(20*pi*t);
```

```
s2 = cos(20*pi*t);
```

```
E1 = sum(s1.*s1)*dt;
```

%s1(t)的信号能量

```
P2 = sum(s2.*s2)*dt/(length(t)*dt);
```

%s2(t)的信号功率s

```
[f1 s1f]= T2F(t,s1);
```

```
[f2 s2f]= T2F(t,s2);
```

```
df = f1(2)-f1(1);
```

```
E1_f = sum(abs(s1f).^2)*df;
```

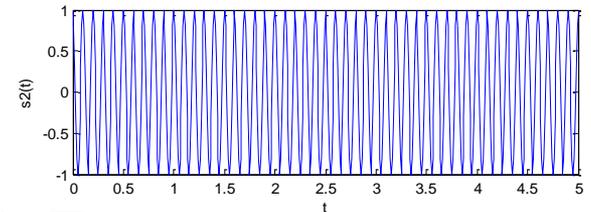
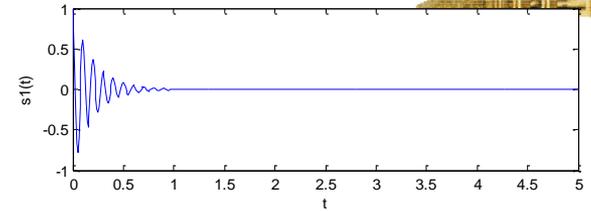
%s1(t)的能量,用频域方式计算

```
df = f2(2)-f2(1);
```

```
T = t(end);
```

```
P2_f = sum(abs(s2f).^2)*df/T;
```

%s2(t)的功率, 用频域方式计算





2.2 确定信号分析方法回顾

确定信号



- **周期信号：** 满足下列条件的信号称之为周期信号

$$f(t) = f(t + T)$$

周期信号的傅氏级数展开式为

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(t) dt \quad a_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

■ 非周期信号：非周期信号可看成周期为无限大的信号

若非周期信号满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

则存在如下傅氏变换和傅氏逆变换的关系式

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{j2\pi ft} df$$

关系式也可表示为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

频谱密度(1)能量谱密度



频谱密度：信号能量或功率在频域上的分布特性

1. 能量谱密度

对实能量信号 $x(t)$ ，其总能量 E_x

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

利用Parseval定理，有：

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

定义信号 $x(t)$ 的能量谱密度 $\psi_x(f) = |X(f)|^2$

单位为焦/赫兹。对实信号 $x(t)$ ，能量谱密度为偶函数。

能量谱密度反映信号能量沿频谱的分布。

频谱密度(2)周期信号的功率谱密度



2. 实周期信号的功率谱密度

对实周期信号 $x(t)$ ，其功率为
$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^2(t) dt$$

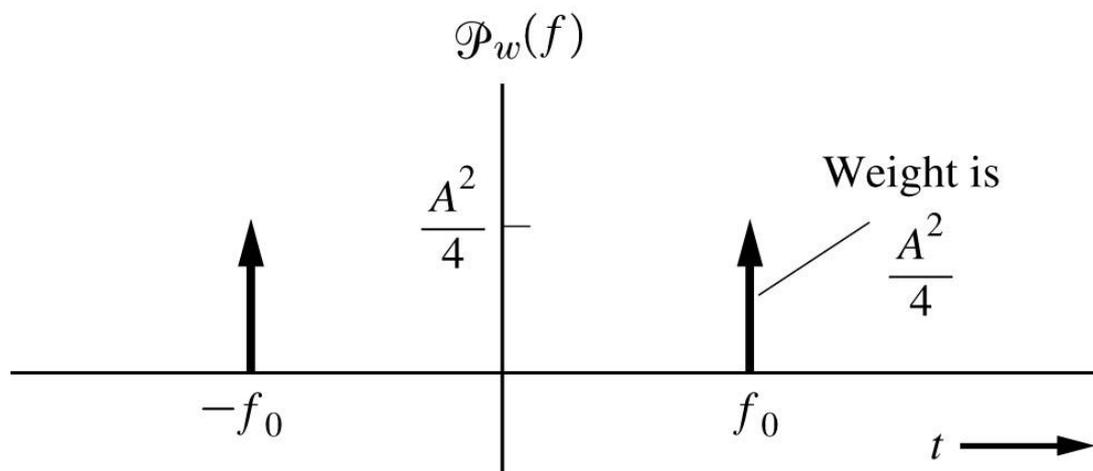
利用 $x(t)$ 的Fourier级数展式和Parseval定理，得：

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

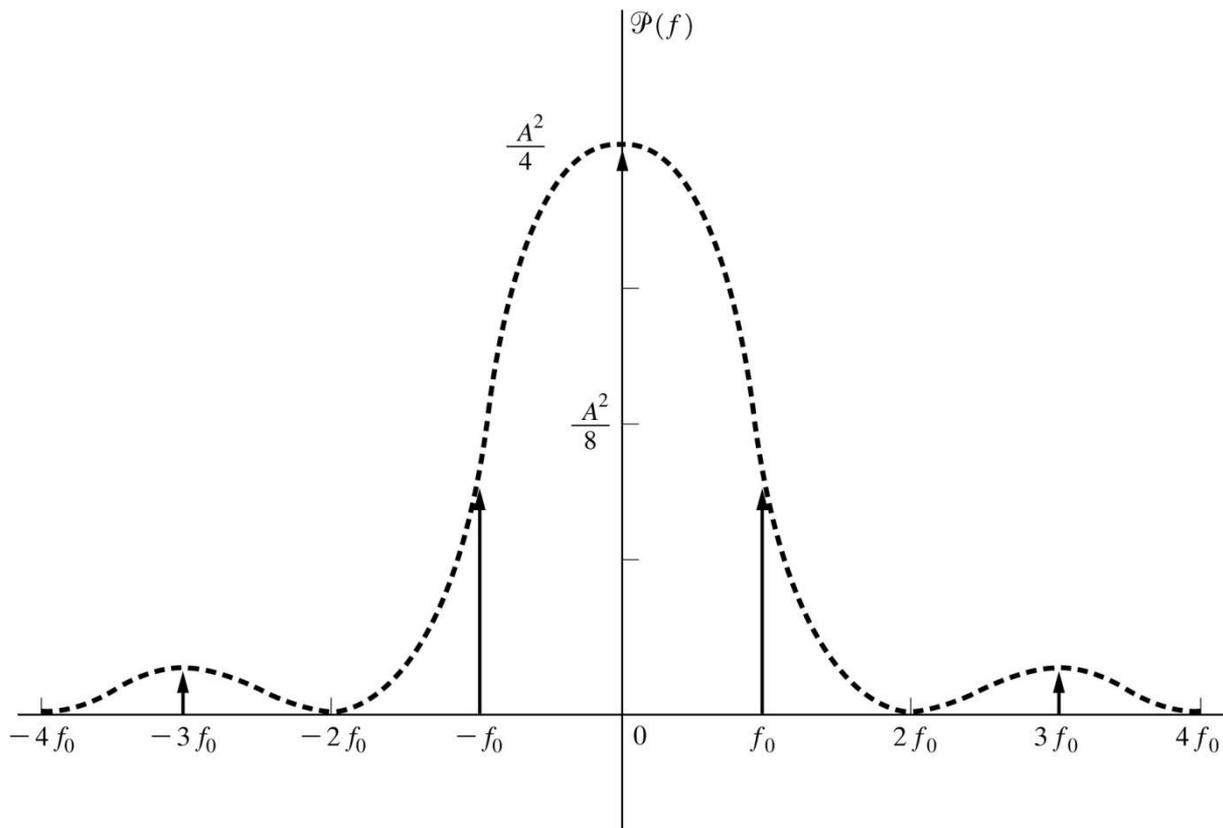
定义信号 $x(t)$ 的功率谱密度
$$G_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \delta(f - nf_0)$$

单位为瓦/赫兹。对实信号 $x(t)$ ，功率谱密度为偶函数。

一个正弦信号的功率谱



周期方波的功率谱



频谱密度(3)非周期信号的功率谱密度



3.非周期信号的功率谱密度

对非周期信号 $x(t)$ ，记其在间隔 $(-T/2, T/2)$ 截断函数为 $x_T(t)$ ，其Fourier变换为 $X_T(f)$ ，若存在极限 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$ 定义信号 $x(t)$ 的功率谱密度

$$G_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$$

单位为瓦/赫兹。

相关函数



相关运算在通信信号处理中常用于对特定的信号提取和识别。

能量信号的互相关运算定义为

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(t) f_2(t + \tau) dt$$

功率信号的互相关运算定义为

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1^*(t) f_2(t + \tau) dt$$

周期信号的互相关运算定义为

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1^*(t) f_2(t + \tau) dt$$

T 为信号的周期

实相关函数的主要性质



$$R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau)$$

$$R(\tau) = R^*(-\tau)$$

$$|R(\tau)| \leq R(0)$$

相关函数与信号的能量/功率密度谱间的关系



对于能量信号，信号能量谱密度与自相关函数是一个傅里叶变换对

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) d\omega = E$$



对于功率信号，信号功率密度谱与自相关函数是一个傅里叶变换对

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

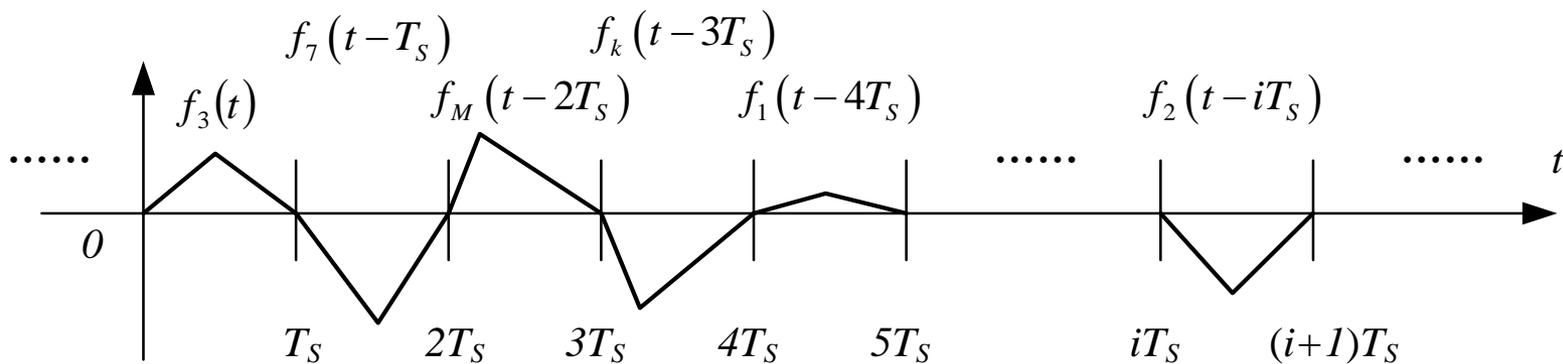
$$R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega = P$$

M进制通信系统信号序列



$$\{f_k(t), k = 1, 2, \dots, M\}$$

信号设计时，一般尽量使得每个不同符号(信号)间相关性尽可能小，以便于识别

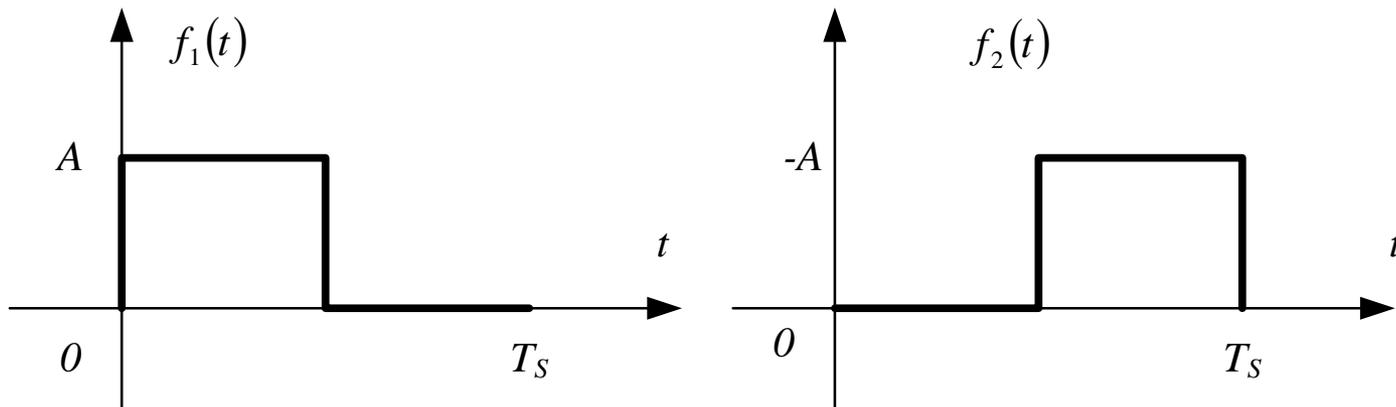


对信号检测时，信号的相关运算通常在一个符号周期内进行。

相关运算示例:



(1) 两个正交的脉冲信号

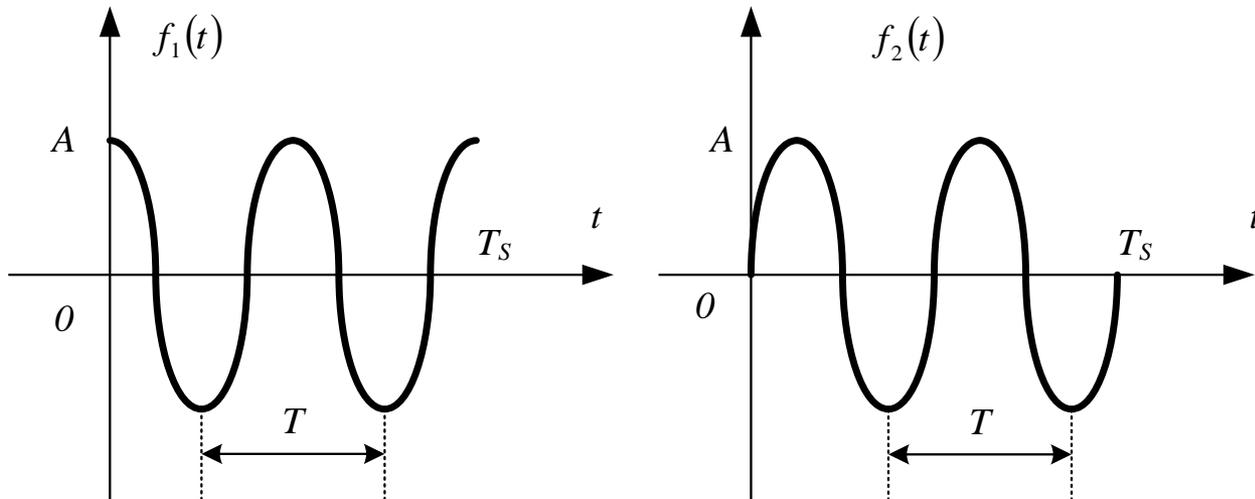


$$\int_0^{T_s} f_i(t)f_j(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{2} A^2 T_s & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

相关运算示例:



(2) 两个正交的已调信号



$$\int_0^{T_S} f_i(t)f_j(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{2} A^2 T_S & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

卷积运算



$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

时域卷积定理

$$f_1(t) * f_2(t) \Leftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

频域卷积定理

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

卷积运算通常用于描述信号经过线性系统的输出

输入信号： $s(t)$ 信道冲激响应： $h(t)$ 输出信号： $s_o(t)$

$$s_o(t) = h(t) * s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) s(t - \tau) d\tau$$



2.3 信号的矢量表示

信号的矢量表示:



多进制的基带和通带信号往往可由一组基函数的线性组合来表示

内积运算: 在符号集中, 定义内积运算(相关运算)

$$s_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, M \quad t \in [0, T]$$

$$\langle s_i(t), s_j(t) \rangle = \int_0^T s_i(t) s_j(t) dt$$

基函数: 在一个 N 维的信号空间中, 若 N 个函数构成的函数组满足

(1) **线性独立性** $\Psi_k(t) \quad k=1, 2, \dots, N$ 每个 $\Psi_k(t)$ 都不是其他函数的线性组合;

(2) **完备性** 若 $\langle s(t), \Psi_k(t) \rangle = 0 \quad k=1, 2, \dots, N$ 一定有 $s(t)=0$

则称函数组 $\{\Psi_k(t)\}$ 为 N 维线性空间的一组基。

正交基： 满足下列条件的一组基 $\{\Psi_k(t)\}$ 称之



$$\langle \Psi_i(t), \Psi_j(t) \rangle = \int_0^T \Psi_i(t) \Psi_j(t) dt = \begin{cases} K_i, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

标准正交基： 特别地，满足下列条件的一种基 $\{\Psi_k(t)\}$ 称之

$$\langle \Psi_i(t), \Psi_j(t) \rangle = \int_0^T \Psi_i(t) \Psi_j(t) dt = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

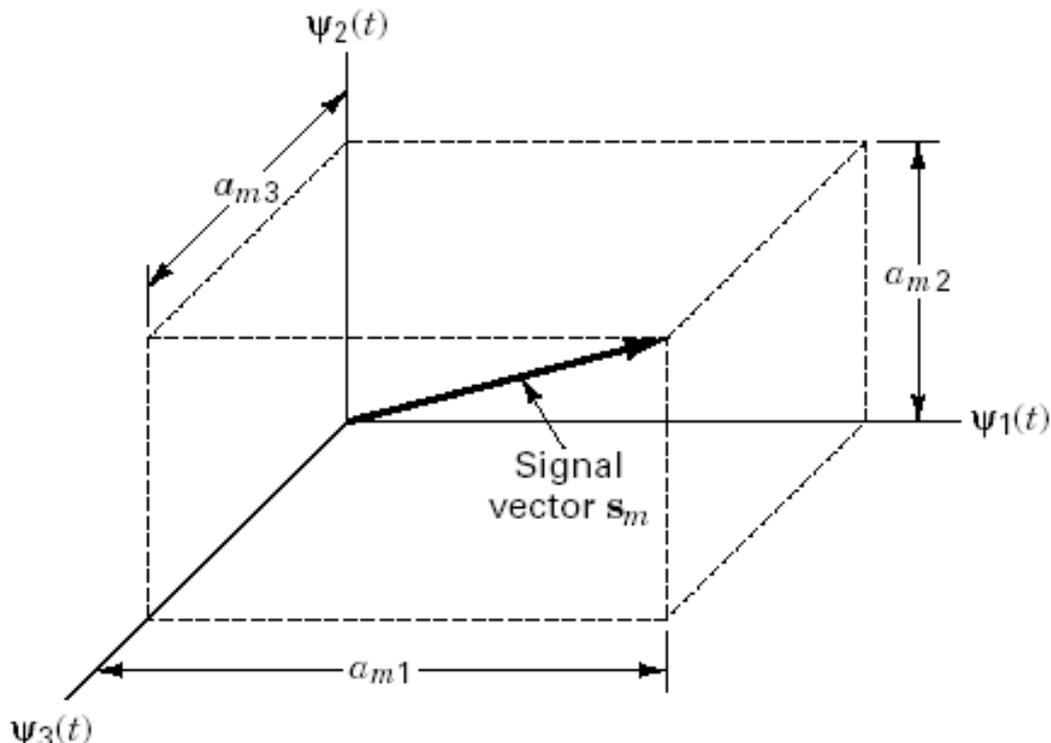
信号的矢量表示



N 个标准的基函数 $\{\Psi_k(t)\}$ 可构成一个标准的 N 维正交信号空间。

在正交的信号空间中，基函数两两互不相关。

例：三维的正交空间



基于标准正交基的信号表示



对于 M 进制系统中的信号集 $\{S_m(t)\} \quad m=1,2,\dots,M$

$$s_m(t) = a_{m1}\Psi_1(t) + a_{m2}\Psi_2(t) + \dots + a_{mN}\Psi_N(t) = \sum_{i=1}^N a_{mi}\Psi_i(t)$$

$$a_{mi} = \int_0^T s_m(t)\Psi_i(t)dt \quad i=1,2,\dots,N$$

信号 $S_m(t)$ 与系数矢量间有一一对应的关系

$$S_m = [a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mN}]^T \quad m=1,2,\dots,M$$

信号 $S_m(t)$ 的能量与系数间的关系

$$E_m = \int_0^T s_m^2(t)dt = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^N a_{mi}\Psi_i(t) \right)^2 dt = \sum_{i=1}^N a_{mi}^2 \quad m=1,2,\dots,M$$

正交基示例



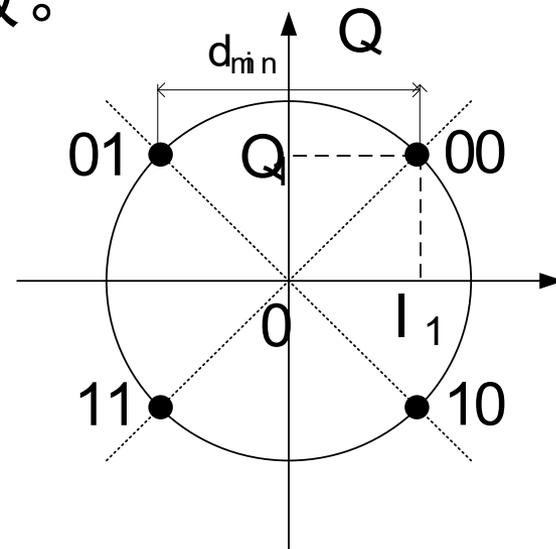
二维信号空间中的一组基函数

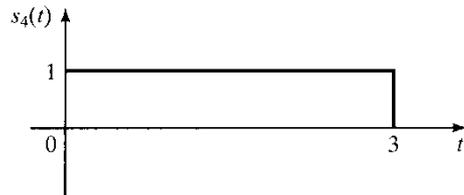
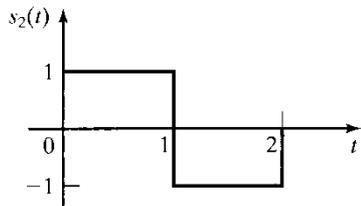
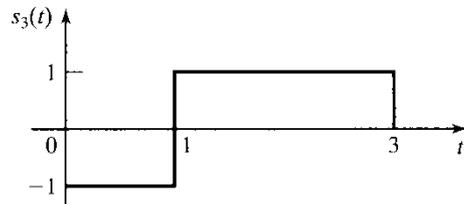
$$\Psi_1(t) = \cos 2\pi f_c t, \quad 0 \leq t \leq T_s$$

$$\Psi_2(t) = \sin 2\pi f_c t, \quad 0 \leq t \leq T_s$$

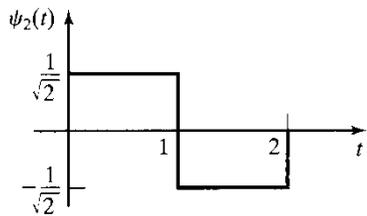
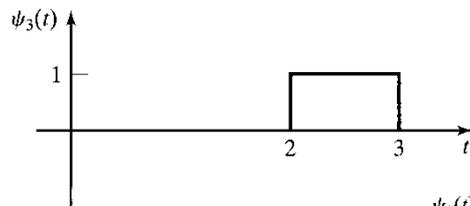
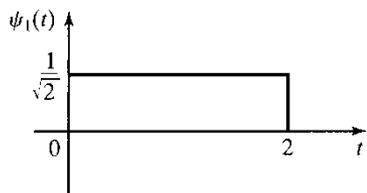
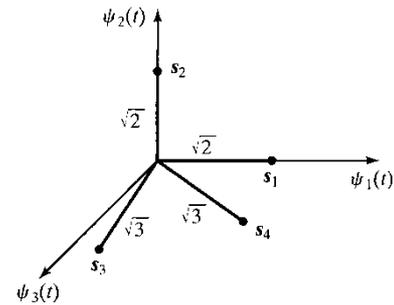
其中 $T_s = kT = k \frac{1}{f_c}$, k 是整数。

例：由上述基函数构成一个
四进制的符号空间

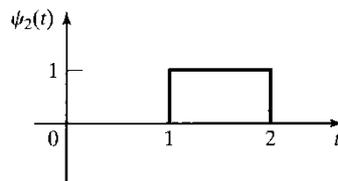
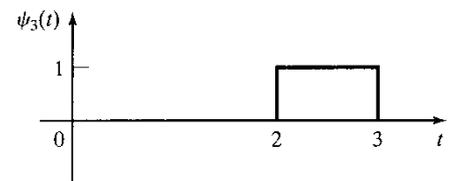
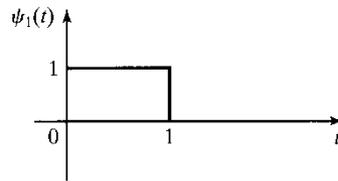




(a) Original signal set

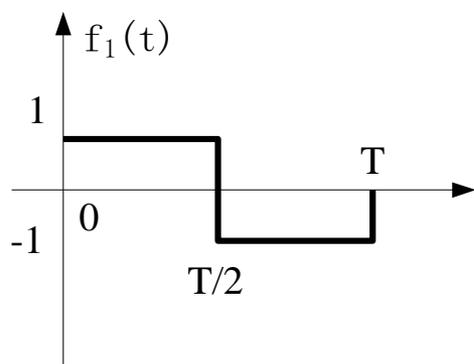


(b) Orthonormal waveforms

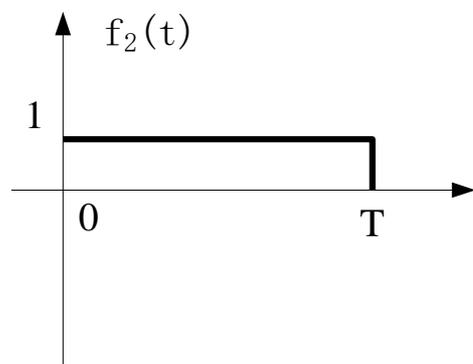




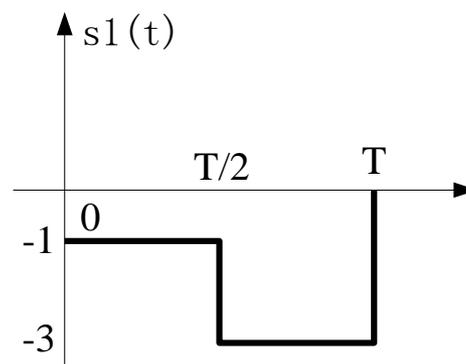
◆例 二维函数空间中的两个函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 如图所示。(1) 证明这两个函数是一组正交的基函数；(2) 试用 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 表示 $s_1(t)$ 。



(a)



(b)



(c)



$$\langle f_1(t), f_2(t) \rangle = \int_0^T f_1(t)f_2(t)dt = \int_0^{T/2} dt + \int_0^{T/2} (-1)dt = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{K_i} \int_0^T s(t)f_1(t)dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} (-1)dt + \int_{T/2}^T (-1)(-3)dt \right]$$

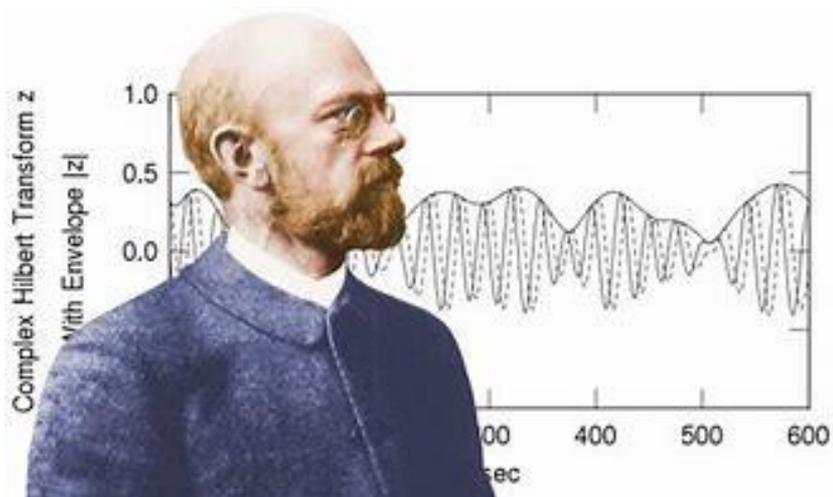
$$= \frac{1}{T} \left(-\frac{T}{2} + 3\frac{T}{2} \right) = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{K_2} \int_0^T s(t)f_2(t)dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} (-1)dt + \int_{T/2}^T (-3)dt \right]$$

$$= \frac{1}{T} \left(-\frac{T}{2} - 3\frac{T}{2} \right) = -2$$



2.4 希尔伯特变换及应用



**We must know .
We will know .**

-David Hilbert-

希尔伯特变换



一种构建某一已知函数的正交函数的变换

定义：实函数 $f(t)$ 的希尔伯特变换

$$H[f(t)] \triangleq \hat{f}(t) = f(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

希尔伯特变换的频率特性

$$\frac{1}{\pi t} \Leftrightarrow -j \operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} -j, & \omega > 0 \\ j, & \omega < 0 \end{cases}$$

等效于一个理想的相移器。

希尔伯特变换的傅氏变换对



$$\because \operatorname{sgn}(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[e^{-\alpha\omega} u(\omega) - e^{\alpha\omega} u(-\omega) \right]$$

$$\therefore \mathcal{F}^{-1}[\operatorname{sgn}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[e^{-\alpha\omega} u(\omega) - e^{\alpha\omega} u(-\omega) \right] e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\omega} u(\omega) e^{j\omega t} d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha\omega} u(-\omega) e^{j\omega t} d\omega \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{-\alpha + jt} - \frac{1}{\alpha + jt} \right) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2jt}{\alpha^2 + t^2} = \frac{j}{\pi t}$$

故有：

$$\frac{j}{\pi t} \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(\omega) \rightarrow \frac{1}{\pi t} \Leftrightarrow -j \operatorname{sgn}(\omega)$$



$$\mathcal{F}[\hat{x}(t)] = -j \operatorname{sgn}(f) X(f).$$

$$\mathcal{F}[-j \operatorname{sgn}(f)] = \frac{1}{\pi t}.$$

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi t} \star x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

思考一下，HT
和学过的FT LT
ZT有什么不同

希尔伯特反变换



◆ 希尔伯特反变换定义为

$$H^{-1}[g(t)] \stackrel{\Delta}{=} g(t) * \left(-\frac{1}{\pi t} \right) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

◆ 希尔伯特反变换的频率特性

$$-\frac{1}{\pi t} \Leftrightarrow j \operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} j, & \omega > 0 \\ -j, & \omega < 0 \end{cases}$$

由此得到

$$\frac{1}{\pi t} \Leftrightarrow -j \operatorname{sgn}(\omega)$$

$$H(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} -j & \omega > 0 \\ j & \omega < 0 \end{cases}$$

希尔伯特变换的性质



$$(1) \quad H^{-1}[\hat{f}(t)] = H^{-1}[H[f(t)]] = f(t)$$

$$\because H^{-1}[\hat{f}(t)] = H^{-1}[H[f(t)]] \rightarrow [-j \operatorname{sgn}(\omega)][j \operatorname{sgn}(\omega)] = 1 \rightarrow f(t)$$

$$(2) \quad H[\hat{f}(t)] = \hat{\hat{f}}(t) = -f(t)$$

$$\because H[\hat{f}(t)] = H\{H[f(t)]\} \rightarrow [-j \operatorname{sgn}(\omega)][-j \operatorname{sgn}(\omega)] = -1 \rightarrow -f(t)$$

希尔伯特变换的性质(续)



$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^2(t)dt$$

信号经过希尔伯特变换后能量不变：

$$\begin{aligned} \because \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^2(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{F}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |-j \operatorname{sgn}(\omega)F(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt \end{aligned}$$

希尔伯特变换的性质(续)



(4) 若 $f(t)$ 为偶函数, 则 $\hat{f}(t)$ 为奇函数;

$$\begin{aligned}\because \hat{f}(-t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{-t-\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(-\tau)}{t-(-\tau)} d(-\tau) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\infty}^{-\infty} \frac{f(\tau')}{t-\tau'} d\tau' = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau')}{t-\tau'} d\tau' = -\hat{f}(t)\end{aligned}$$

Proof. If $x(t)$ is even, then $X(f)$ is a real and even function; therefore, $-j \operatorname{sgn}(f)X(f)$ is an imaginary and odd function. Hence, its inverse Fourier transform $\hat{x}(t)$ will be odd. If $x(t)$ is odd, then $X(f)$ is imaginary and odd; thus $-j \operatorname{sgn}(f)X(f)$ is real and even. Therefore, $\hat{x}(t)$ is even.

同理可证: 若 $f(t)$ 为奇函数, 则 $\hat{f}(t)$ 为偶函数。

希尔伯特变换的性质(续)



(5) 信号与其希尔伯特变换生成的信号相互正交

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\hat{f}(t)dt = 0$$

因为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\hat{f}(t)dt &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\hat{f}(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \left[F(\omega) * (-j \operatorname{sgn}(\omega) F(\omega)) \right] \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-j \operatorname{sgn}(\omega') F(\omega')) F(\omega - \omega') d\omega' \\ &= -j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\omega') F(\omega') F(-\omega') d\omega' = 0\end{aligned}$$

注意到 $\operatorname{sgn}(\omega') F(\omega') F(-\omega')$ 是一个奇函数。



Proof. Using Parseval's theorem of the Fourier transform, we obtain

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)[-j\operatorname{sgn}(f)X(f)]^* df \\ &= -j \int_{-\infty}^0 |X(f)|^2 df + j \int_0^{+\infty} |X(f)|^2 df \\ &= 0,\end{aligned}\tag{2.6.8}$$

where, in the last step, we have used the fact that $X(f)$ is Hermitian; therefore, $|X(f)|^2$ is even.



■ 例：求函数 $\cos(\omega_0 t)$ 的希尔伯特变换。

$$\cos(\omega_0 t) \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\begin{aligned}\cos(\omega_0 t) * \frac{1}{\pi t} &\Leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \cdot [-j \operatorname{sgn}(\omega)] \\ &= j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]\end{aligned}$$

$$\sin(\omega_0 t) \Leftrightarrow j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

\therefore

$$\cos(\omega_0 t) * \frac{1}{\pi t} = \sin(\omega_0 t)$$

例题



Determine the Hilbert transform of the signal $x(t) = 2\text{sinc}(2t)$.

Solution We use the frequency-domain approach to solve this problem. Using the scaling property of the Fourier transform, we have

$$\mathcal{F}[x(t)] = 2 \times \frac{1}{2} \Pi\left(\frac{f}{2}\right) = \Pi\left(\frac{f}{2}\right) = \Pi\left(f + \frac{1}{2}\right) + \Pi\left(f - \frac{1}{2}\right).$$

In this expression, the first term contains all the negative frequencies and the second term contains all the positive frequencies.

To obtain the frequency-domain representation of the Hilbert transform of $x(t)$, we use the relation $\mathcal{F}[\hat{x}(t)] = -j\text{sgn}(f)\mathcal{F}[x(t)]$, which results in

$$\mathcal{F}[\hat{x}(t)] = j\Pi\left(f + \frac{1}{2}\right) - j\Pi\left(f - \frac{1}{2}\right).$$

Taking the inverse Fourier transform, we have

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= je^{-j\pi t}\text{sinc}(t) - je^{j\pi t}\text{sinc}(t) \\ &= -j(e^{j\pi t} - e^{-j\pi t})\text{sinc}(t) \\ &= -j \times 2j \sin(\pi t)\text{sinc}(t) \\ &= 2 \sin(\pi t)\text{sinc}(t).\end{aligned}$$



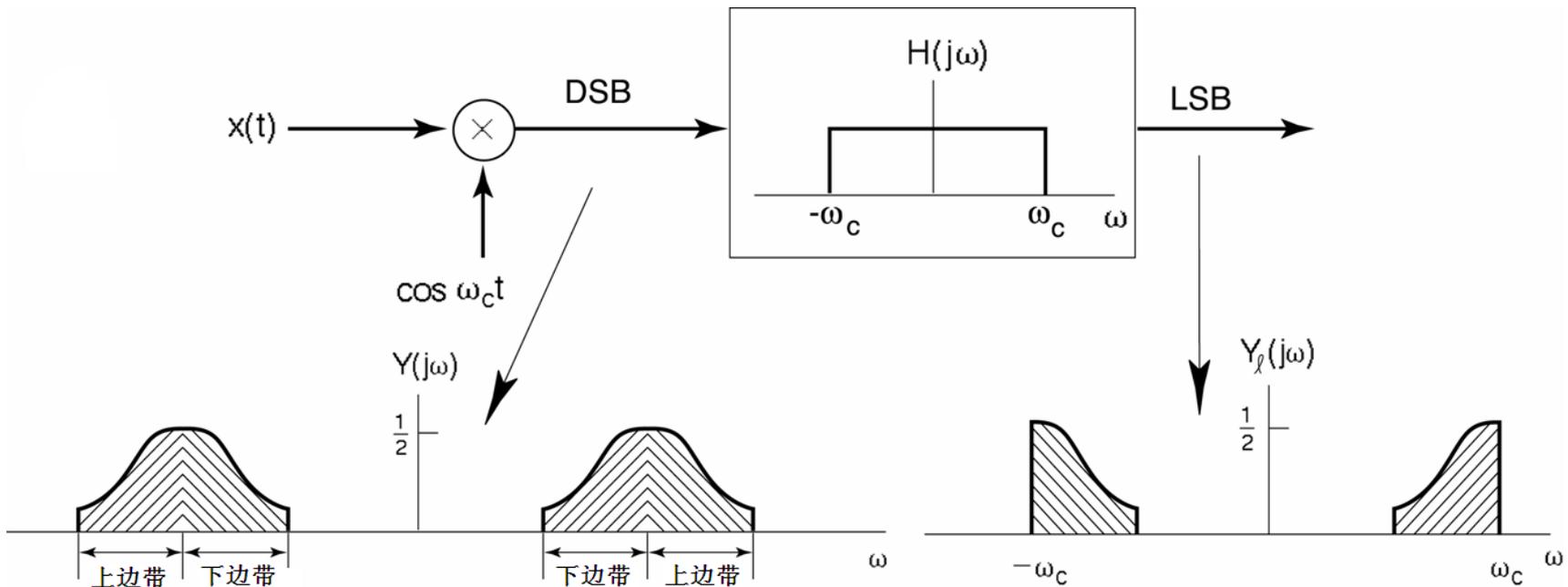
单边带正弦幅度调制(SSB)



Single-Sideband Sinusoidal Amplitude Modulation

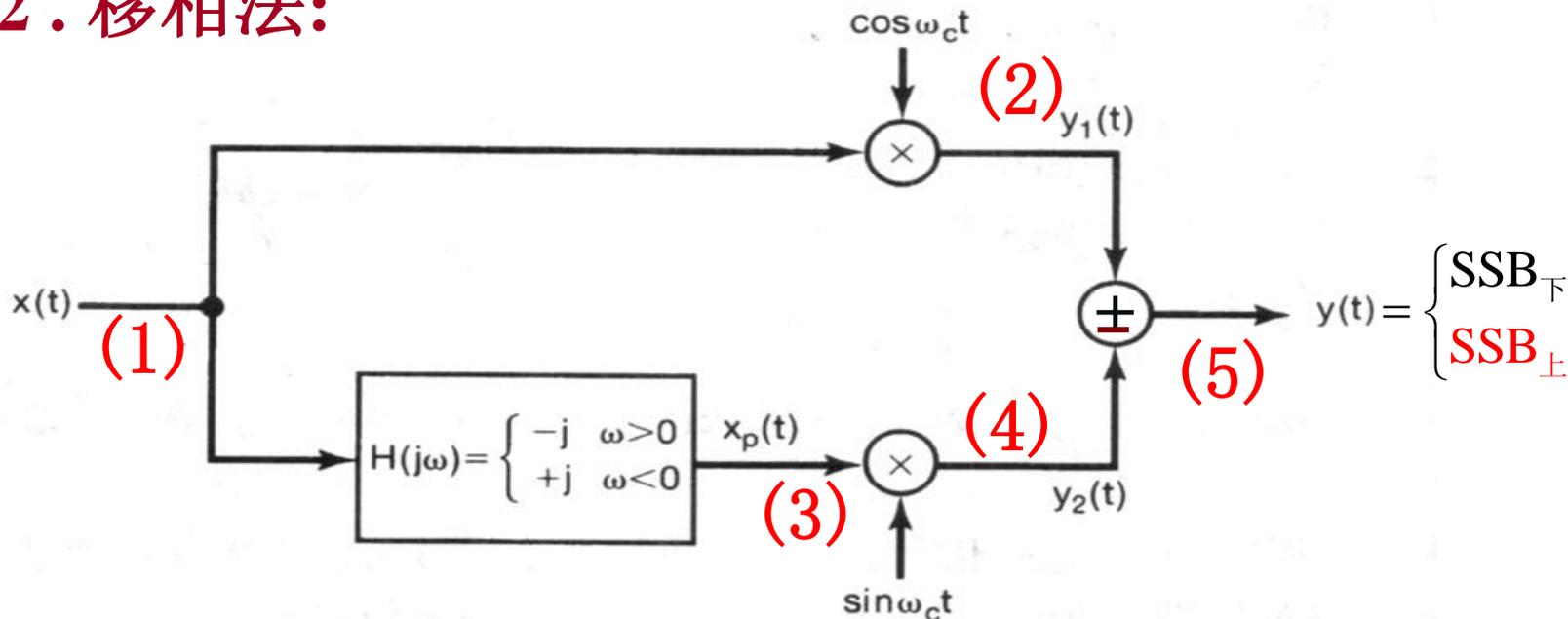
SSB信号的产生:

1. 滤波法: 利用边带滤波器, 滤除一个边带。



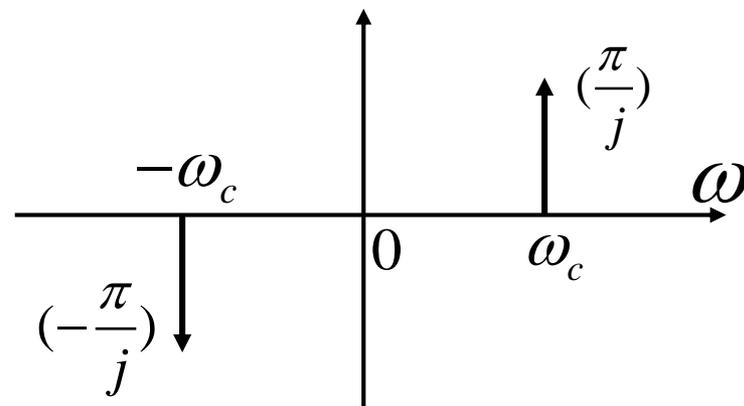


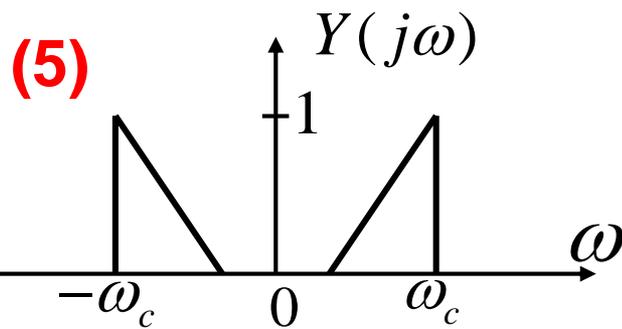
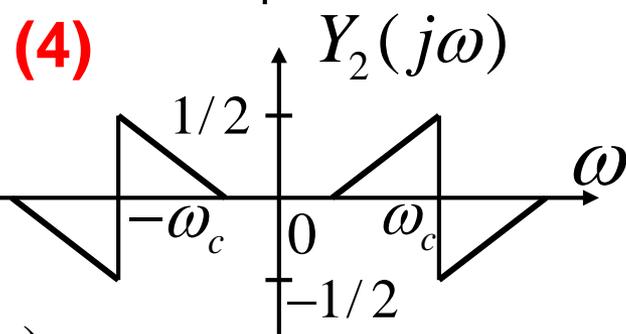
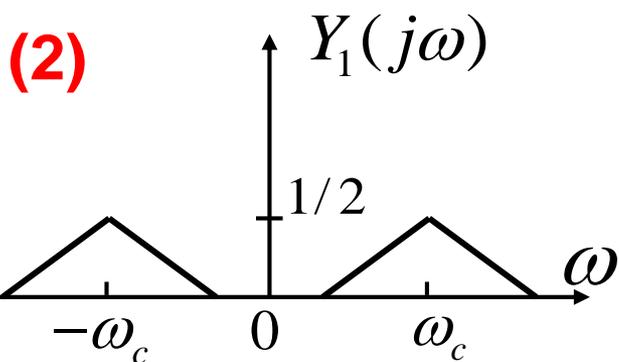
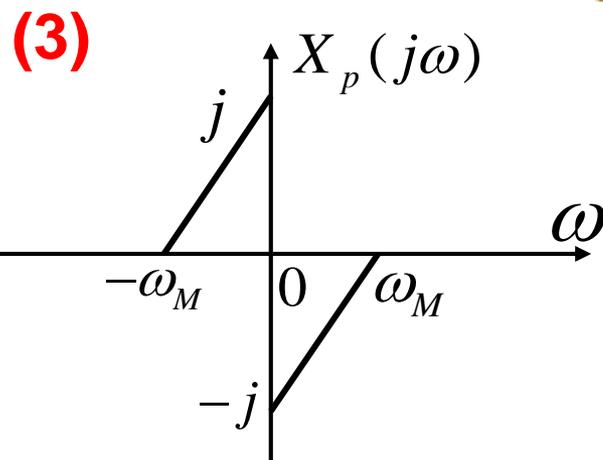
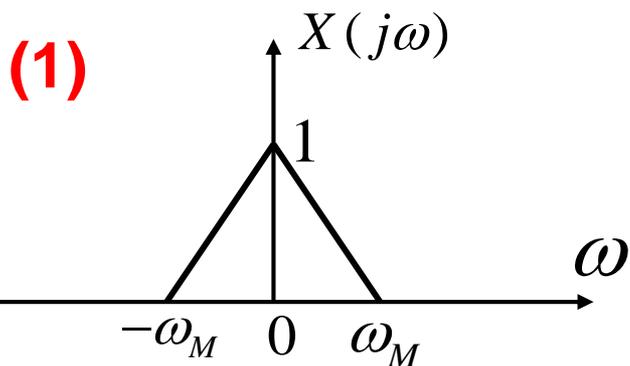
2. 移相法:



其中:

$$\sin \omega_c t \leftrightarrow \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_c) - \delta(\omega + \omega_c)]$$





SSB调制Matlab代码

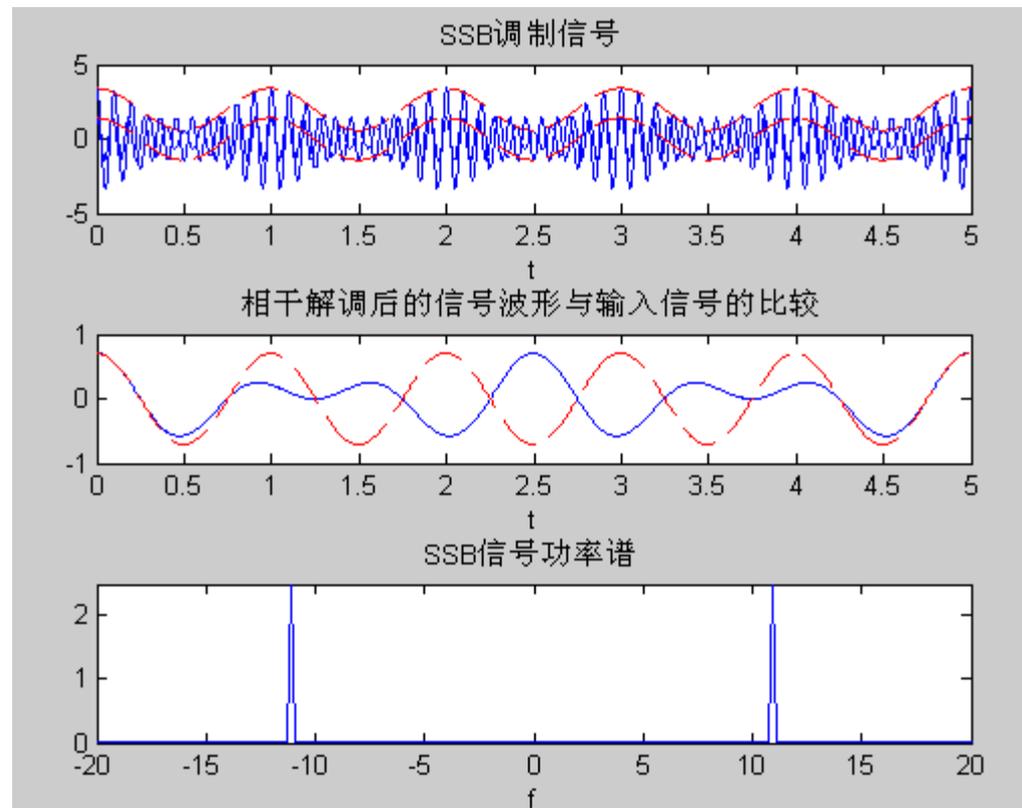


```
dt = 0.001;    %时间采样间隔
fm=1;         %信源最高频率
fc=10;        %载波中心频率
T=5;         %信号时长
t = 0:dt:T;
mt = sqrt(2)*cos(2*pi*fm*t); %信源
%N0 = 0.01;    %白噪声单边功率谱密度
```

```
%SSB modulation
s_ssb = real( hilbert(mt).*exp(j*2*pi*fc*t) );
B=fm;
%noise = noise_nb(fc,B,N0,t);
%s_ssb=s_ssb+noise;
```

```
%SSB demodulation
rt = s_ssb.*cos(2*pi*fc*t);
rt = rt-mean(rt);
[f,rf] = T2F(t,rt);
[t,rt] = lpf(f,rf,2*fm);
```

```
[f,sf]=T2F(t,s_ssb);
psf = (abs(sf).^2)/T;
```



解析信号



定义实信号 $f(t)$ 的信号的解析信号为：

$$z(t) = f(t) + j\hat{f}(t)$$

其中 $\hat{f}(t)$ 为该实信号的希尔伯特变换， $j = \sqrt{-1}$

解析信号的应用：

利用解析信号，可把带通信号转变为低通信号进行分析。

解析信号的性质



$$(1) f(t) = \text{Re}[z(t)]$$

由定义，结论为显然。

$$(2) f(t) = \frac{1}{2} [z(t) + z^*(t)]$$

$$\begin{aligned} \because \frac{1}{2} [z(t) + z^*(t)] &= \frac{1}{2} \left[(f(t) + j\hat{f}(t)) + (f(t) + j\hat{f}(t))^* \right] \\ &= \frac{1}{2} [f(t) + j\hat{f}(t) + f(t) - j\hat{f}(t)] = f(t) \end{aligned}$$

解析信号的性质(续)



$$(3) \quad Z(\omega) = \begin{cases} 2F(\omega), & \omega > 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases} = 2F(\omega)u(\omega),$$

$$\text{其中: } f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

因为有:

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \mathfrak{F}[z(t)] = \mathfrak{F}[f(t) + j\hat{f}(t)] = \mathfrak{F}[f(t)] + j\mathfrak{F}[\hat{f}(t)] \\ &= F(\omega) + j[-j\operatorname{sgn}(\omega)F(\omega)] = \\ &= F(\omega) + \operatorname{sgn}(\omega)F(\omega) = 2F(\omega)u(\omega) \end{aligned}$$

解析信号的性质(续)



$$(4) \quad z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2F(\omega) u(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

解析信号的性质(续)



(5)

$$z^*(t) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 & \omega > 0 \\ 2F(\omega) & \omega < 0 \end{cases} = 2F(\omega)u(-\omega)$$

$$\because z^*(t) = f(t) - j\hat{f}(t)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}[z^*(t)] &= \mathfrak{S}[f(t) - j\hat{f}(t)] = \mathfrak{S}[f(t)] - j\mathfrak{S}[\hat{f}(t)] \\ &= F(\omega) - j[-j \operatorname{sgn}(\omega)F(\omega)] = 2F(\omega)u(-\omega) \end{aligned}$$

解析信号的性质(续)



(6) 若 $z_1(t)$, $z_2(t)$ 分别为 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 的解析信号, 则

$$z_1(t) * z_2^*(t) = 0$$

$$\because z_1(t) * z_2^*(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Z_1(\omega) \mathfrak{F}[z_2^*(t)] = [2F_1(\omega)u(\omega)][2F_2(\omega)u(-\omega)] = 0$$

$$\rightarrow z_1(t) * z_2^*(t) = 0$$

$z_1(t)$, $z_2^*(t)$ 两信号的频谱分布在不同的区域。

同理, 有:

$$z_1^*(t) * z_2(t) = 0$$

解析信号的性质(续)



(7) 解析信号 $z(t)$ 的能量 E_Z 等于原实信号 $f(t)$ 能量的2倍

$$\begin{aligned}\because E_Z &= \int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t)z^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) + j\hat{f}(t)][f(t) - j\hat{f}(t)]dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [f^2(t) + \hat{f}^2(t)]dt = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^2(t)dt \\ &= 2\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = 2E_f\end{aligned}$$

已知实函数 $f(t)$ ，求其解析信号的方法



(1) 求出 $f(t)$ 的希尔伯特变换 $\hat{f}(t)$ ，再构成其

解析信号： $z(t) = f(t) + j\hat{f}(t)$

(2) 由 $f(t)$ 求其傅里叶变换 $F(\omega)$ ，再由公式

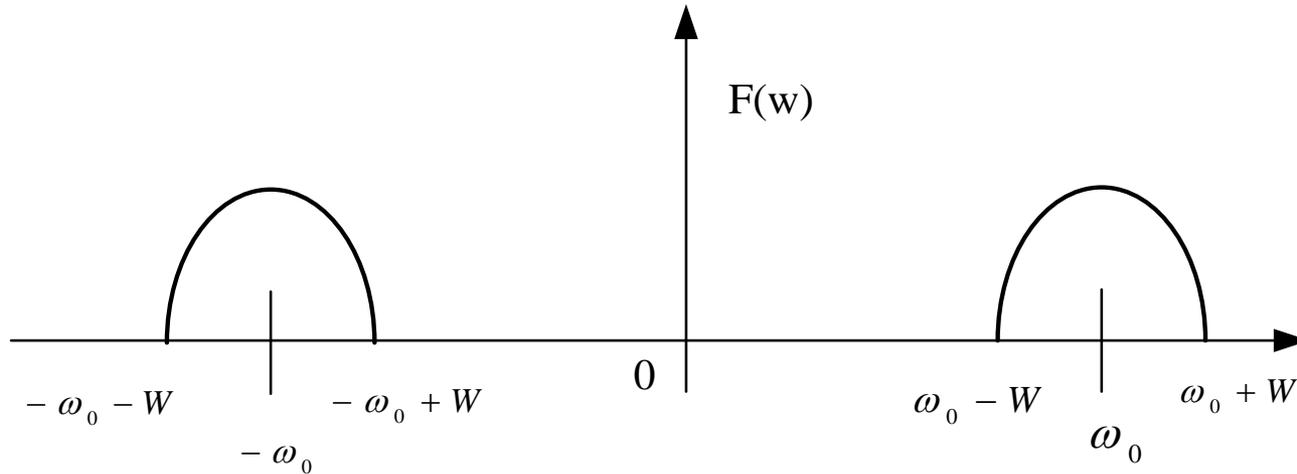
$$z(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{求} f(t) \text{的解析信号。}$$

频带信号与窄带信号



频带信号(带通信号), 信号的频率分布集中在某一中心频率 ω_0 附近的信号称之;

窄带信号, 频带信号带宽为 $2W$, 若满足 $\omega_0 \gg 2W$, 则又称此信号为窄带信号。



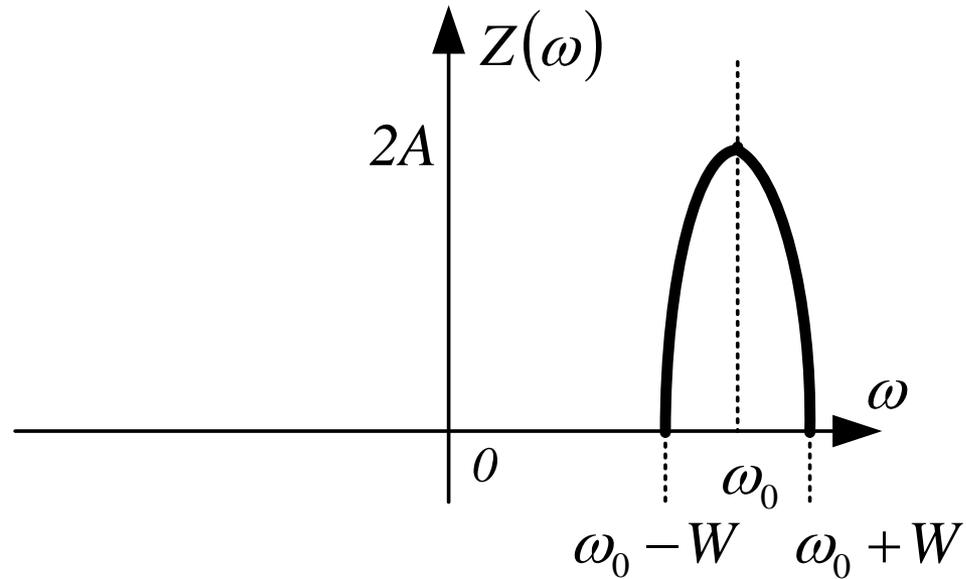
频带信号的频谱分布

频带信号(带通信号) $f(t)$ 的解析信号



$$z(t) = f(t) + j\hat{f}(t) \Leftrightarrow 2F(\omega)u(\omega) = Z(\omega)$$

解析信号的频谱结构



频带信号的复包络表示

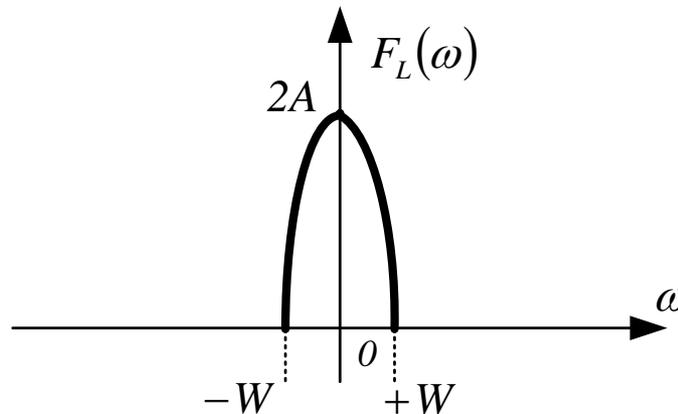


称 $f_L(t) = z(t)e^{-j\omega_c t}$

为函数 $f(t)$ 的复包络（等效低通信号），显然有：

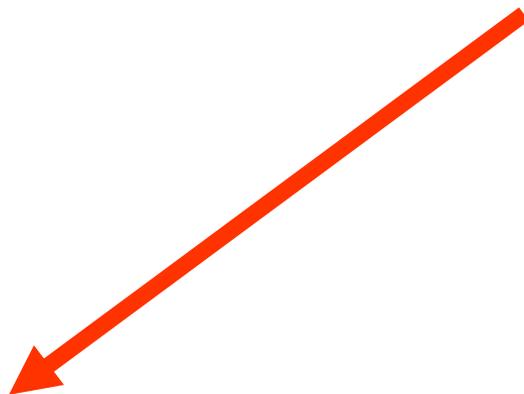
$$f_L(t) \Leftrightarrow F_L(\omega) = Z(\omega + \omega_c) = 2F(\omega + \omega_c)u(\omega + \omega_c)$$

频带信号的复包络
的频谱结构





$$z(t) = \underline{f_L(t)} e^{\underline{j\omega_c t}}$$



称为 $f(t)$ 的复包络



称为 $f(t)$ 的复载波



$$\text{令 } f_L(t) = f_c(t) + jf_s(t)$$

$$f(t) = \underbrace{f_c(t)} \underbrace{\cos \omega_c t} - \underbrace{f_s(t)} \sin \omega_c t$$

称作同相分量

称作正交分量

称作 $f(t)$ 的载波

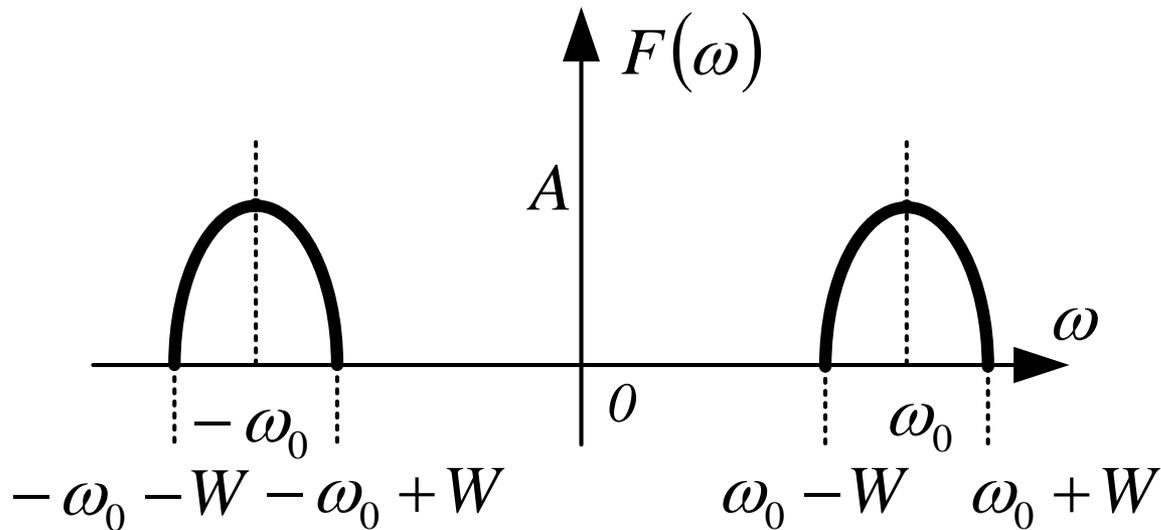
带通系统



带通系统：通频带位于频谱的某一区域范围内的系统称之。

$$(-\omega_0 - W, -\omega_0 + W), (\omega_0 - W, \omega_0 + W)$$

系统的冲激响应和传递函数记为： $h(t) \longleftrightarrow H(\omega)$



带通系统的解析函数及等效低通传递函数



$$z_h(t) = h(t) + j\hat{h}(t)$$

$$Z_h(\omega) = 2H(\omega)u(\omega)$$

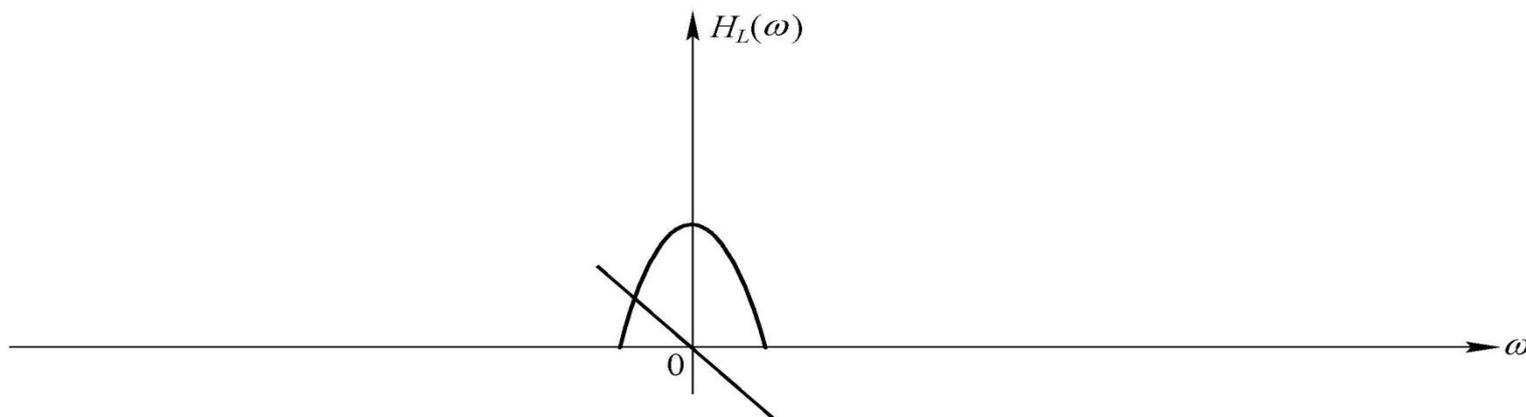
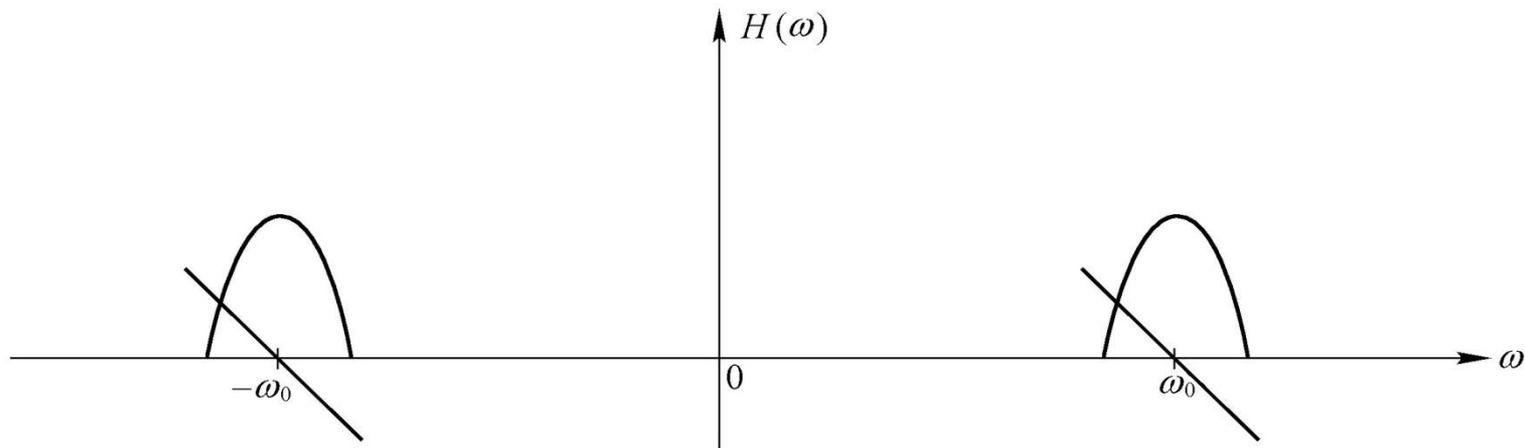
定义:

$$h_L(t) = \frac{1}{2} z_h(t) e^{-j\omega_0 t}$$

$$H_L(\omega) = H(\omega + \omega_0)u(\omega + \omega_0)$$

$H_L(\omega)$ 称为带通系统的等效低通传递函数。

带通系统的传递函数



带通系统的等效低通传递函数

带通信号通过带通系统的（低通）分析方法



由 $f_L(t) = z(t)e^{-j\omega_c t}$ $h_L(t) = \frac{1}{2} z_h(t)e^{-j\omega_0 t}$

可得

$$f(t) = \frac{1}{2} [z_f(t) + z_f^*(t)] = \frac{1}{2} [f_L(t)e^{j\omega_0 t} + (f_L(t)e^{j\omega_0 t})^*]$$

$$h(t) = \frac{1}{2} [z_h(t) + z_h^*(t)] = h_L(t)e^{j\omega_0 t} + (h_L(t)e^{j\omega_0 t})^*$$

$$y(t) = \frac{1}{2} [z_y(t) + z_y^*(t)] = \frac{1}{2} [y_L(t)e^{j\omega_0 t} + (y_L(t)e^{j\omega_0 t})^*]$$

带通信号通过带通系统的（低通）分析方法（续）



$$\begin{aligned}y(t) &= f(t) * h(t) \\&= \frac{1}{2} [z_f(t) + z_f^*(t)] * \frac{1}{2} [z_h(t) + z_h^*(t)] \\&= \frac{1}{4} [z_f(t) * z_h(t) + z_f^*(t) * z_h(t) + z_f(t) * z_h^*(t) + z_f^*(t) * z_h^*(t)] \\&= \frac{1}{4} [z_f(t) * z_h(t) + z_f^*(t) * z_h^*(t)]\end{aligned}$$

带通信号通过带通系统的（低通）分析 方法（续）



整理可得：

$$y(t) = \frac{1}{2} \left[(f_L(t) * h_L(t)) e^{j\omega_0 t} + (f_L^*(t) * h_L^*(t)) e^{-j\omega_0 t} \right]$$

比较：

$$y(t) = \frac{1}{2} [z_y(t) + z_y^*(t)] = \frac{1}{2} \left[y_L(t) e^{j\omega_0 t} + (y_L(t) e^{j\omega_0 t})^* \right]$$

最后可得

信号复包络之间的关系 $y_L(t) = h_L(t) * f_L(t)$

复包络信号与原信号间的关系 $y(t) = \text{Re} [z_y(t)] = \text{Re} [y_L(t) e^{j\omega_0 t}]$

例：设带通系统冲激响应



$$h(t) = \begin{cases} \cos \omega_0 t & 0 < t < T \\ 0 & \text{other} \end{cases}, \omega_0 T \gg 1$$

若输入窄带信号： $f(t) = m(t)\cos(\omega_0 t)$ ，求输出 $y(t)$

解：该冲激响应相当于持续时间宽度为 T 的脉冲调制频率为 ω_0 的余弦信号， $\omega_0 T \gg 1$ ，等效于 $\omega_0 \gg 1/T$ ，这意味着宽度为 T 的脉冲主要的成分集中在 ω_0 附近，宽度远小于 ω_0 的区域，为窄带系统。

$$z_h(t) = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t = e^{j\omega_0 t} \quad 0 < t < T$$

$$h_L(t) = \frac{1}{2} z_h(t) e^{-j\omega_0 t} = \frac{1}{2}, \quad 0 < t < T$$

■ 例（续）：



输入信号的解析信号和低通信号分别为

$$f(t) = m(t)\cos\omega_0 t \Leftrightarrow \frac{1}{2}[M(\omega + \omega_0) + M(\omega - \omega_0)]$$

$$z_f(t) \Leftrightarrow 2F(\omega)u(\omega) = M(\omega - \omega_0)$$

$$f_L(t) = z_f(t)e^{-j\omega_0 t} \Leftrightarrow M(\omega - \omega_0 + \omega_0) = M(\omega)$$

$$f_L(t) = m(t)$$

■ 例（续）：

相应的输出等效低通信号为

$$\begin{aligned} y_L(t) &= f_L(t) * h_L(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_L(\tau) h_L(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{t-T}^t f_L(\tau) \cdot \frac{1}{2} d\tau = \frac{1}{2} \int_{t-T}^t m(\tau) d\tau \end{aligned}$$

最后的输出信号为

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Re} \left[y_L(t) e^{j\omega_o t} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{t-T}^t m(\tau) d\tau \right] \cos \omega_o t \end{aligned}$$

可见分析过程大为简化。



等效基带系统的Matlab代码



```
dt = 0.01;
```

```
t = 0:dt:5;
```

```
s1 = exp(-t).*cos(20*pi*t);           %输入信号
```

```
[f1 s1f]= T2F(t,s1);                 %输入信号的频谱
```

```
s1_lowpass = hilbert(s1).*exp(-j*2*pi*10*t); %输入信号的等效基带信号
```

```
[f2 s2f]=T2F(t,s1_lowpass);         %输入等效基带信号的频谱
```

```
h2f = zeros(1,length(s2f));
```

```
[a b]=find( abs(s1f)==max(abs(s1f)) ); %找到带通信号的中心频率
```

```
h2f( 201-25:201+25 )= 1;
```

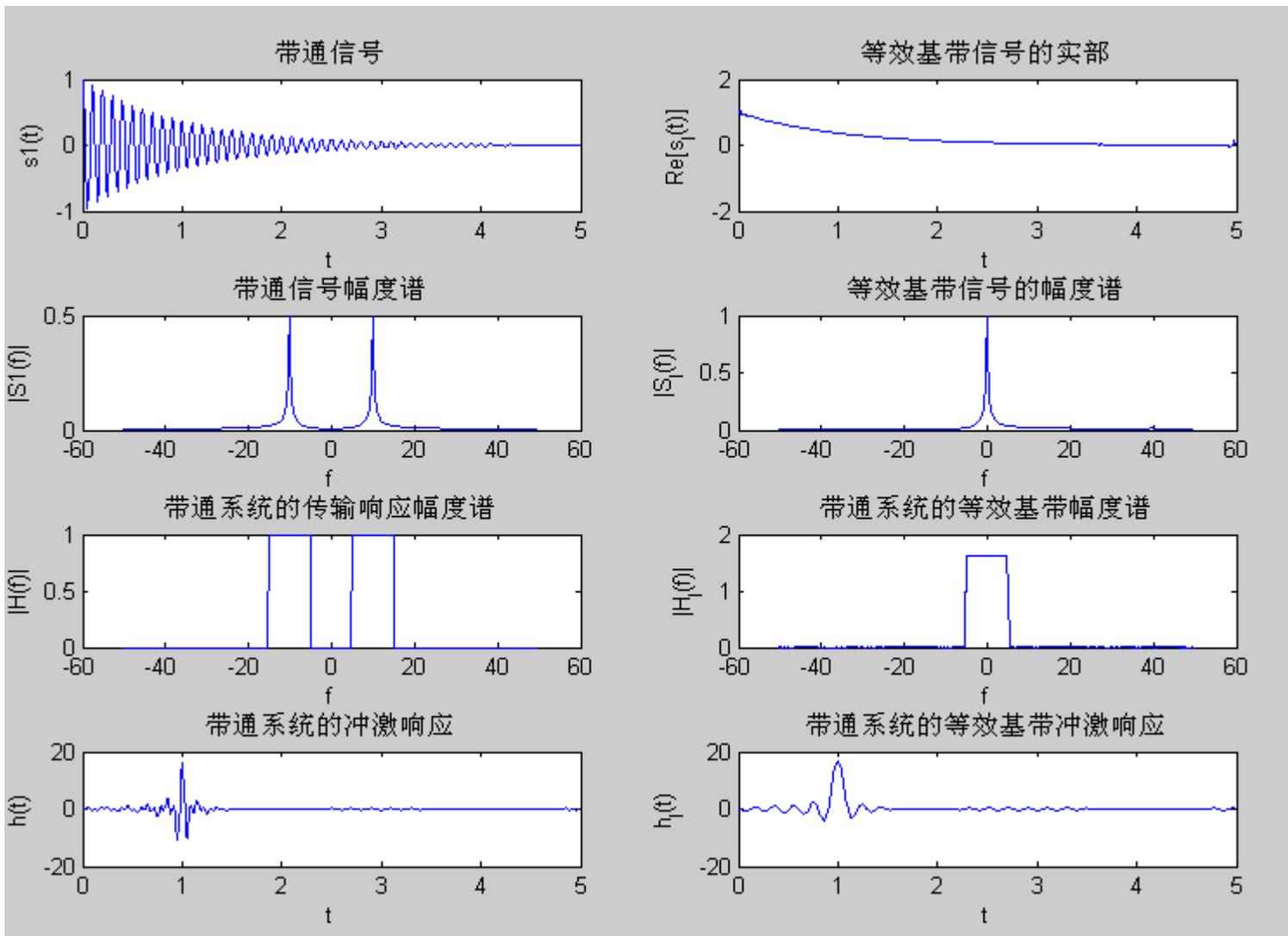
```
h2f( 301-25:301+25) = 1;
```

```
h2f = h2f.*exp(-j*2*pi*f2);         %加入线性相位，
```

```
[t1 h1] = F2T(f2,h2f);              %带通系统的冲激响应
```

```
h1_lowpass = hilbert(h1).*exp(-j*2*pi*10*t1); %等效基带系统的冲激响应
```







2.5 随机信号的基本概念与特点

随机信号分析方法



随机过程/随机信号的基本概念

确定信号：变化特性完全确知的信号

如：当幅度、频率和相位为常数的余弦信号：

随机信号：变化特性不能完全预知的信号

如： $A \cos(\omega t + \varphi)$ 其中

幅度 A 、频率 ω 和相位 φ 三个参量中有一个或多个是随机变量的余弦信号。

通信系统中的随机信号

传输的信息是随机信号（如果是确定信号则不必传输）；

各种自然界的干扰和噪声通常是随机信号。



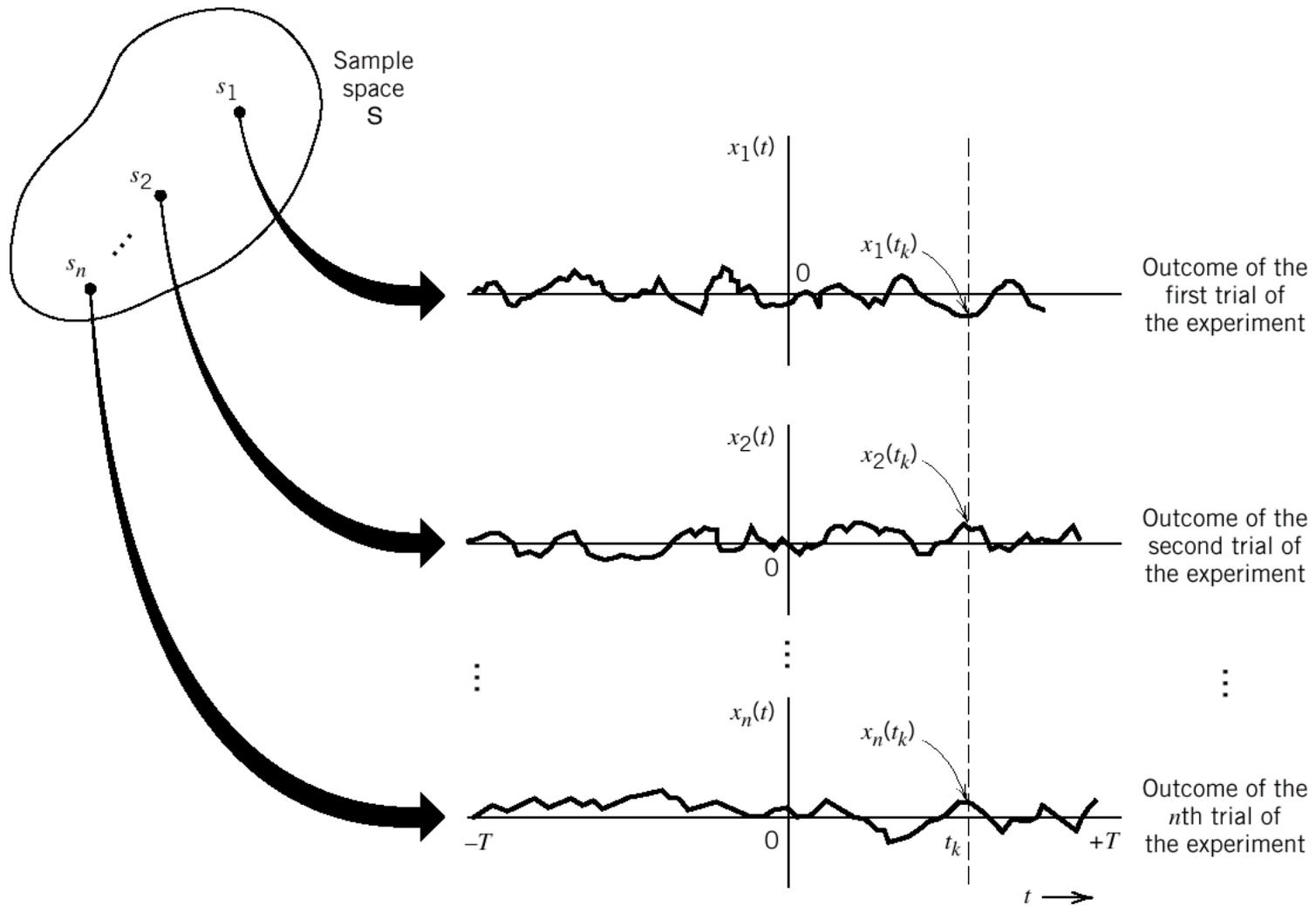
■ **随机过程的统计特性：**随机过程的统计特性可由其分布函数、概率密度函数或其各阶矩的数字特征描述。

■ **随机过程(Stochastic Process)的概念：**随机过程可由有限个或无限多个实现构成，其每个实现可看作某一时间信号，如下页图所示：

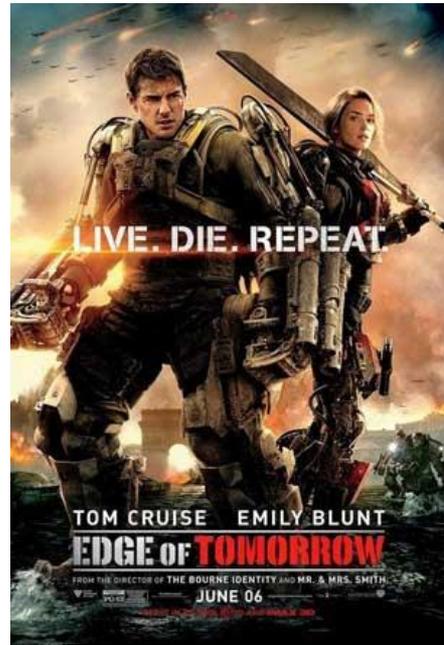
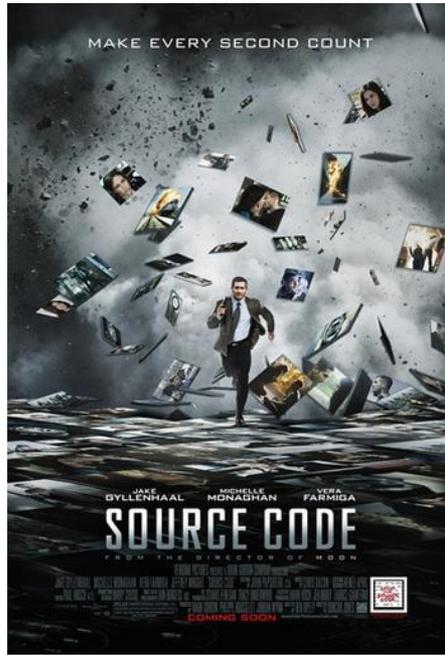
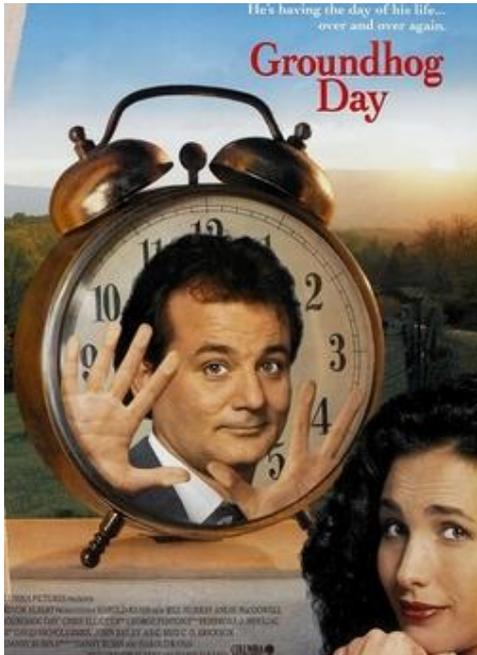
随机过程可表示： $\{X(t), t \in T\}$

随机过程的样本函数记为： $X_n(t), n=1, 2, \dots$

在某一时刻 t_i ，随机过程实现的样值 $X_n(t_i), n=1, 2, \dots$ 为**随机变量**。



随机信号与平行空间



随机过程的常用统计值



◆ $F_1(x_1, t_1) = P[X(t_1) \leq x_1]$ 称作随机过程 $X(t)$ 的一

维分布函数。

◆ 如果存在 $\frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1} = p_1(x_1, t_1)$ 则称其为 $X(t)$ 的

一维概率密度。

随机过程的多维分布函数和概率密度函数



n 维分布函数:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n) \end{aligned}$$

n 维概率密度函数:

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ = \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \end{aligned}$$

两随机过程的联合分布函数和数字特征



◆ $[n+m]$ 维随机向量 $[X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n); Y'_1, Y'_2, \dots, Y'_M]$

• 的联合分布函数定义为

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n; y_1, y_2, \dots, y_m, t'_1, t'_2, \dots, t'_m) \\ = P \left[\begin{array}{l} X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n; \\ Y(t'_1) \leq y_1, Y(t'_2) \leq y_2, \dots, Y(t'_m) \leq y_m \end{array} \right]$$



•若存在

$$\frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n; y_1, y_2, \dots, y_m, t'_1, t'_2, \dots, t'_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n \partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_m} \\ = P(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n; y_1, y_2, \dots, y_m, t'_1, t'_2, \dots, t'_m)$$

则称为 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的 $n+m$ 维联合概率密度

两个随机过程独立的充要条件



对任意的 n 、 m ，有

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n; y_1, y_2, \dots, y_m, t'_1, t'_2, \dots, t'_m) \\ = F(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) F(y_1, y_2, \dots, y_m, t'_1, t'_2, \dots, t'_m) \end{aligned}$$

或有：

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n; y_1, y_2, \dots, y_m, t'_1, t'_2, \dots, t'_m) \\ = p(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) p(y_1, y_2, \dots, y_m, t'_1, t'_2, \dots, t'_m) \end{aligned}$$



2.6 随机过程的主要统计特性



图片摘自2014年8月17日江苏卫视《非诚勿扰》

随机过程的统计值



数学期望（均值）：

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, t)dx$$





方差：

$$\begin{aligned} D[X(t)] &= E[X(t) - E[X(t)]]^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X(t))^2 p(x, t) dx = \sigma_X^2(t) \end{aligned}$$

自相关函数：

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

注意：随机过程的相关函数是在定义在统计平均意义的。

随机过程的统计值通常是时间的函数

随机过程的统计值(续)



互相关函数:

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{XY}(t_1, t_2; x, y) dx dy$$

自协方差函数:

$$\begin{aligned} \Gamma_X(t_1, t_2) &= \text{cov}[X(t_1), X(t_2)] = E\{[X(t_1) - m(t_1)][X(t_2) - m(t_2)]\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1 - m(t_1)][x_2 - m(t_2)] f(t_1, t_2; x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

互协方差函数:

$$\begin{aligned} \Gamma_{XY}(t_1, t_2) &= \text{cov}[X(t_1), Y(t_2)] = E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][Y(t_2) - m_Y(t_2)]\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [x - m_X(t_1)][y - m_Y(t_2)] f_{XY}(t_1, t_2; x, y) dx dy \end{aligned}$$

复随机过程



$$X(t) = X_R(t) + jX_I(t)$$

$$\begin{aligned} m(t) &= E[X(t)] = E[X_R(t) + jX_I(t)] \\ &= E[X_R(t)] + jE[X_I(t)] = m_R(t) + jm_I(t) \end{aligned}$$

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X^*(t_2)]$$

$$\Gamma_X(t_1, t_2) = E\left\{ [X(t_1) - m(t_1)][X(t_2) - m(t_2)]^* \right\}$$

$$\Gamma_{XY}(t_1, t_2) = E\left\{ [X(t_1) - m_X(t_1)][Y(t_2) - m_Y(t_2)]^* \right\}$$



2.7 随机函数的分布及数字特征

随机变量函数的分布及数字特征



一维随机变量函数的分布

(1) 若 $X \sim p_x(x)$

$y=f(x)$ 严格单调变化

$x=f^{-1}(y)$ 反函数有连续导数

则

$$Y = f(X) \sim p_Y(y) = \begin{cases} p_X [f^{-1}(y)] \left| \frac{d}{dy} [f^{-1}(y)] \right|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\alpha = \min [f(-\infty), f(+\infty)] \quad \beta = \max [f(-\infty), f(+\infty)]$$



$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(f(X) \leq y) = P(X \leq f^{-1}(y)) = \int_{-\infty}^{f^{-1}(y)} f_X(x) dx$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_Y(y)}{dx} \frac{dx}{dy}$$

边上限积分的求导

$$= f_X(f^{-1}(y)) \cdot [f^{-1}(y)]'$$

一维随机变量函数的分布(续)



(2) 若 $y=f(x)$ 在不重叠的区域逐段严格单调变化其相应的反函数 $f_1^{-1}(x)$ 、 $f_2^{-1}(x)$ 、...

有连续导数

则

$$p_Y(y) = p_X [f_1^{-1}(y)] \left| [f_1^{-1}(y)]' \right| + p_X [f_2^{-1}(y)] \left| [f_2^{-1}(y)]' \right| + \dots$$

随机变量函数的分布



随机向量函数的分布函数

若 (X_1, X_2, \dots, X_n) 概率密度函数为 $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$

则

$$Y=f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

的分布函数

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y < y) = P[f(X_1, X_2, \dots, X_n) < y] \\ &= \int \dots \int_{f(x_1, x_2, \dots, x_n) < y} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \end{aligned}$$

随机变量函数的统计值(数字特征)



随机向量函数的均值

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} yp_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p_X(x)dx$$

可直接由自变量 X 的概率密度函数计算。

同理可得随机变量函数的其他统计特性值。

随机变量函数的统计值(数字特征)(续)



示例 已知随机变量函数

$$Y(t) = A \cos(\omega_c t + X)$$

X 在 $(-\pi, \pi)$ 上均匀分布

则有

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} y p_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A \cos(\omega_c t + x) p_X(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} A \cos(\omega_c t + x) \frac{1}{2\pi} dx = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left\{[Y(t) - m_Y(t)]^2\right\} &= E\left\{[Y(t)]^2\right\} - m_Y^2(t) \\ &= E\left\{[Y(t)]^2\right\} = \int_{-\pi}^{\pi} [A \cos(\omega_c t + X)]^2 \frac{1}{2\pi} dx = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$



2.8 平稳随机信号



平稳随机过程



严（狭义）平稳随机过程：

对任意 n 和 τ 满足如下关系式的随机过程

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = p(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau) \end{aligned}$$

称之为**严平稳随机过程**。

严平稳随机过程的统计特性不随时间的平移而改变。

平稳随机过程（续）



宽（广义）平稳随机过程：

满足如下关系式的随机过程

$$E[X(t)] = m_X \quad (\text{常数})$$

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau) \quad \tau = t_2 - t_1$$

为宽平稳随机过程。

宽平稳随机过程的一阶矩为常数，二阶矩只与时间差有关。

（注：宽平稳随机过程只涉及了其一阶、二阶的统计特性）



宽（广义）平稳随机过程：

平稳随机信号一阶、二阶矩的统计特性的物理意义

- (1) 均值 $E[X(t)]$ ：信号的直流成分；
- (2) 均值的平方 $\{E[X(t)]\}^2$ ：信号直流部分的归一化功率；
- (3) 二阶距 $E[X^2(t)]$ ：总的归一化信号功率；
- (4) 方差 $E[X(t) - E[X(t)]]^2 = E[X^2(t)] - \{E[X(t)]\}^2$ ：信号时变部分总的归一化功率。

归一化：负载为 1 欧姆电阻。

联合宽平稳随机过程



- 若 $X(t)$, $Y(t)$ 是宽平稳随机过程, 且

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X_{t_1} Y(t_2)] = R_{XY}(\tau)$$

其中 $t_2 - t_1 = \tau$

则称 $X(t)$, $Y(t)$ 为联合宽平稳随机过程

实平稳随机过程相关函数的性质



$$R_X(0) = E[X^2(t)]$$

$$R_X(\tau) = R_X(-\tau)$$

$$|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$$

$$\Gamma_X(\tau) = \Gamma_X(-\tau)$$

$$\Gamma_X(\tau) \leq \Gamma_X(0)$$

$$\Gamma_X(\tau) = R_X(\tau) - m_X^2$$



$$\begin{aligned}R_X(\tau) &= E[X(t+\tau)X(t)] = E[X(t)X(t+\tau)] \\ &= R_X(t-(t+\tau)) = R_X(-\tau)\end{aligned}$$

$$E\{[X(t) - X(t+\tau)]^2\} \geq 0$$

$$\begin{aligned}E\{[X(t) - X(t+\tau)]^2\} &= E[X^2(t)] - 2E[X(t)X(t+\tau)] + E[X^2(t+\tau)] \\ &= 2R_X(0) - 2R_X(\tau) \geq 0\end{aligned}$$

$$R_X(\tau) \leq R_X(0)$$

随机信号



时间平均和各态历经性

各态历经性：从随机过程的任何一个样本(实现)就可以得出随机过程的全部统计信息。或一个样本按时间的平均可以近似地替代随机过程在固定时刻取值的统计平均。

各态历经的随机过程是严平稳的，反之不然。

均值的各态历经性：

$$m_X = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} X(t) dt$$

相关函数的各态历经性：

$$R_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} X(t)X(t + \tau) dt$$

平稳随机过程各态历经性（遍历性）



若平稳随机过程的均值、相关函数等统计特性可用其时间平均来计算的随机过程称之为

$$m_X = \langle X(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (\text{常数})$$

$$R_X(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau) dt$$

$$\begin{aligned} \Gamma_X(\tau) &= \langle [x(t) - m_X][x(t+\tau) - m_X] \rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - m_X][x(t+\tau) - m_X] dt \end{aligned}$$

对于各态历经的平稳随机过程：统计平均与时间平均等价

随机信号



时间平均和各态历经性

在对通信系统进行分析时，通常假定随机信号具有各态历经性。

各态历经信号的二阶统计特性与其电参数的关系：

- a. 均值等于信号的直流电平；
- b. 均值的平方等于信号直流分量的归一化功率；
- c. 二阶矩等于归一化总平均功率；
- d. 方差等于信号时变分量的归一化平均功率；



◆ 若 $X(t)$ 的均值和自相关均为历经的，则

$X(t)$ 为宽历经随机过程。

◆ 若 $X(t)$ 的所有统计平均特性和其样函数所

有相应的时间平均特性以概率为1相等，

则 $X(t)$ 为严历经过程。



例 分析随机过程

$Y(t) = A \cos(\omega_c t + X)$ X 在 $(-\pi, \pi)$ 上服从均匀分布。

的平稳性和各态历经性。

因为

$$m_Y(t) = 0$$

$$\begin{aligned} \Gamma_X(t, t + \tau) &= R_X(t, t + \tau) = \int_{-\pi}^{\pi} A \cos(\omega_c t + x) A \cos[\omega_c(t + \tau) + x] \frac{1}{2\pi} dx \\ &= \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \{ \cos(\omega_c \tau) + \cos[\omega_c(2t + \tau) + x] \} dx = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_c \tau) \end{aligned}$$

所以该随机过程是广义平稳的。

例 (续)



又因为:

$$\langle Y(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \cos(\omega_c t + x) dt = 0$$

$$\begin{aligned} \langle y(t)y(t+\tau) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \cos(\omega_c t + x) A \cos[\omega_c (t + \tau) + x] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{A^2}{2} \{ \cos(\omega_c \tau) + \cos[\omega_c (2t + \tau) + 2x] \} dt = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_c \tau) \end{aligned}$$

比较前面的结果, 可见该随机过程具有各态历经性。



2.9 信号的功率密度谱

平稳随机过程的功率谱密度



$$P_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$$

$$P_x(\omega) = E \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E \left[|F_T(\omega)|^2 \right]}{T}$$

$X(t)$ 的功率谱密度

平稳随机信号的功率密度谱



平稳随机信号的相关函数与功率密度谱是一傅氏变换对

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

$$P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

平稳随机信号的功率

$$P_W = \int_{-\infty}^{\infty} P(f) df = \left[\int_{-\infty}^{\infty} P(f) e^{j2\pi f\tau} df \right]_{\tau=0} = R(0) = E[X^2(t)]$$

平稳随机过程功率谱密度的性质



$$P_X(\omega) \geq 0$$

$$R_X(0) = E[X^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_X(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(f) df$$

$$P_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) d\tau$$

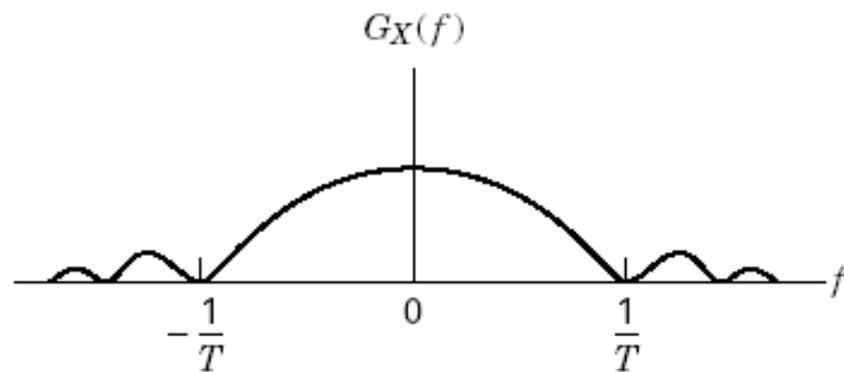
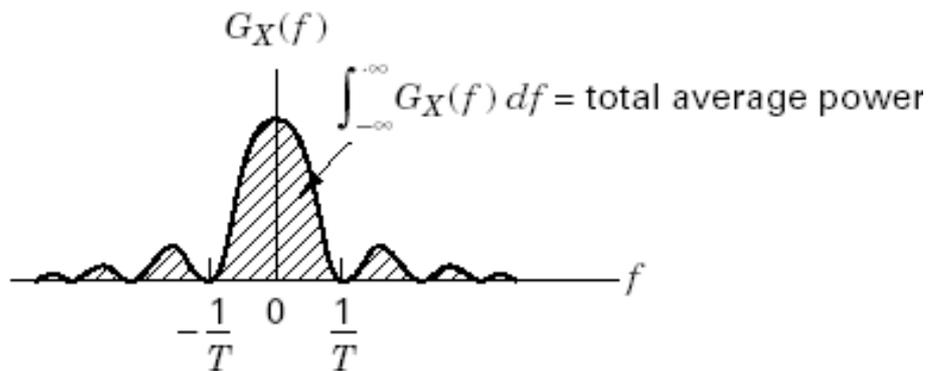
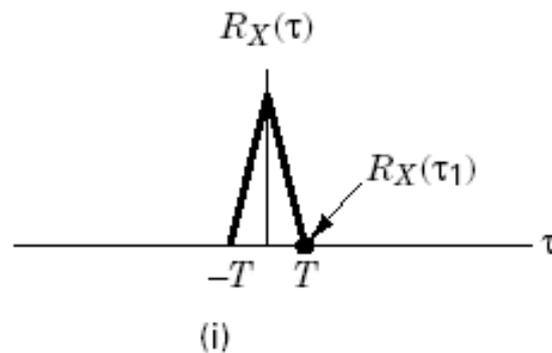
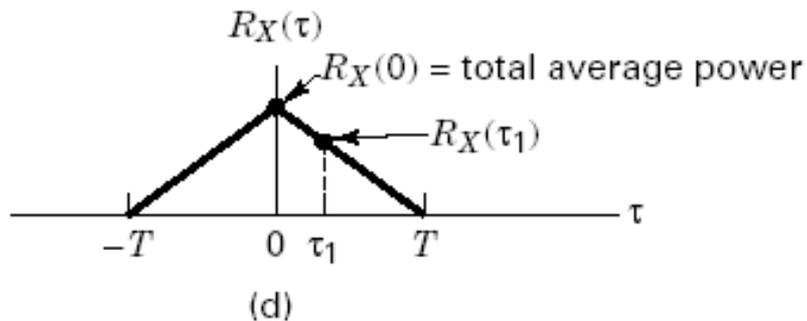
若 $X(t)$ 为实平稳随机过程则 $R_X(\tau)$ 和 $P_X(\omega)$ 均为偶函数

随机信号



随机过程的平稳性

自相关函数与功率谱密度





2.10 通信系统中几种常用的随机过程

高斯随机过程（正态）



定义： 若一随机过程的任意 n 维($n=1,2,\dots$)

概率密度是正态分布式,则称此随机过程为

高斯随机过程。

通信系统中几种常用的随机过程



(1) 高斯随机过程，其概率密度函数

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n; x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Gamma_X|^{\frac{n}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} (X - m_X)^T [\Gamma_X]^{-1} (X - m_X) \right]$$

其中：

$$[\Gamma_X] = E \left\{ \begin{matrix} [X(t_1) - m \\ X(t_2) - m \\ \dots \\ X(t_n) - m] \\ [X(t_1) - m, X(t_2) - m, \dots, X(t_n) - m] \end{matrix} \right\}$$

自协方

差矩阵

$$= \begin{bmatrix} R(0) - m^2 & R(t_1, t_2) - m^2 & \dots & R(t_1, t_n) - m^2 \\ R(t_2, t_1) - m^2 & R(0) - m^2 & \dots & R(t_2, t_{n-1}) - m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R(t_n, t_1) - m^2 & R(t_n, t_2) - m^2 & \dots & R(0) - m^2 \end{bmatrix}$$

性质



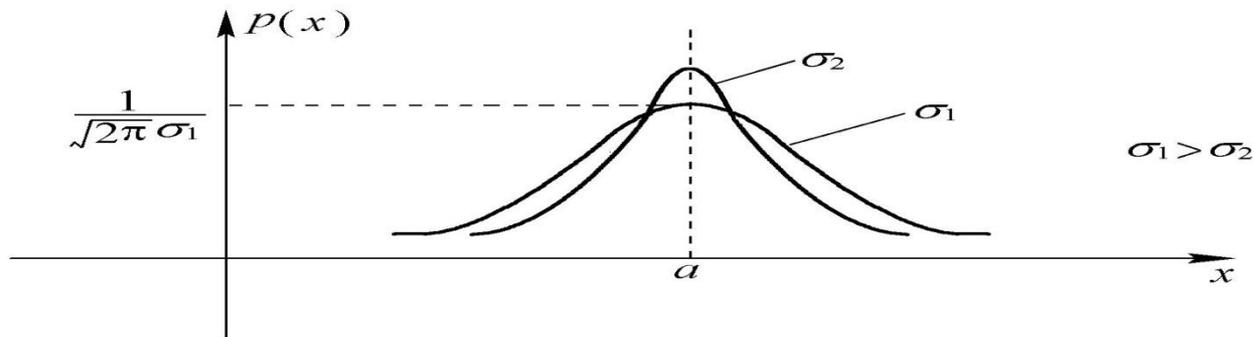
- ◆ 高斯随机过程的统计特性完全由其一阶和二阶数字特征完全确定；
 - 1) 如果高斯过程是宽平稳过程，则其均值、方差与时刻无关，是常数；其 n 维概率密度满足严平稳条件，所以宽平稳的高斯过程就是严平稳的高斯过程。
 - 2) 对于正态随机过程的任何两个时刻的随机变量，不相关也就是统计独立。

一维正态分布



◆一维正态概率密度表示式为

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$



正态概率密度曲线

性质



$$(1) \quad \int_{-\infty}^a p_1(x) dx = \int_a^{\infty} p_1(x) dx = \frac{1}{2}$$

(2) 对称于 a

若 $a=0$, $\sigma=1$, 则称为标准化正态分布, 即

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$



$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

其值通过查表可得

$$\Phi(-x) + \Phi(x) = 1 \quad \Phi(x) \approx \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad x > 3$$

◆ $\Phi(x)$ 为概率积分函数，简称概率积分

◆ 误差函数和互补误差函数

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$$

通信系统中常用的几个特殊函数(续)



(3) $Q(x)$ 函数

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

特殊函数之间的关系



$$\operatorname{erf}(x) = 2\Phi(\sqrt{2}x) - 1$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 2 - 2\Phi(\sqrt{2}x)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$Q(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \Phi(x)$$

线性系统的信号传输



频域传递函数

随机信号有多个甚至无穷多个样本函数，随机信号经过线性系统通常只能用输入输出信号的功率谱密度关系来描述：

$$G_Y(f) = G_X(f) |H(f)|^2$$

高斯随机过程的特点：

高斯过程经线性时不变系统后仍为高斯过程，其幅度取值分布特性可由均值和方差唯一确定；

高斯信号经线性系统后**方差可能会发生变化**。

通信系统中的噪声



自然噪声：热噪声，来自大气、太阳和宇宙的噪声等；

人为噪声：火花塞点火噪声、开关脉冲噪声和电磁辐射干扰等。

◆热噪声的双边功率谱密度为

$$P_R(f) = \frac{2Rh|f|}{[\exp(\frac{h|f|}{KT})]-1} \quad V^2 / Hz$$

◆当负载电阻与热噪声源电阻匹配相联时，在匹配

负载电阻上得到的可获热噪声双边功率谱密度为

$$P_{an}(f) = \frac{KT}{2} = \frac{N_o}{2} \quad W / Hz$$

通信系统中典型的噪声模型：白噪声



白噪声：功率密度谱为常数的一类噪声。通常认为白噪声的幅度取值为高斯分布，所以也称为高斯白噪声。

热噪声其功率密度谱在 $0\sim 10^{12}\text{Hz}$ 范围内是平坦的，可视为是一种白噪声。

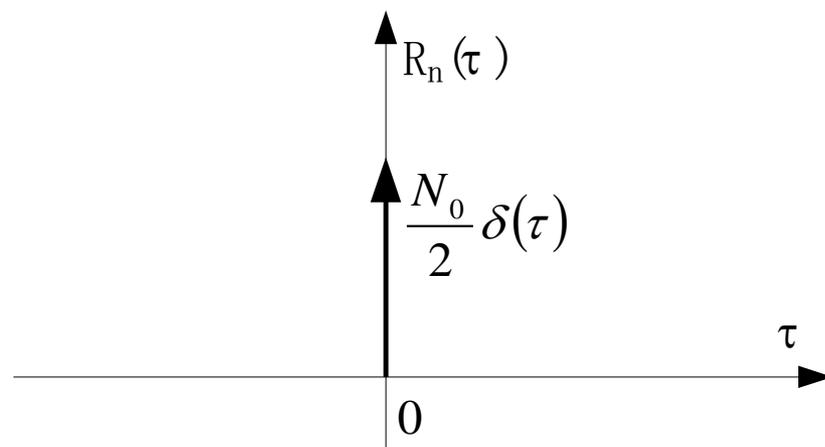
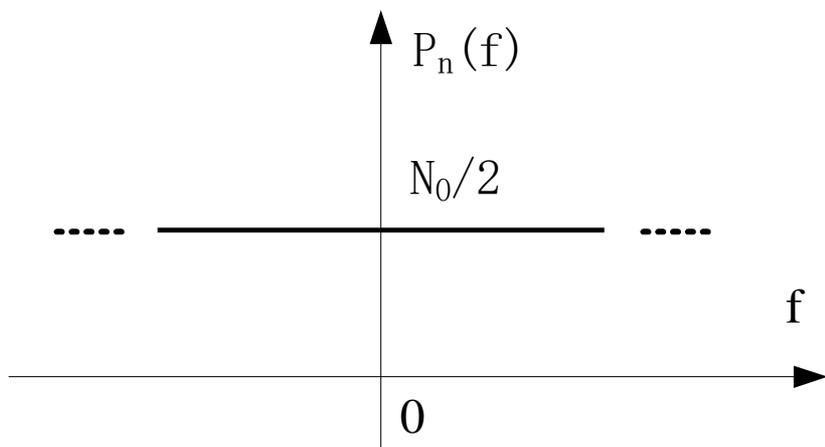
对带宽有限的通信系统，若干扰噪声在带内是平坦的时，可认为噪声是白噪声。

白噪声



满足如下特性随机信号称之。（一种纯随机过程）

$$P_n(f) = \frac{N_0}{2}, \quad -\infty \leq f \leq +\infty \quad R(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$



高斯白噪声:噪声的功率密度谱为常数，幅度取值服从高斯分布。

通信系统中的噪声

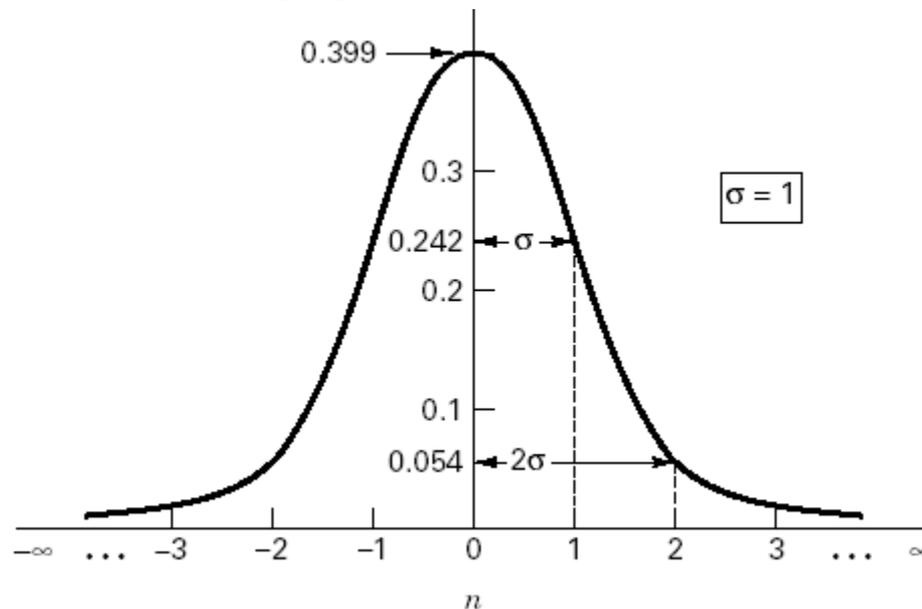


高斯分布随机变量特点: 统计特性由均值和方差唯一确定。

高斯白噪声的分布特性: 均值为0, 方差为 σ , 分布密度函数:

$$p(n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{n}{\sigma} \right)^2 \right]$$

$$P(-3\sigma < 3\sigma) = 0.997$$



Matlab函数randn产生高斯分布的随机变量

高斯白噪声性质



1、若 $X = \int_0^T n(t)\varphi(t)dt$ 其中 $\varphi(t)$ 为确定函数，则 X 为

高斯随机变量，数学期望为0，方差等于

$$\sigma_X^2 = \frac{N_0}{2} \int_0^T \varphi^2(t) dt$$

2、若 $X_1 = \int_0^T n(t)\varphi_1(t)dt$, $X_2 = \int_0^T n(t)\varphi_2(t)dt$



其中 $\varphi_1(t)$ 与 $\varphi_2(t)$ 为确定信号

则
$$E(X_1X_2) = \frac{N_0}{2} \int_0^T \varphi_1(t)\varphi_2(t)dt$$

若 $\varphi_1(t)$ 与 $\varphi_2(t)$ 在 $(0 \sim T)$ 正交, 则 X_1 与 X_2

统计独立

3、限带高斯白噪声, 功率谱密度

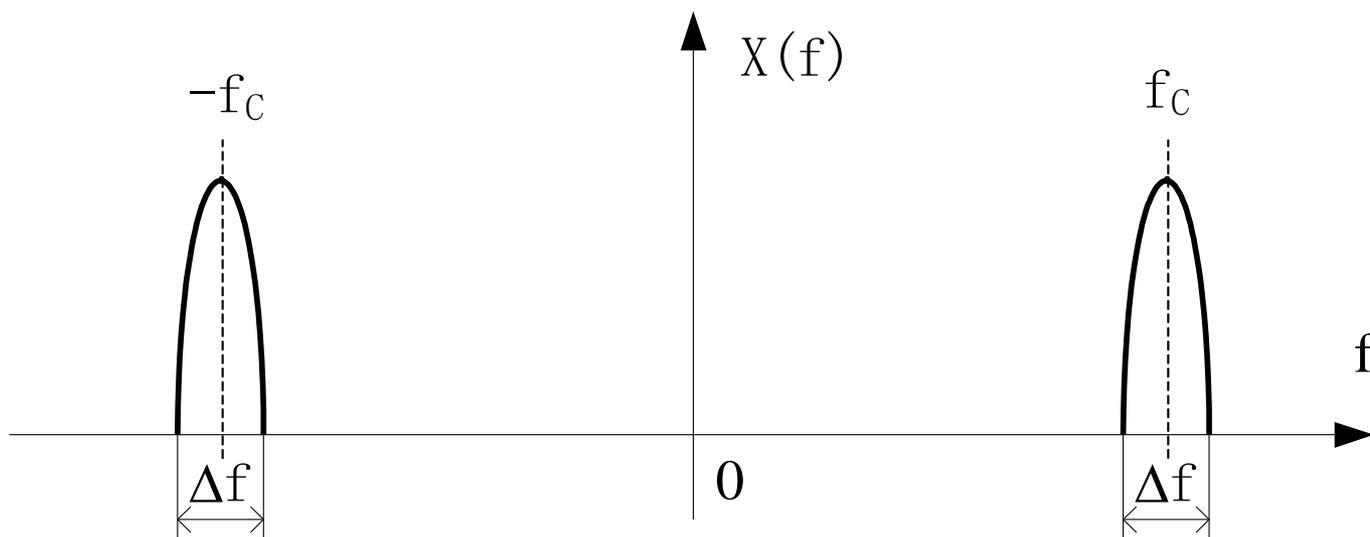
$$P_n(\omega) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & |\omega| \leq \omega_H \\ 0, & |\omega| > \omega_H \end{cases}, \omega_H = 2\pi fH$$

窄带随机过程



信号带宽 Δf 远小于其中心频率 f_c 的随机信号称之。

$$X(t) = a(t) \cos[2\pi f_c t + \varphi(t)]$$



窄带随机过程(续)

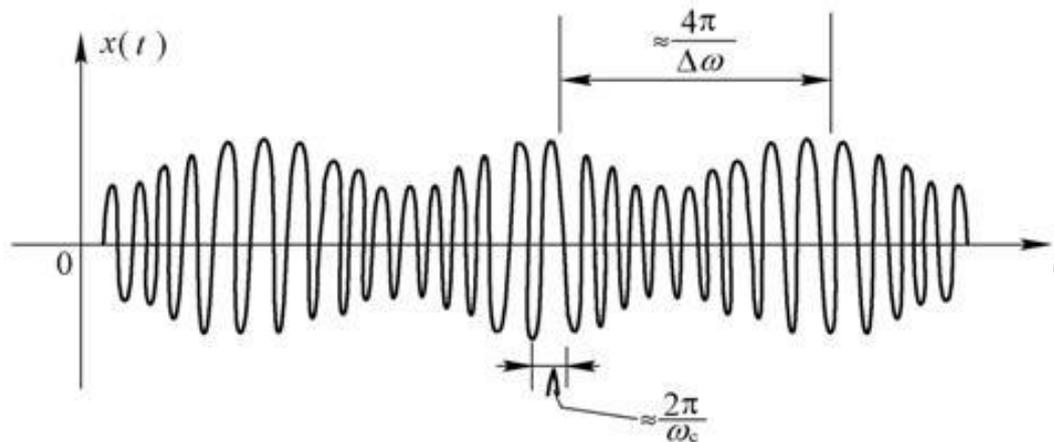


$$X(t) = a(t) \cos[2\pi f_c t + \varphi(t)]$$

$$X(t) = a_c(t) \cos 2\pi f_c t - a_s(t) \sin 2\pi f_c t$$

$$a_c(t) = a(t) \cos \varphi(t) \quad a_s(t) = a(t) \sin \varphi(t)$$

$a_c(t)$ 和 $a_s(t)$ 相对载波 f 来说是低频信号。



窄带平稳随机过程的表示式



$$X(t) = X_c(t) \cos \omega_c t - X_s(t) \sin \omega_c t$$

解析信号

$$Z(t) = X(t) + j\hat{X}(t) = X_L(t)e^{j\omega_c t}$$



(1) $Z(t)$ 的自相关函数

$$R_Z(\tau) = 2[R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)]$$

功率谱密度

$$P_Z(\omega) = 2P_X[1 + \text{sgn}(\omega)] = 4P_X(\omega)u(\omega)$$

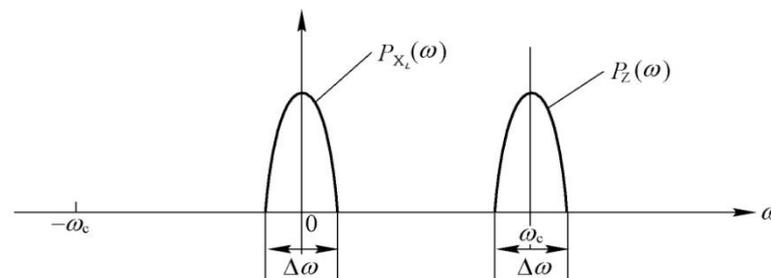


(2) 复包络 $X_L(t)$ 的相关函数

$$R_{X_L}(\tau) = R_Z(\tau)e^{-j\omega_c\tau}$$

功率谱密度

$$P_{X_L}(\omega) = P_Z(\omega + \omega_c)$$



解析信号和复包络的功率谱密度

(3) $X_c(t)$, $X_s(t)$ 的统计特性

$$X_c(t) = X(t)\cos\omega_c t + \hat{X}(t)\sin\omega_c t$$

$$X_s(t) = \hat{X}(t)\cos\omega_c t - X(t)\sin\omega_c t$$

窄带高斯随机过程



$$n_N(t) = n_c(t) \cos 2\pi f_c t - n_s(t) \sin 2\pi f_c t$$

$n_N(t)$ 是均值为0，方差为 σ^2 的高斯随机过程。

其中 $n_c(t)$ 和 $n_s(t)$ 也为均值为0，方差为 σ^2 的高斯过程。

$$\begin{aligned} p_{n_c n_s}(n_c, n_s) &= p_{n_c}(n_c) \cdot p_{n_s}(n_s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{n_c^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{n_s^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{n_c^2 + n_s^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

窄带高斯随机过程(续)



窄带高斯过程的幅度与相位分布特性

$$p_{a_n \varphi_n}(a_n, \varphi_n) = p_{n_C n_S} [n_C(a_n, \varphi_n), n_S(a_n, \varphi_n)] \cdot |J|$$

幅度分布特性：**瑞利分布**

$$p_{a_n \varphi_n}(a_n, \varphi_n) = \frac{a_n}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{a_n^2}{2\sigma^2}\right)$$

相位分布特性：**均匀分布**

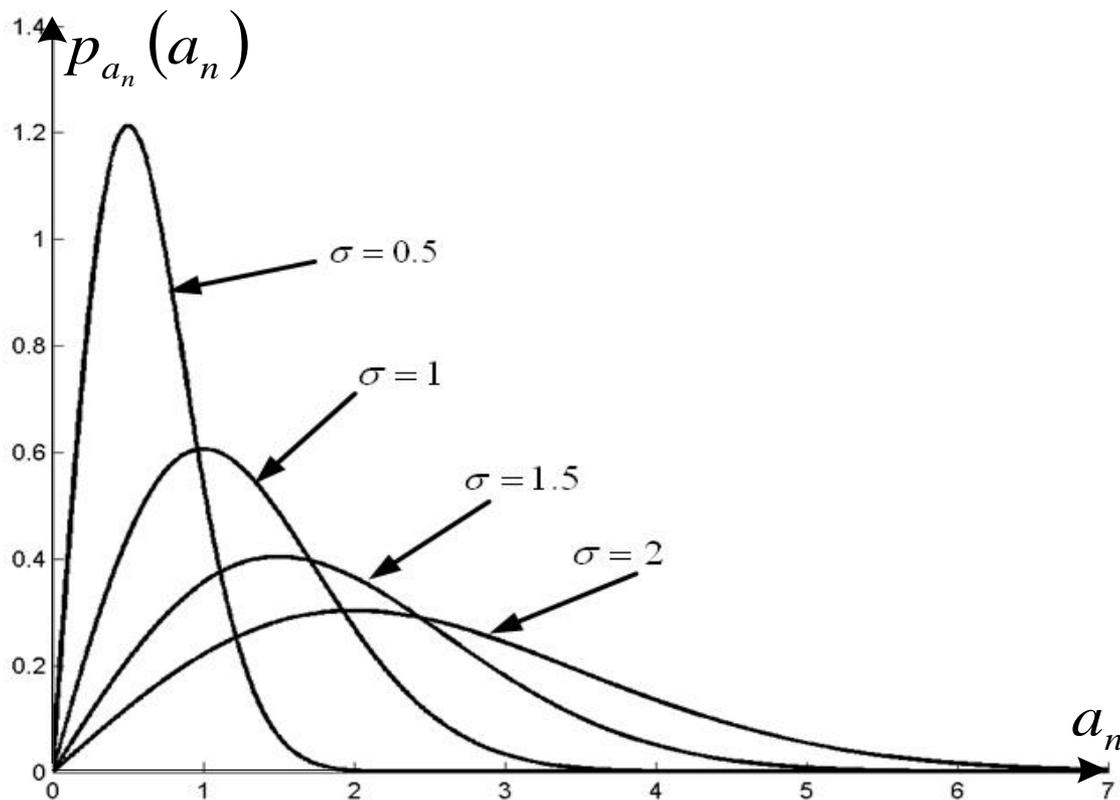
$$p_{\varphi_n}(\varphi_n) = \frac{1}{2\pi} \quad 0 \leq \varphi_n \leq 2\pi$$

幅度的分布与相位的分布统计独立：

$$p_{a_n \varphi_n}(a_n, \varphi_n) = p_{a_n}(a_n) p_{\varphi_n}(\varphi_n)$$

窄带高斯随机过程(续)

其幅度(包络)分布特性：瑞利分布



窄带高斯过程描述了窄带信号经过多个不可分辨的多径反射(散射)后到达接收端的信号特性。

正弦(余弦)信号加窄带高斯随机过程



$$\begin{aligned} X(t) &= A \cos 2\pi f_c t + n_c(t) \cos 2\pi f_c t - n_s(t) \sin 2\pi f_c t \\ &= [A + n_c(t)] \cos 2\pi f_c t - n_s(t) \sin 2\pi f_c t \end{aligned}$$

其中 $n_c(t)$ 和 $n_s(t)$ 为均值为0，方差为 σ^2 的高斯过程。

其分布特性：

$$\begin{aligned} p_{n_c n_s}(n_c, n_s) &= p_{n_c}(n_c) \cdot p_{n_s}(n_s) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(n'_c - A)^2 + n_s^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$



令 $n_c'(t) = A + n_c(t)$ ， 则有

(1) $n_c'(t)$ ， $n_s(t)$ 均为高斯过程且在同时刻相互独立；

(2) $n_c'(t)$ 的均值为 A ， $n_s(t)$ 的均值为 0 ；

(3) $n_c'(t)$ 和 $n_s(t)$ 的方差均为 σ^2 。

正弦(余弦)信号加窄带高斯随机过程(续)



其幅度(包络)与相位的其分布特性:

$$p_{R\theta}(R, \theta) = p_{n'_C n_S} [n'_C((R, \theta)), n_S((R, \theta))] \cdot |J|$$

$$= \frac{R}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{R^2 + A^2 - 2RA \cos \theta}{2\sigma^2}\right)$$

其中幅度

$$R \geq 0$$

相位

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

正弦(余弦)信号加窄带高斯随机过程(续)



其幅度(包络)分布特性：**莱斯分布**

$$\begin{aligned} p_R(R) &= \int_0^{2\pi} p_{R\theta}(R, \theta) d\theta \\ &= \frac{R}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{R^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{RA}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

其中

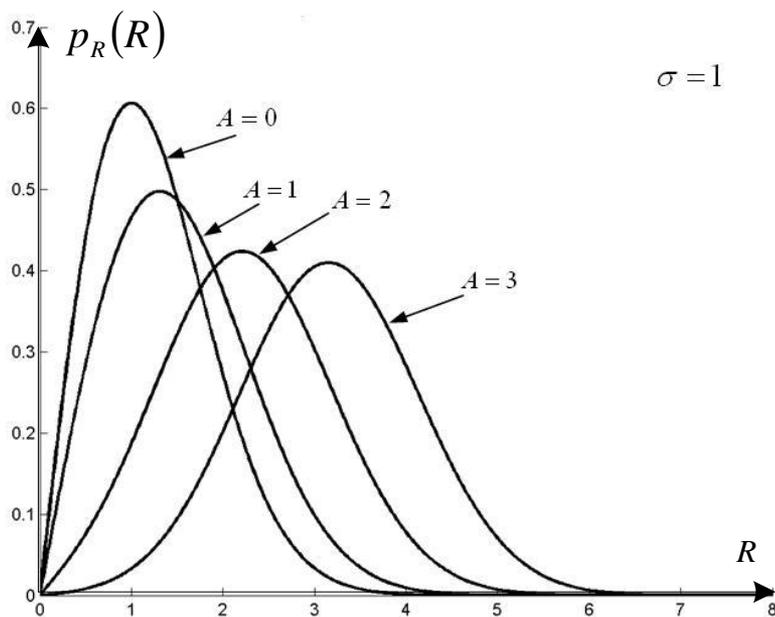
$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(x \cos \theta) d\theta$$

称为**零阶修正的贝塞尔函数**，该函数的取值可通过查找贝塞尔函数表得到。

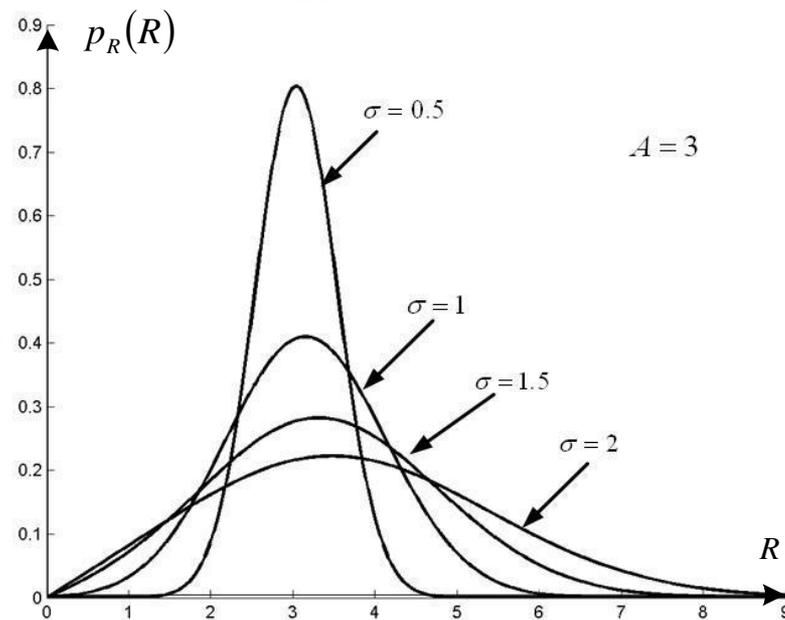
正弦(余弦)信号加窄带高斯随机过程(续)



其幅度(包络)分布特性：莱斯分布



(a)



(b)

当 $A=0$ ，莱斯分布退化为瑞利分布。

正弦(余弦)信号加窄带高斯随机过程(续)



其相位分布特性:

$$p_{\theta}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{A^2 \sin^2 \theta}{2\sigma^2}\right) \frac{\sqrt{2\pi} A \cos \theta}{\sigma} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{A \cos \theta}{\sigma}\right)\right)$$

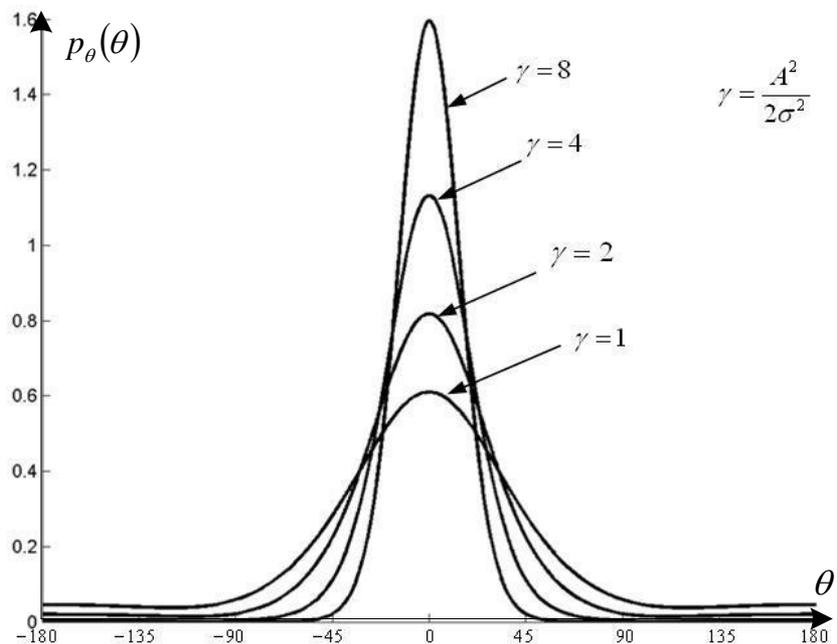
若 $A \rightarrow 0$, $p_{\theta}(\theta) \rightarrow \frac{1}{2\pi}$ 其相位退化为均匀分布

若 $A \uparrow$, $p_{\theta}(\theta) \rightarrow$ 高斯分布, 其均值由正弦(余弦)信号决定。

正弦(余弦)信号加窄带高斯随机过程(续)



不同的信噪比 $\gamma = \frac{A^2}{2\sigma^2}$ 下的相位分布特性:



信噪比很大时，相位基本由正弦(余弦)信号决定；
信噪比变小时，相位分布趋于随机的均匀分布。

正弦(余弦)信号加窄带高斯随机过程(续)



正弦(余弦)信号加窄带高斯过程描述了窄带信号经过多个不可分辨的多径反射过程到达接收端时的信号特性，在这些信号中，有其中一径特别强的信号。

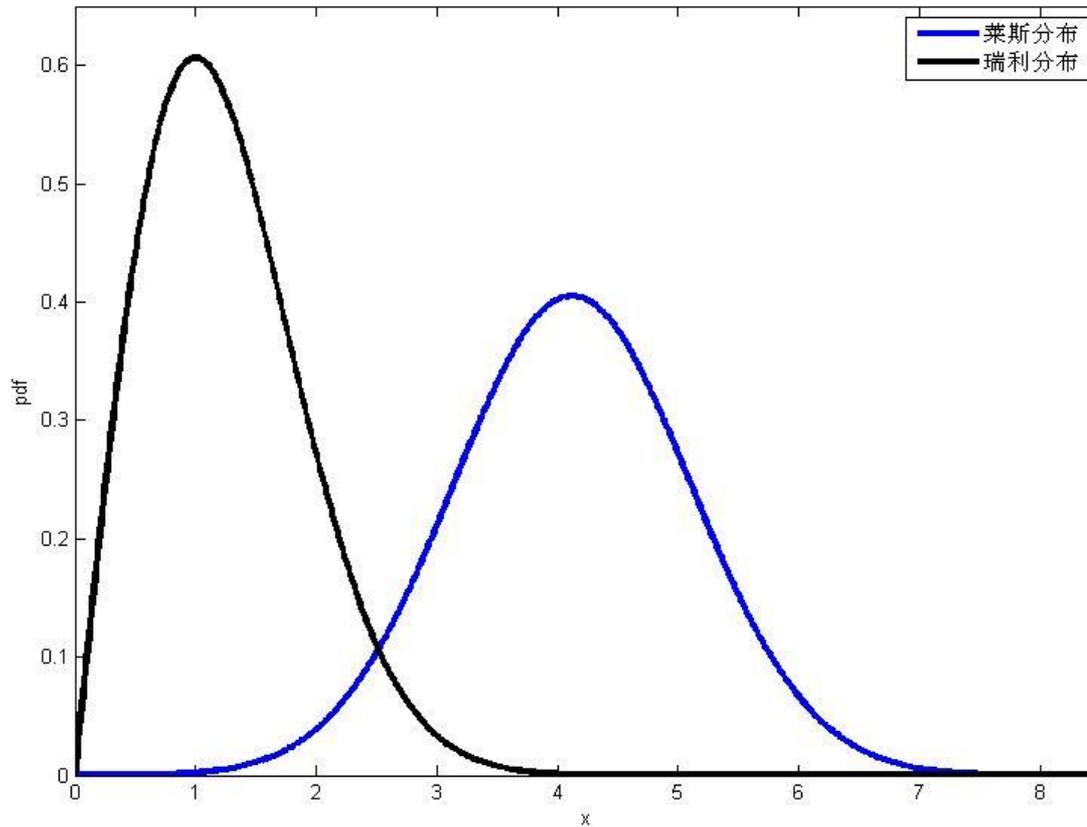
该特别强的信号通常是信号中直达的视距信号。

瑞利分布与莱斯分布的比较



瑞利分布: $\sigma=1$ 莱斯分布: $\sigma=1, A=4$

瑞利分布与莱斯分布概率密度函数



窄带平稳随机过程Matlab代码



```
N0=1;      %双边功率谱密度
fc=10;     %中心频率
B=1;      %带宽

dt=0.01;
T=100;
t=0:dt:T-dt;
%产生功率为N0*B的高斯白噪声
P = N0*B;
st = sqrt(P)*randn(1,length(t));
%将上述白噪声经过窄带带通系统,
[f,sf] = T2F(t,st);      %高斯信号频谱
figure(1)
plot(f,abs(sf));      %高斯信号的幅频特性

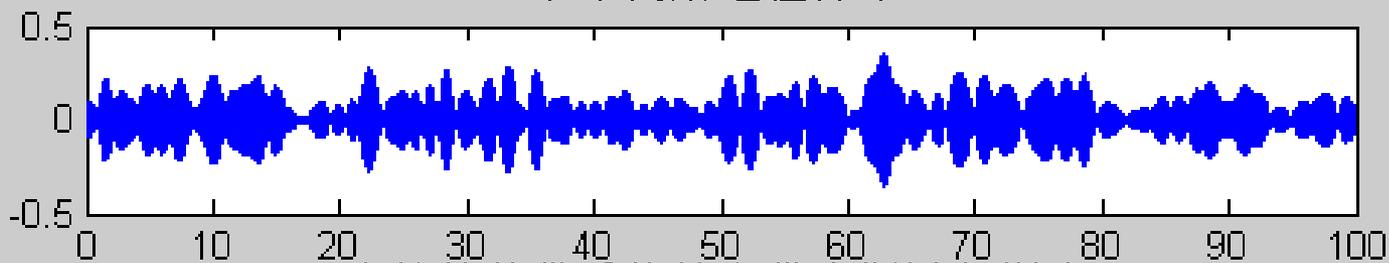
[tt gt]=bpf(f,sf,fc-B/2,fc+B/2);      %高斯信号经过带通系统

glt = hilbert(real(gt));      %窄带信号的解析信号, 调用hilbert函数得到解析信号
glt = glt.*exp(-j*2*pi*fc*tt);

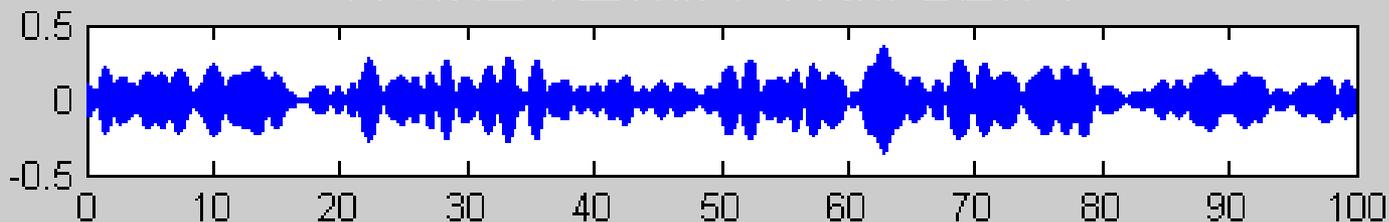
[ff,glf]=T2F( tt, glt );
```



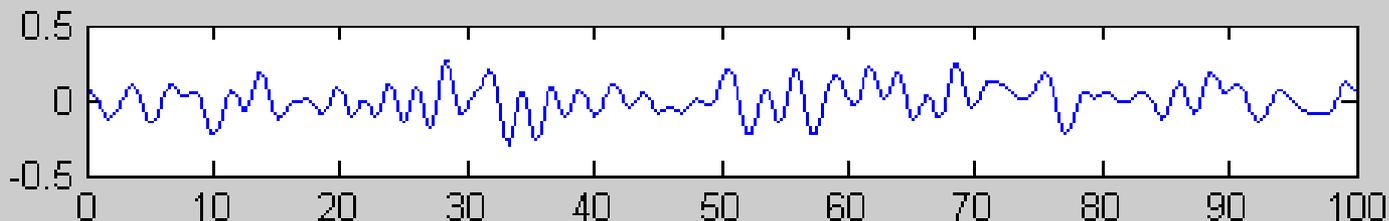
窄带高斯过程样本



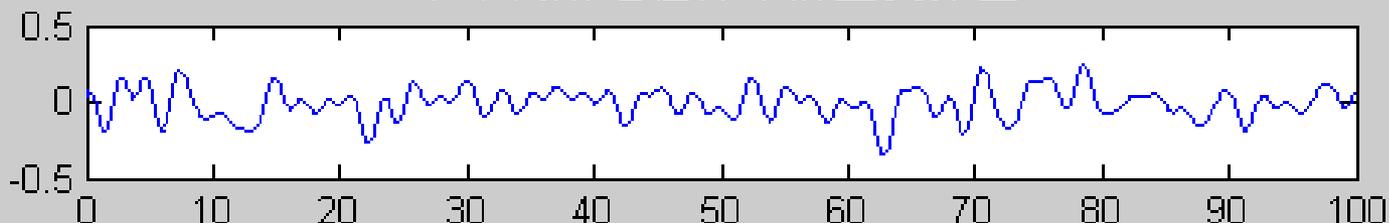
由等效基带重构的窄带高斯过程样本



窄带高斯过程样本的同相分量



窄带高斯过程样本的正交分量



时间t(秒)



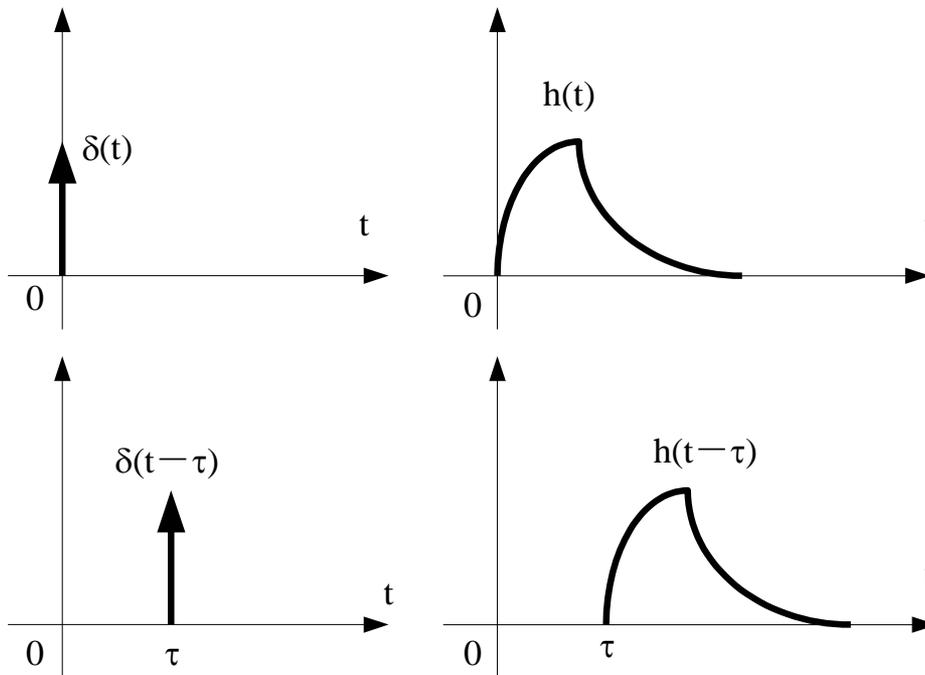
2.11 平稳随机过程与时不变线性系统

平稳随机过程与线性时不变系统

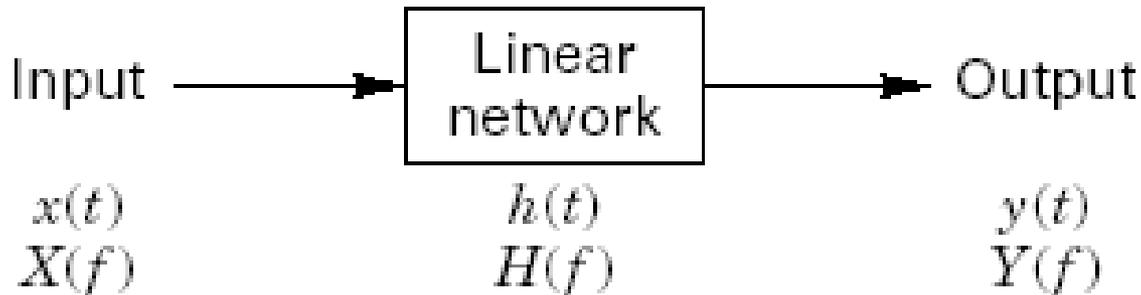


线性时不变系统:

$$h(t, \tau) = h(t - \tau)$$



线性系统的信号传输



图中 $h(t)$ 是线性系统的冲激响应， $y(t)$ 是输出。

一般地，有：

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

对因果系统：

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

线性系统的信号传输



1. 频域传递函数

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

传递函数可表示为:

$$H(f) = |H(f)| e^{j\theta(f)}$$

其中: 幅频特性

相频特性

$$|H(f)| \qquad \theta(f) = \tan^{-1} \frac{\text{Im} \{H(f)\}}{\text{Re} \{H(f)\}}$$

对输入的单频信号 $x(t) = A \cos 2\pi f_0 t$

有: $y(t) = A |H(f_0)| \cos [2\pi f_0 t + \theta(f_0)]$

可见, 传递函数的幅频与相频特性的物理意义明显。

1. 随机过程 $Y(t)$ 的均值(统计平均)



$m_Y(t) = m_X H(0) = m_Y$ 与 t 无关。其中:

$$H(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) du$$

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E[Y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)X(\tau)d\tau\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)E[X(\tau)]d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)m_X(\tau)d\tau \end{aligned}$$

2. 随机过程 $Y(t)$ 的自相关函数



$R_Y(t_1, t_2) = R_Y(\tau)$ 与 t 无关。

可见, $Y(t)$ 为平稳随机过程。

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_2) &= E[Y(t_1)Y(t_2)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t_1 - \tau_1)X(\tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - \tau_2)X(\tau_2)d\tau_2\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1 - \tau_1)h(t_2 - \tau_2)E[X(\tau_1)X(\tau_2)]d\tau_1d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1 - \tau_1)h(t_2 - \tau_2)R_X(\tau_1, \tau_2)d\tau_1d\tau_2 \end{aligned}$$

$$u_1 = t_1 - \tau_1 \quad u_2 = t_2 - \tau_2$$

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u_1)h(u_2)R_X(t_1 - u_1, t_2 - u_2)du_1du_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u_1)h(u_2)R_X(u_1 - u_2 + t_2 - t_1)du_1du_2 = R_Y(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

平稳随机过程与线性时不变系统



平稳随机信号经线性系统输出的统计特性：

均值：

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) m_X(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) m_X(t-u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(u) m_X du = m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(u) du = m_X H(0) \end{aligned}$$

相关函数：

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u_1) h(u_2) R_X(t_1 - u_1, t_2 - u_2) du_1 du_2 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u_1) h(u_2) R_X(u_1 - u_2 + t_2 - t_1) du_1 du_2 &= R_Y(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

平稳随机信号经线性系统后保持其平稳特性。

3. $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关函数与互功率谱密度



$$R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(\tau)$$

$X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互功率谱密度

$$R_{XY}(\omega) = F[R_X(\tau)]F[h(\tau)] = P_X(\omega)H(\omega)$$

4. $Y(t)$ 的功率谱密度

$$P_X(\omega) \Leftrightarrow R_Y(\omega) \quad P_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 P_X(\omega)$$

$$P_{\hat{X}}(\omega) = P_X(\omega) \quad R_{\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau)$$

平稳随机过程与线性时不变系统(续)



平稳随机信号经线性系统输出的信号功率谱密度：

$$\begin{aligned} P_Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u_1) h(u_2) R_X(u_1 - u_2 + \tau) du_1 du_2 \right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= H(f) H^*(f) P_X(f) = |H(f)|^2 P_X(f) \end{aligned}$$

示例：高斯白噪声经线性系统后的功率密度谱：

$$P_N(f) = |H(f)|^2 P_{N_0}(f) = |H(f)|^2 \frac{N_0}{2}$$

一般不再具备白噪声的特性。

$Y(t)$ 的概率密度



◆(1) 若 $X(t)$ 是正态随机过程，则 $Y(t)$ 也是正态随机过程。

◆(2) 若过程 $X(t)$ 带宽 $\Delta\omega_x \gg \Delta\omega$ (系统带宽)，则
： $Y(t)$ 趋于高斯过程(正态过程)。

信号经过线性系统后输出不失真的条件



信号不失真的含义：信号经过系统后只有幅度和时延的变化

原信号

$$x(t)$$

经线性系统后没有失真的信号（只有倍数的变化和时延）

$$y(t) = kx(t - \tau_0)$$

无失真线性系统的冲激响应和频率特性

$$y(t) = kx(t - \tau_0) \rightarrow h(t) = k\delta(t - \tau_0)$$

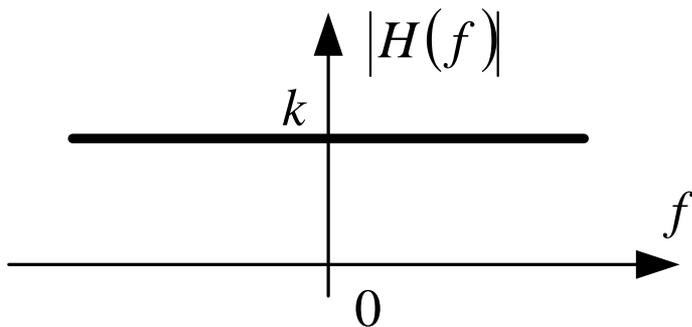
$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} k\delta(t - \tau_0)e^{-j2\pi ft} dt = ke^{-j2\pi f\tau_0}$$

无失真线性系统的冲激响应和频率特性



幅频特性

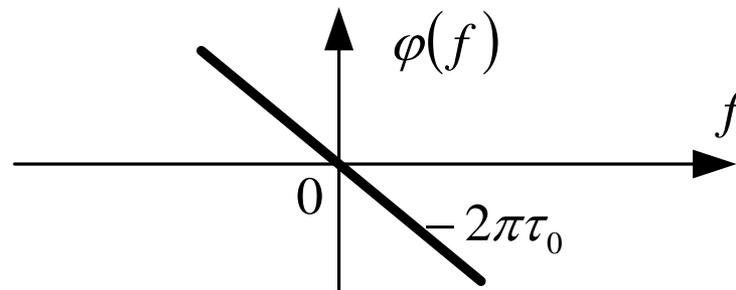
$$|H(f)| = k$$



(a) 幅频特性

相频特性

$$\varphi(f) = -2\pi f \tau_0$$



(b) 相频特性

信号经过线性系统后的群时延特性



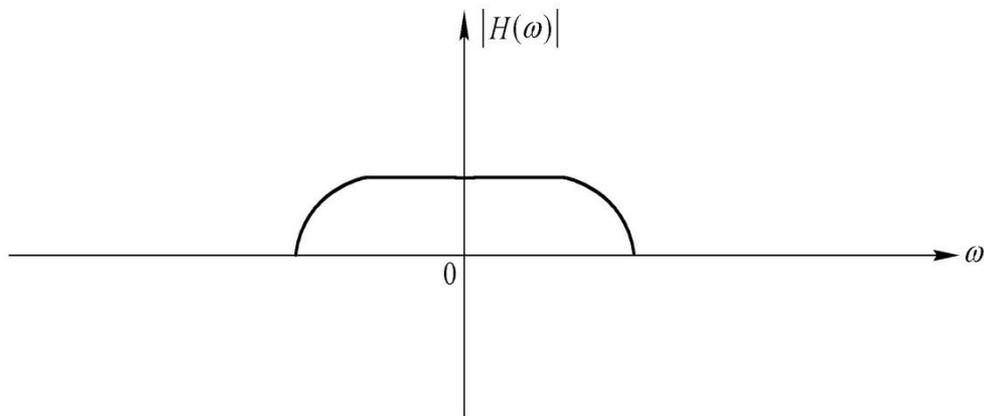
群时延特性： 信号经过系统后不同频率成分的时延特性

$$\tau_G(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(f)}{df}$$

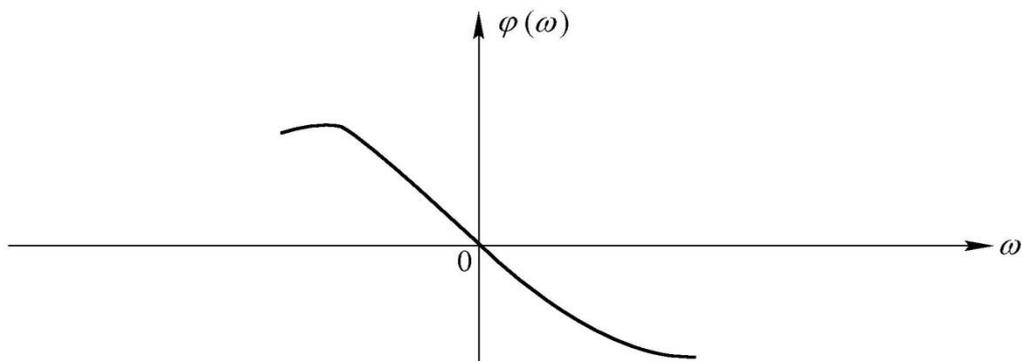
线性无失真系统的群时延特性

$$\tau_G(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(f)}{df} = -\frac{d(-2\pi f\tau_0)}{df} = \tau_0$$

各种频率成分经过系统后时延相同。



实际系统的幅-频特性



实际系统的相-频特性

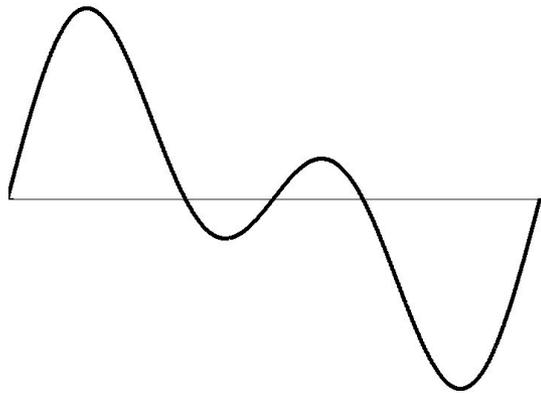
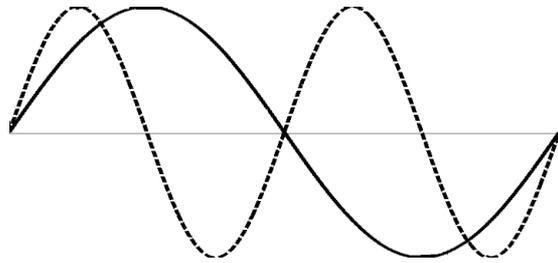


- ◆ 由于系统特性 $H(\omega)$ 不理想引起的信号失真称为**线性失真**。线性失真包括幅度失真和相位失真。
- ◆ 由于系统的幅-频特性不理想引起的信号失真称为**幅度失真**。
- ◆ 由于系统的相-频特性不理想引起的信号失真称为**相位失真**。

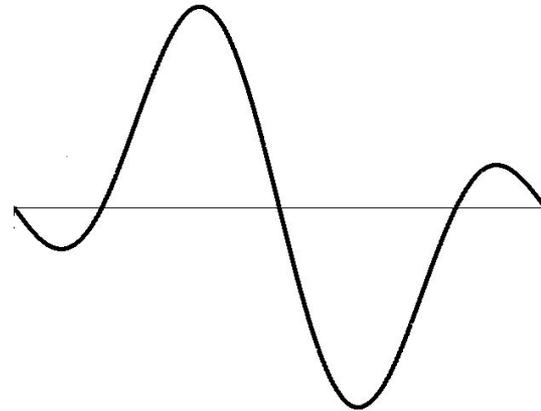
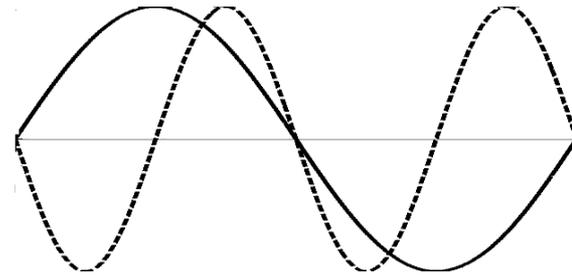
信号经过线性系统后的群时延特性



不同频率成分传输时延不同的系统示例1



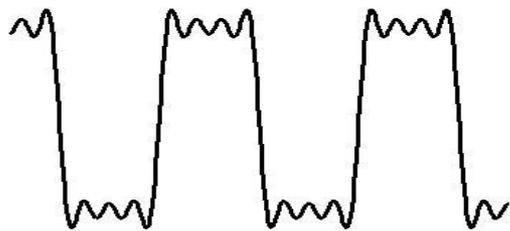
基波与二次谐波时延相同情形



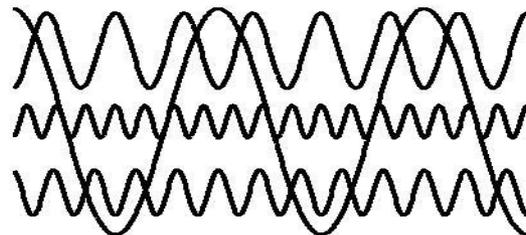
基波与二次谐波时延不同时情形

同样频率成分、不同相位的信号组合获得的波形显著不同。

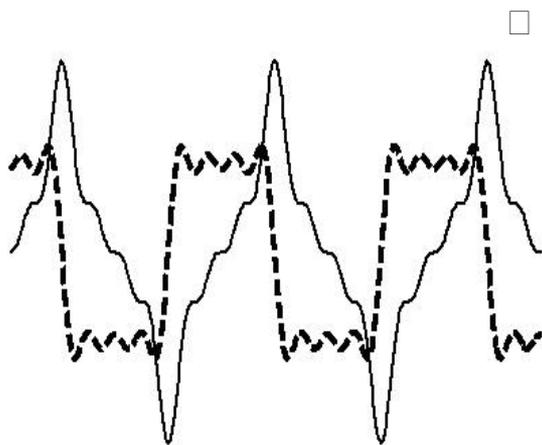
示例2



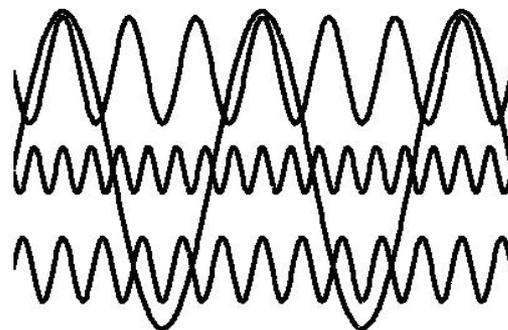
(a) 周期方波信号



(b) 周期方波信号的分解

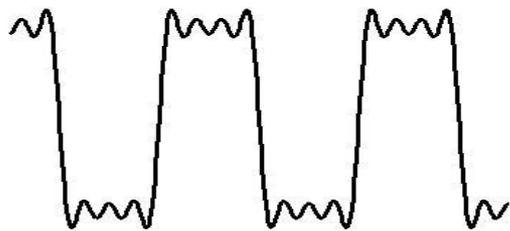


(c) 群时延非常数时信号的畸变

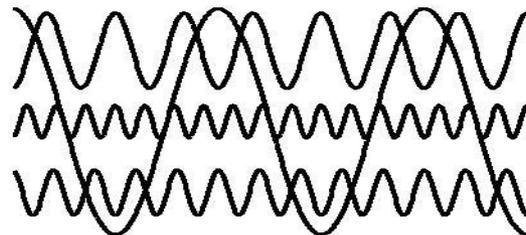


(d) 发生畸变信号的分解

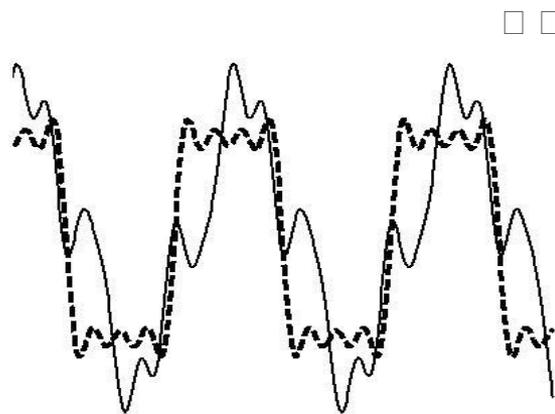
示例3



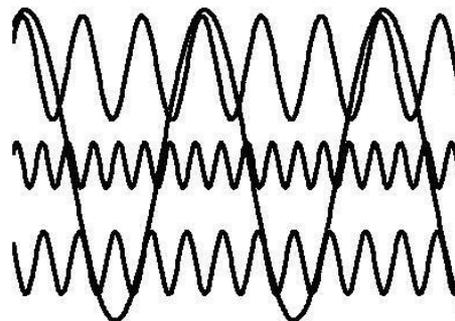
(a) 周期方波信号



(b) 周期方波信号的分解



(e) 群时延非常数时信号的畸变



(f) 发生畸变信号的分解

高斯随机信号经过线性系统后的统计特性



高斯随机信号经过线性系统后仍为高斯随机信号；

可根据高斯随机信号的均值和方差可确定其全部统计特性；

高斯随机信号经线性系统后一般均值和方差会发生变化。



2.12 循环平稳随机过程



循环平稳随机过程



- ◆ 若随机过程 $X(t)$ 的统计平均值(数学期望)和自相关函数是时间的周期函数, 则 $X(t)$ 称作周期平稳随机过程或循环平稳随机过程 (Cyclostationary Processes)。

循环平稳随机过程



对于广义平稳随机序列: $\{a_n\} \quad a_n \in \{A_m, m=1,2,\dots,M\}$

均值 $m_a = E(a_n)$

相关函数 $R_a(n, n+k) = E(a_n^* a_{n+k}) = R_a(k)$

广义平稳随机序列对特定脉冲波形加权后形成的信号:

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT)$$

因为

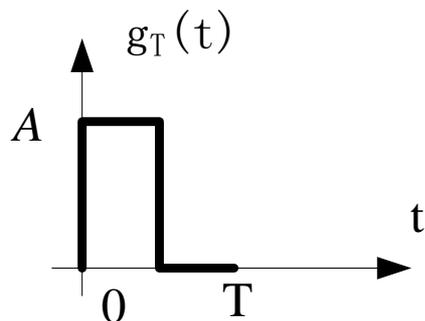
$$\begin{aligned} E[X(t)] &= E\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(a_n) g_T(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_a g_T(t - nT) = m_a \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_T(t - nT) \end{aligned}$$

所以 $X(t)$ 一般不再具有广义平稳性。

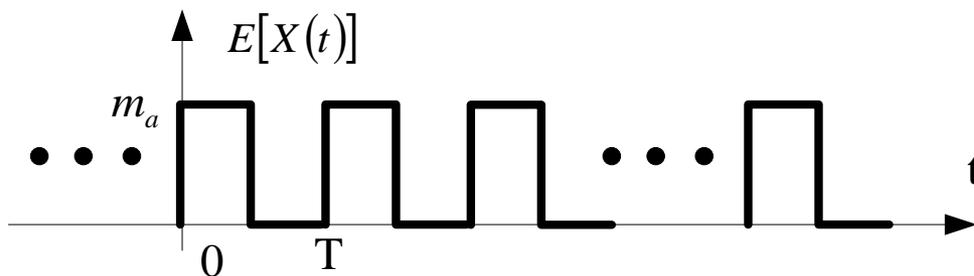
广义平稳随机序列经特定脉冲波形加权后形成的信号(续)



假定脉冲信号的波形为



均值 $E[X(t)]$ 和相关函数均是一周期信号，称其为循环平稳随机过程



该信号不满足平稳随机信号对均值和相关函数所要求的条件。

循环平稳随机过程的统计特性



1. $X(t)$ 的均值 $E[X(t)]$ 是 t 的周期函数，周期等于 T 。
2. $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(t, t + \tau)$ 是 t 的周期函数，周期等于 T 。
3. $X(t)$ 的平均功率谱密度

$$\overline{R_X(t, t + \tau)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_X(t, t + \tau) dt = \overline{R_X(\tau)}$$

$$P_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{R_X(\tau)} e^{-j\omega\tau} d\tau$$

证明数字PAM信号是循环平稳过程



◆ $S(t)$ 的均值

$$E[X(t)] = E\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t-nT)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(a_n) g_T(t-nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_a g_T(t-nT) = m_a \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_T(t-nT)$$

◆ $S(t)$ 的自相关函数

$$R_s(t+T_s+\tau, t+T_s) = R_s(t+\tau, t)$$

$$R_x(t, t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E(a_n a_m) g_T(t-nT) g_T(t+\tau-mT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m-n) g_T(t-nT) g_T(t+\tau-mT)$$

$$R_x(t+T, t+T+\tau) = E[X(t+T)X(t+T+\tau)]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m-n) g_T(t+T-nT) g_T(t+T+\tau-mT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m-n) g_T(t-(n-1)T) g_T(t+\tau-(m-1)T)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a((m-1)-(n-1)) g_T(t-(n-1)T) g_T(t+\tau-(m-1)T)$$

$$= \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \sum_{m'=-\infty}^{\infty} R_a(m'-n') g_T(t-n'T) g_T(t+\tau-m'T)$$

$$= R_x(t, t+\tau)$$

广义平稳随机序列经特定脉冲波形加权后形成的信号(续)



定义循环平稳随机过程的平均自相关函数

$$\overline{R_X(t, t + \tau)} \triangleq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_X(t, t + \tau) dt = \bar{R}_X(\tau)$$

由此可估计信号的平均功率密度谱

$$P_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{R}_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

通信系统中大多数信号都可看作为循环平稳随机信号。

求循环平稳过程 $s(t)$ 的功率谱密度



◆ 平均自相关函数

$$\overline{R_X(t, t + \tau)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_X(t, t + \tau) dt = \bar{R}_X(\tau)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_X(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_X(t, t + \tau) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E[X(t)X(t + \tau)] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E(a_n a_m) g_T(t - nT) g_T(t + \tau - mT) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m - n) g_T(t - nT) g_T(t + \tau - mT) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m'=-\infty}^{\infty} R_a(m') \int_{-\infty}^{\infty} g_T(t) g_T(t + \tau - m'T) dt \end{aligned}$$

$$\bar{R}_s(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) R_g(\tau - mT_s)$$

$$R_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g_T(t) g_T(t + \tau - mT_s) dt$$



$$P_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{R_X}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) R_g(\tau - mT) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) e^{-j2\pi f m T} \int_{-\infty}^{\infty} R_g(\tau - mT) e^{-j2\pi f(\tau - mT)} d\tau$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) e^{-j2\pi f m T} \int_{-\infty}^{\infty} R_g(\tau') e^{-j2\pi f\tau'} d\tau'$$

$$= \frac{1}{T} P_a(f) |G_T(f)|^2$$

$$|G_T(f)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R_g(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$P_a(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) e^{-j2\pi f m T_s}$$

广义平稳随机序列经特定脉冲波形加权后形成的信号(续)



循环平稳随机信号的平均功率密度谱计算

$$\begin{aligned} P_X(f) &= \frac{1}{T} P_a(f) |G_T(f)|^2 \\ &= \frac{1}{T} \left[\sigma_a^2 + \frac{m_a^2}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) \right] |G_T(f)|^2 \\ &= \frac{1}{T} \sigma_a^2 |G_T(f)|^2 + \frac{m_a^2}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) \left| G_T\left(\frac{m}{T}\right) \right|^2 \end{aligned}$$

其中： $m_a = E(a_n)$ $\sigma_a^2 = E\left[(a_n - m_a)^2\right]$

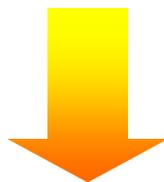
$$g_T(t) \Leftrightarrow G_T(f)$$



◆在随机序列 $\{a_n\}$ 是实的，且符号之间互不相关

的情况下 $P_a(f)$ 的计算：

$$R_a(m) = \begin{cases} \sigma_a^2 + m_a^2 & m = 0 \\ m_a^2 & m \neq 0 \end{cases}$$



$$P_a(f) = \sigma_a^2 + m_a^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f_m T_s} = \sigma_a^2 + \frac{m_a^2}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T_s}\right)$$



◆ 在随机序列 $\{a_n\}$ 的各符号之间互不相关的条件下发送MPAM信号的功率谱密度为

$$P_s(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s} |G_T(f)|^2 + \frac{m_a^2}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |G_T(\frac{m}{T_s})|^2 \delta(f - \frac{m}{T_s})$$



2.13 匹配滤波器



匹配滤波器

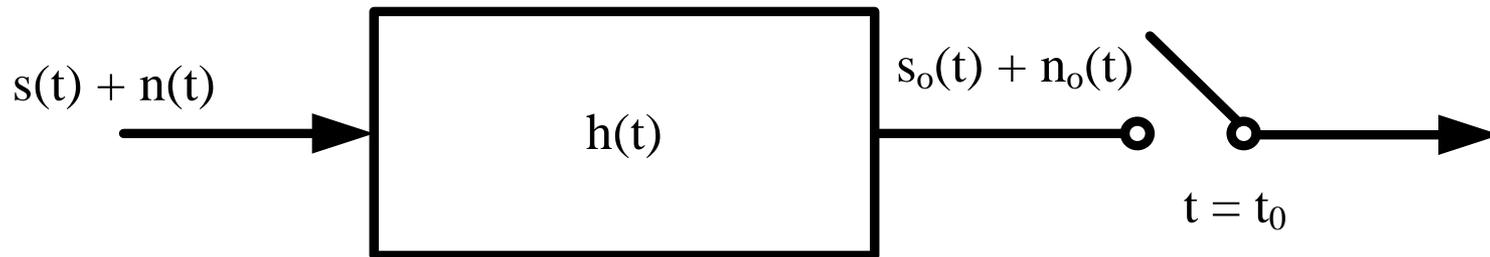


信号的最佳接收问题

接收信号： $x(t)=s(t)+n(t)$

其中有用信号： $s(t)$ 噪声： $n(t)$

接收滤波器输出信号形式 $y(t)=s_o(t)+n_o(t)$



接收滤波器 $h(t)$ 应该具有何种形式对信号接收最有利？

信号的最佳接收



使判决时刻信噪比达到最大意义上的最佳接收

$$\text{由 } s(t) \Leftrightarrow S(f) \quad h(t) \Leftrightarrow H(f)$$

输出信号部分 $s_o(t) \Leftrightarrow S_o(f)$

$$s_o(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_o(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) S(f) e^{j2\pi ft} df$$

输出噪声部分（噪声功率）

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 P_n(f) df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

信号的最佳接收(续)



$t=t_0$ 时刻, 滤波器输出信噪比

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{t=t_0} = \frac{s_o^2(t_0)}{N} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft_0} df\right|^2}{(N_0/2)\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df}$$

由数学上的许瓦兹不等式

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(x)dx\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(x)|^2 dx$$

仅当

$$f_2(x) = k \cdot f_1^*(x) \text{ 时, 等号成立。}$$

信号的最佳接收(续)



利用许瓦兹不等式，当匹配滤波器具有形式：

$$H(f) = k \cdot S^*(f) e^{-j2\pi ft_0}$$

时，输出信噪比达到最大

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) S(f) e^{j2\pi ft_0} df \right|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| k \cdot S^*(f) e^{-j2\pi ft_0} \right|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} \left| S(f) e^{j2\pi ft_0} \right|^2 df \\ &= k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| S^*(f) \right|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} \left| S(f) \right|^2 df = k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| S(f) \right|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} \left| S(f) \right|^2 df \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left| H(f) \right|^2 df &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| k \cdot S^*(f) e^{-j2\pi ft_0} \right|^2 df = k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| S(f) \right|^2 df \end{aligned}$$



$$\max \left(\frac{S}{N} \right)_{t=t_0} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) S(f) e^{j2\pi f t_0} df \right|^2}{(N_0/2) \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df}{(N_0/2)} = \frac{2E_S}{N_0}$$

其中 $E_S = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_0^T |s(t)|^2 dt$

是一个码元的能量。

当采用匹配滤波器时，判决时刻滤波器输出信噪比的大小（“与波形的形状无关”）取决于输入信号的能量E与噪声功率密度谱 $N_0/2$ 。

信号的最佳接收(续)



匹配滤波器的时域表达形式

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} [kS^*(f) e^{-j2\pi ft_0}] e^{j2\pi ft} df \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right]^* e^{-j2\pi f(t_0-t)} df \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f(\tau-t_0-t)} df \right] s^*(\tau) d\tau \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_0 + t) s^*(\tau) d\tau = ks^*(t_0 - t) \end{aligned}$$

对于实信号 $s(t)$ ，其匹配滤波器的冲激响应

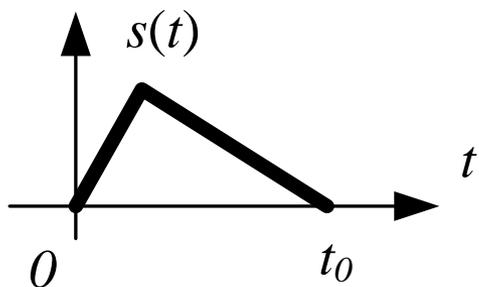
$$h(t) = ks(t_0 - t)$$

信号的最佳接收(续)

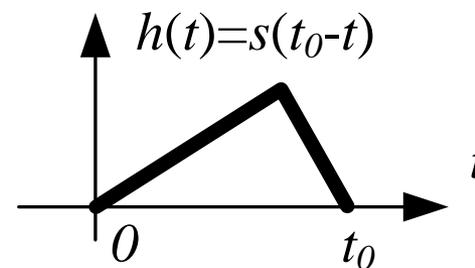
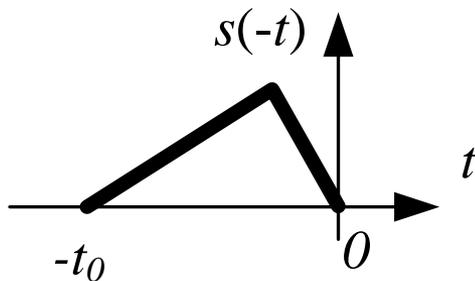


匹配滤波器的时域冲激响应与输入信号间的关系

示例1:



信号

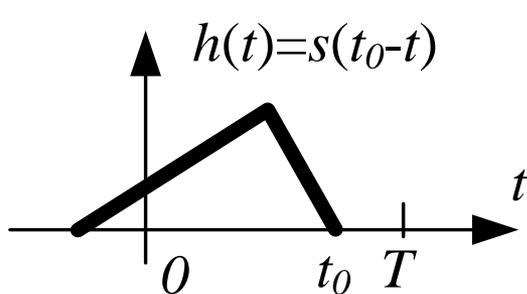


匹配滤波器冲激响应

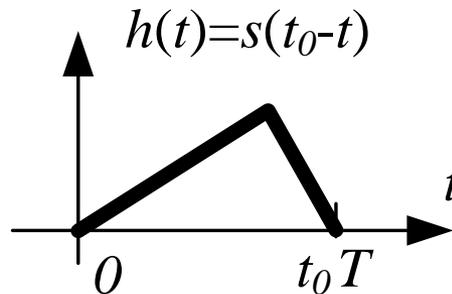
信号的最佳接收(续)



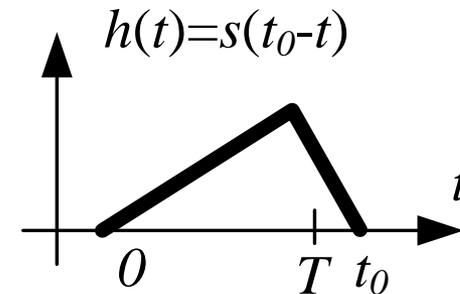
匹配滤波器时间参数的选择



(a) $t_0 < T$



(b) $t_0 = T$



(c) $t_0 > T$

- (a) 物理不可实现；
- (b) 恰好全部信号能量到达；
- (c) 影响下一个符号信号的接收。

因此通常取： $t_0 = T$ ，为一个码元的周期。

匹配滤波器



匹配滤波器的“匹配”有如下的涵义：

- a. $|H(f)|$ 正比与 $|S(f)|$ ，在信号频率分量较小的区域，滤波器的幅频特性也较小，因此有较好的抑制噪声的作用；
- b. 在各频率成分上，滤波器可对信号分量的相位进行调整，使信号分量在 $t=T$ 时达到最大；
- c. 若噪声功率密度谱是非均匀分布的，则有：

$$H(f) = k \frac{S^*(f)}{\Phi_n(f)} e^{-j2\pi fT}$$

匹配滤波器的幅频特性与此噪声功率密度谱成反比，有利于抑制噪声。

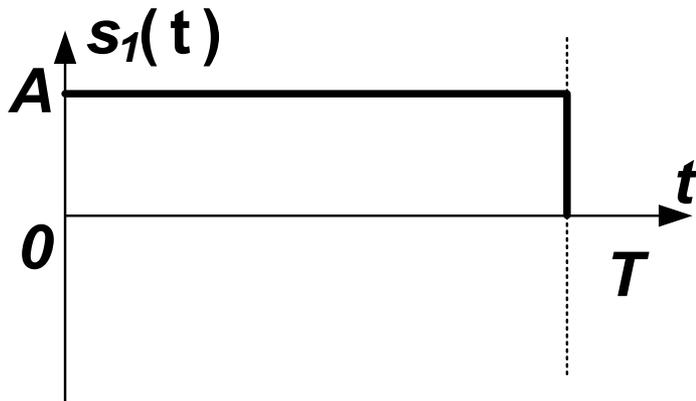
信号的最佳接收(续)



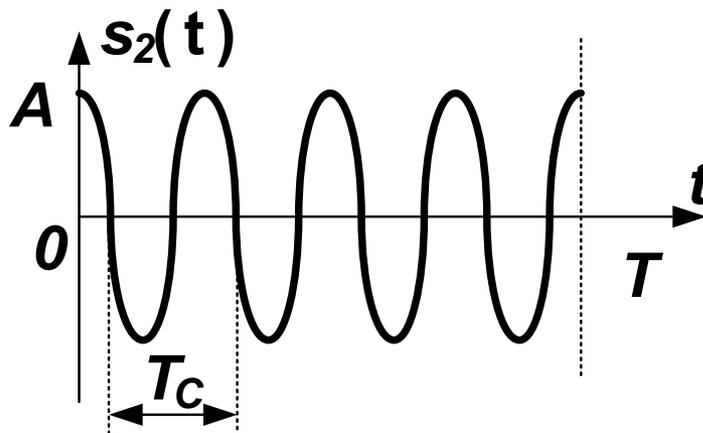
匹配滤波器

示例2: 已知输入信号分别为 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$

求其匹配滤波器的输出



(a) $s_1(t)$ 信号波形



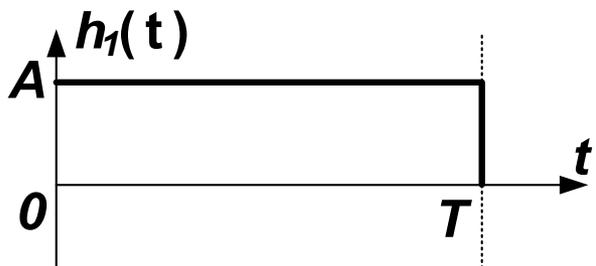
(a) $s_2(t)$ 信号波形

- (a) 某基带信号的符号波形;
- (b) 某已调信号的符号波形。

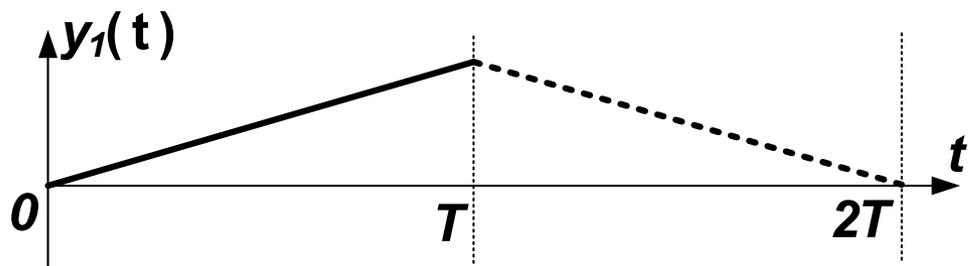
信号的最佳接收(续): 匹配滤波器示例:



基带信号(a)的冲激响应波形和匹配滤波器输出波形:

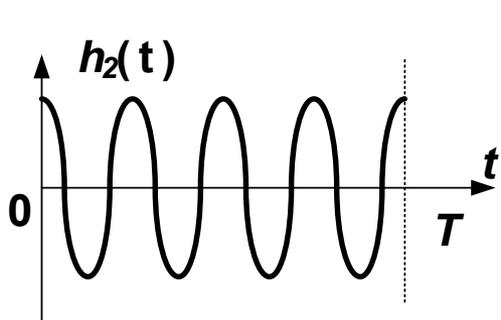


(a) $h_1(t)$ 信号波形

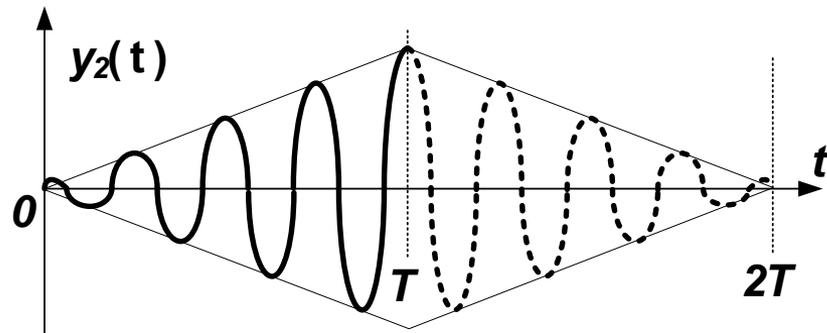


(b) $y_1(t)$ 信号波形

已调信号(b)的冲激响应波形和匹配滤波器输出波形:



(a) $h_2(t)$ 信号波形



(b) $y_2(t)$ 信号波形

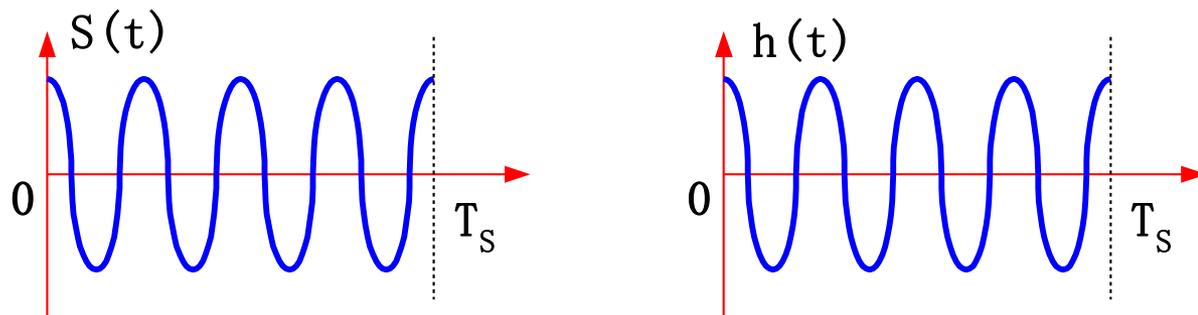
匹配滤波器



匹配滤波器的概念可用于基带与通带信号

例 求余弦脉冲（通带）信号匹配滤波器的冲激响应及匹配滤波输出。

冲激响应:

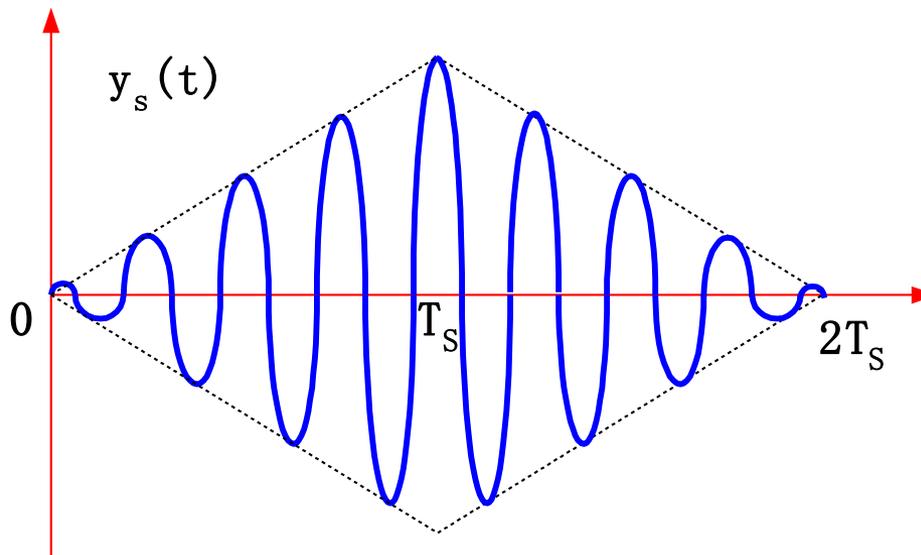


匹配滤波输出:

在 $t = T_s$ 时刻

$y_s(t)$ 达到最大

SNR 达最大值。



匹配滤波器



匹配滤波器的的相关运算实现

信号 $S(t)$ 经其匹配滤波器的输出:

$$\begin{aligned} z(t) &= s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau)h(\tau)d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau)ks^*(T_s - \tau)d\tau = k \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau')s^*(\tau' + T_s - t)d\tau' = \\ &= kR_s(t - T) \end{aligned}$$

等于输入信号 $s(t)$ 的自相关函数在 $t-T$ 时刻的取值。

在信噪比取最大值的抽样判决时刻 $t=T$

$$y_s(T) = kR_s(0) = kE$$

式中 E 为一个码元的能量。

匹配滤波器



匹配滤波器的的相关运算实现

对一般的情形，接收信号为 $r(t)$ ，为包含信号与噪声的组合，匹配滤波器输出：

$$\begin{aligned} z(t) &= r(t) * h(t) = \int_0^t r(\tau)h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t r(\tau)s[T - (t - \tau)] d\tau \\ &= \int_0^t r(\tau)s(T - t + \tau) d\tau \end{aligned}$$

当 $t=T$ 时，有

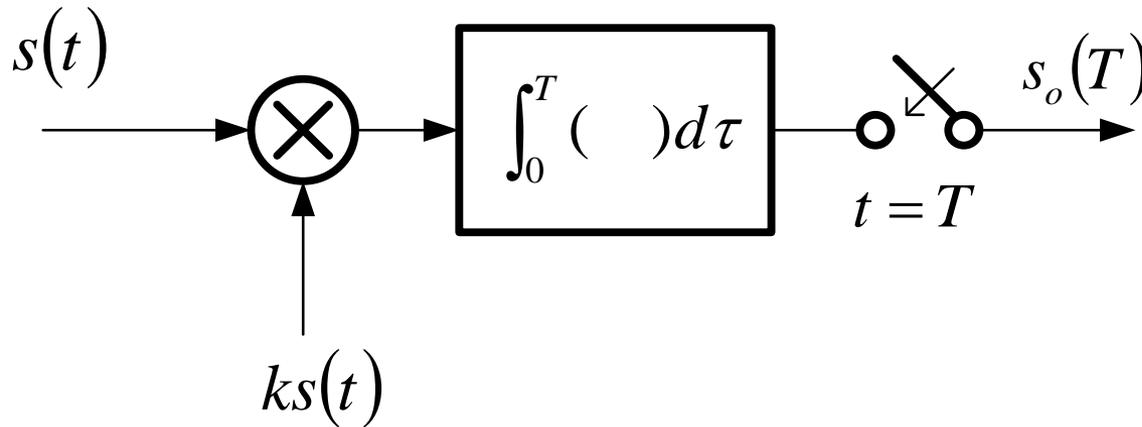
$$z(T) = \int_0^T r(\tau)s(\tau) d\tau$$

在 $t=T$ 时刻匹配滤波器的输出等效于相关运算的结果，从而提供了一种物理上易于实现的方案。

基于相关运算的匹配滤波器实现方法(续)



利用相关运算实现匹配滤波器功能的关键是要保证输入信号 $s(t)$ 与本地信号 $ks(t)$ 的**准确同步**。



匹配滤波器



FM信号匹配滤波器

二进制FSK信号最佳接收机的结构如图, 其中:

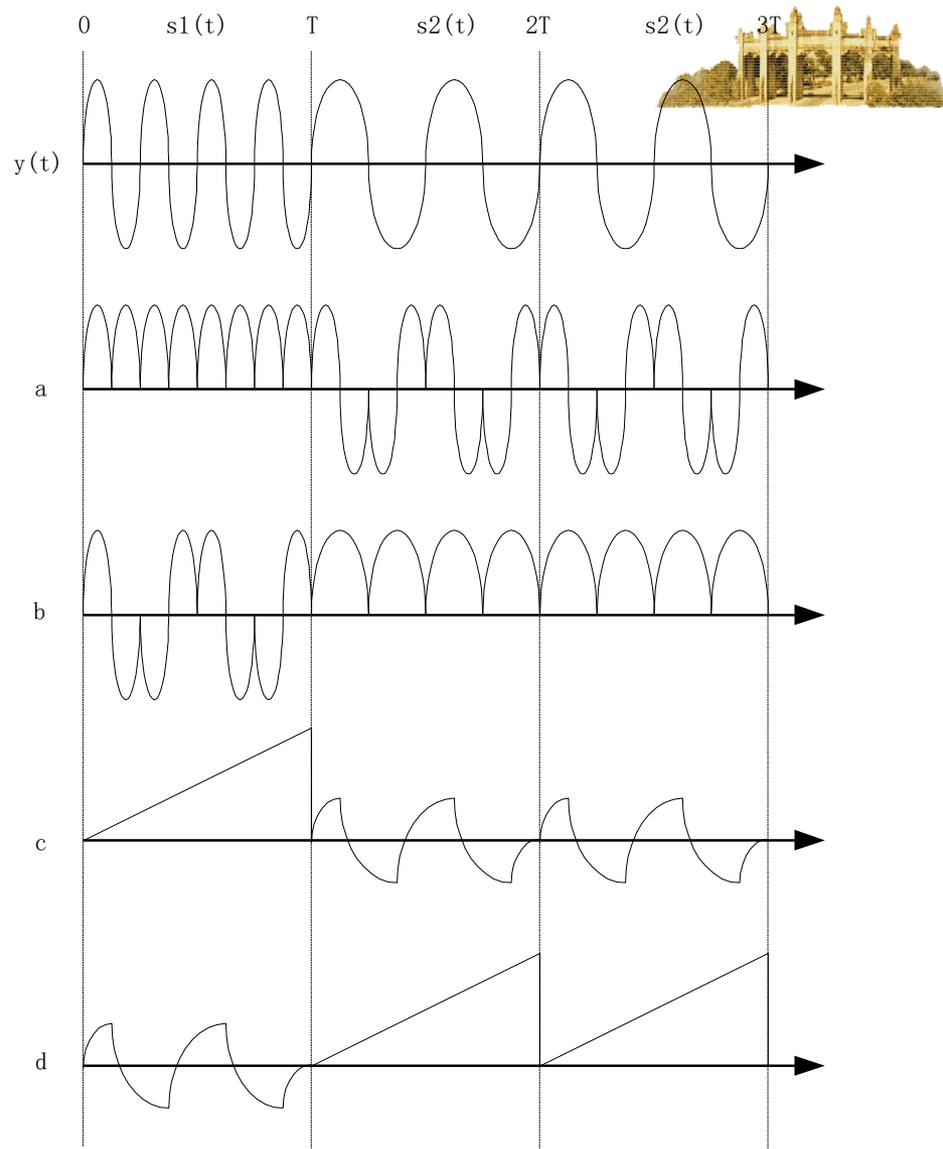
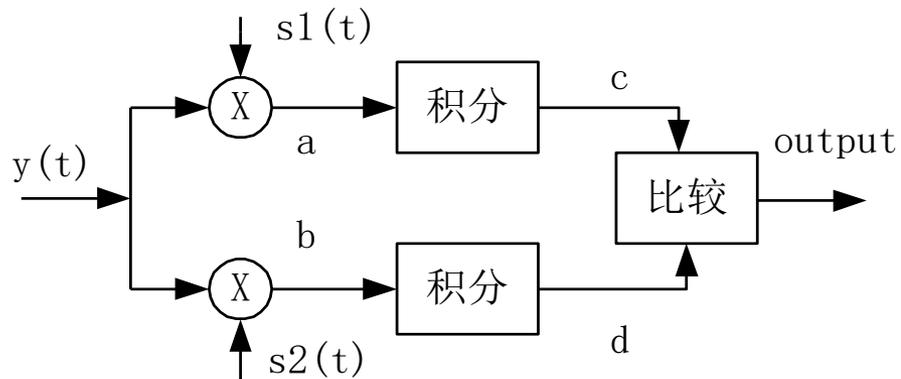
$$s_1(t) = A\sin\omega_1 t, \quad 0 \leq t \leq T;$$

$$s_2(t) = A\sin\omega_2 t, \quad 0 \leq t \leq T;$$

且 $\omega_2 = 4\pi/T$, $\omega_1 = 2\omega_2$ 画出图中a, b, c和d中各点的波形

匹配滤波器

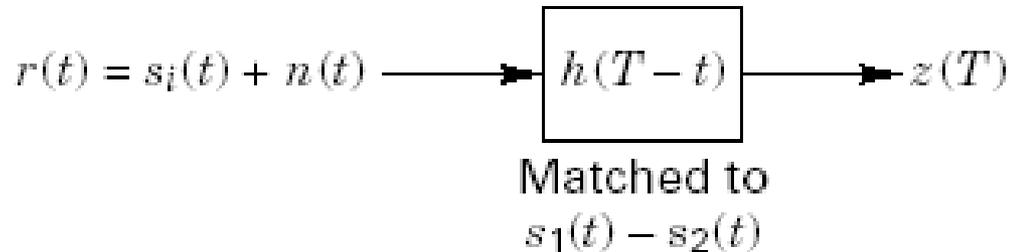
FM信号匹配滤波器



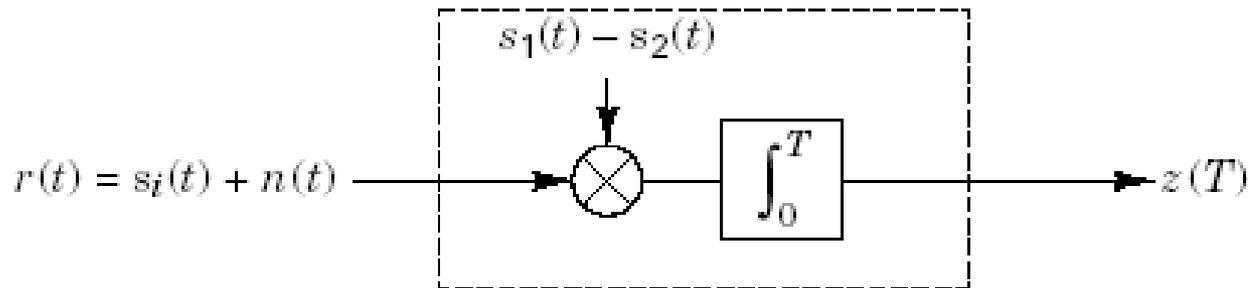
匹配滤波器



基于匹配滤波器的接收机



或



$$z(T) = \int_0^T r(t)[s_1(t) - s_2(t)]dt = \int_0^T r(t)s_1(t)dt - \int_0^T r(t)s_2(t)dt$$

当输入为 $s_1(t) + n(t)$ 时，输出信号值大于零，判 $s_1(t)$ 出现；

当输入为 $s_2(t) + n(t)$ 时，输出信号值小于零，判 $s_2(t)$ 出现。

匹配滤波器



基于匹配滤波器的接收机

$$z(T) = \int_0^T r(t)[s_1(t) - s_2(t)]dt = \int_0^T r(t)s_1(t)dt - \int_0^T r(t)s_2(t)dt$$

$$r(t) = s_i(t) + n(t) \quad i = 1, 2$$

考虑信号的均值部分，当发 $s_1(t)$ 时，输出：

$$z(T) = a_1 = \int_0^T s_1(t)[s_1(t) - s_2(t)]dt = \int_0^T s_1^2(t)dt - \int_0^T s_1(t)s_2(t)dt$$

当发 $s_2(t)$ 时，输出：

$$z(T) = a_2 = \int_0^T s_2(t)[s_1(t) - s_2(t)]dt = \int_0^T s_1(t)s_2(t)dt - \int_0^T s_2^2(t)dt$$

当输入为 $s_1(t) + n(t)$ 时，输出信号值大于零，判 $s_1(t)$ 出现；

当输入为 $s_2(t) + n(t)$ 时，输出信号值小于零，判 $s_2(t)$ 出现。



2.14 信号的带宽

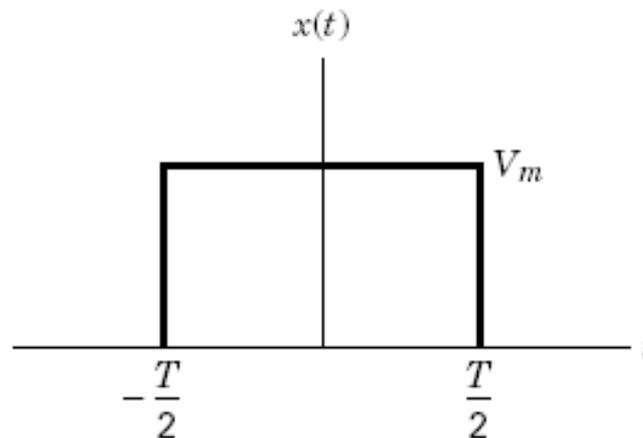


数字数据的带宽

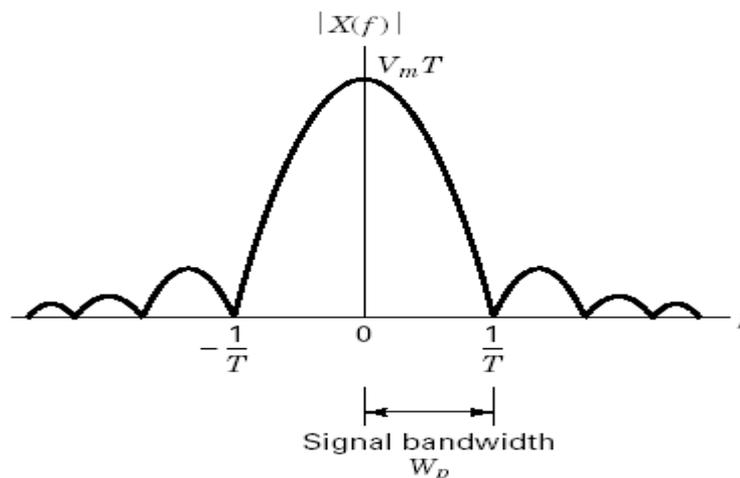


理想脉冲信号带宽及幅频

理想脉冲:



理想脉冲的幅频:



通常认为理想脉冲信号的带宽为: $W_p = \frac{1}{T}$

数字数据的带宽



带宽定义问题

带宽严格受限的信号，持续时间无限，物理上难以实现

持续时间有限的信号，信号带宽无限，带宽难以统一定义

数字数据的带宽



4. 几种常用的带宽定义（续）

a. 半功率点带宽或3dB带宽：功率下降到最大值1/2两频率点对应的宽度；

$$W_N = P_x / G_x(f_c)$$

b. 等效矩形带宽或等效噪声带宽；

c. 零点到零点带宽：主瓣频带宽度；

d. 部分功率保留带宽：正负截止频率上下各留0.5%信号功率；

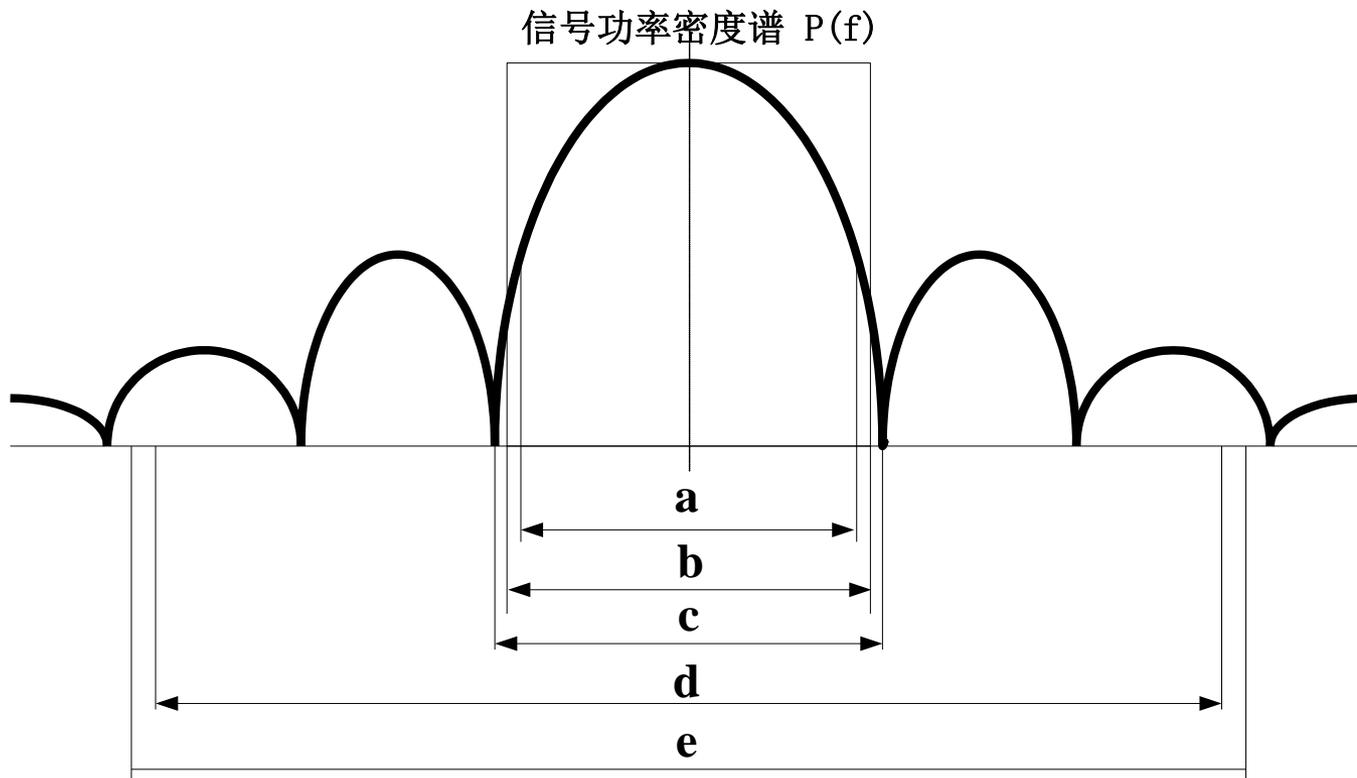
e. 有界功率谱密度带宽：带外的信号功率峰值小于某一确定值；

f. 绝对带宽（只有理论意义）：带外信号功率为零。注意，只考虑正半轴的 $f_{\max}-f_{\min}$

g. 限定频谱带宽

h. FCC带宽 Couch P80

实际系统中常用的带宽定义(续)



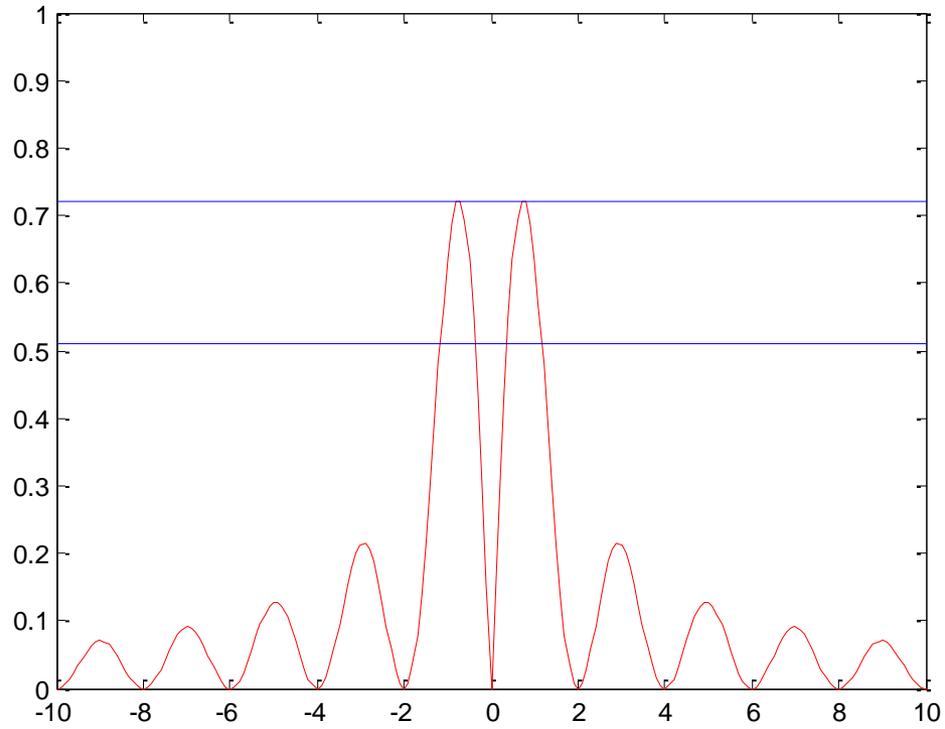
a—半功率点带宽；b—等效矩形带宽；c—零点到零点带宽；
d—99%功率带宽；e—有界功率谱密度带宽

计算等效带宽的Matlab Code

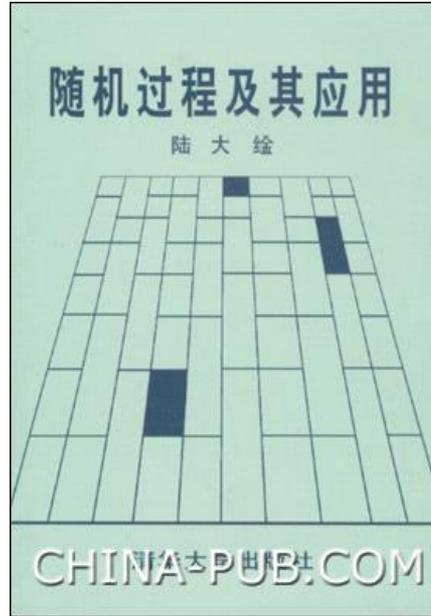
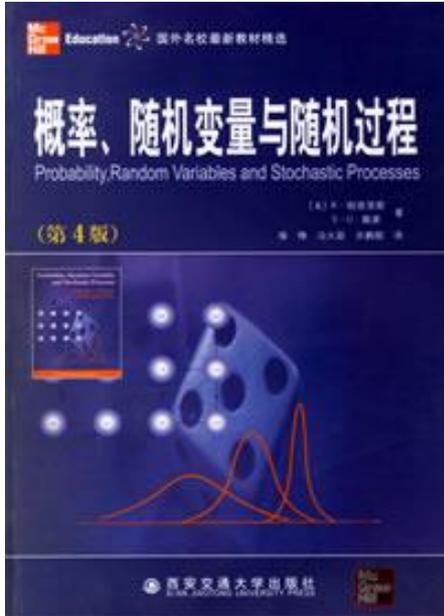


```
T=1;
N_sample = 128;
dt=1/N_sample;
t=0:dt:T-dt;
st=[ones(1,N_sample/2) -ones(1,N_sample/2)]; % give a signal

df=0.1/T;
Fx = 1/dt;
f=-Fx:df:Fx-df;
%根据傅氏变换计算得到的信号频谱
sff= T^2*j*pi*f*0.5.*exp(-j*2*pi*f*T).*sinc(f*T*0.5).*sinc(f*T*0.5);
plot(f,abs(sff),'r-')
axis([-10 10 0 1]);
hold on;
sf_max = max(abs(sff));
line([f(1) f(end)],[sf_max sf_max]);
line([f(1) f(end)],[sf_max/sqrt(2) sf_max/sqrt(2)]); %交点处为信号功率下降3dB处
Bw_eq = sum(abs(sff).^2)*df/T/sf_max.^2; %信号的等效带宽
```



深入阅读



本章小结



- ◆ 能量谱密度和功率谱密度
- ◆ 相关函数
- ◆ 信号的矢量表示
- ◆ 希尔伯特变换和解析信号
- ◆ 随机过程
- ◆ 高斯过程
- ◆ 高斯白噪声
- ◆ 窄带平稳随机过程
- ◆ 循环平稳随机过程
- ◆ 匹配滤波器
- ◆ 信号的带宽

作业 (DDL 2021年10月21日)



◆ 2.9

◆ 2.12

◆ 2.13