

深入浅出理解黎曼流形上的活动标架法

张玮*

华南理工大学数学学院

2024 年 8 月 10 日

摘要

本科和研究生微分几何课程，都会涉及到活动标架法这一重要的工具。然而，本科教材并不介绍活动标架法的动机和理论背景，研究生教材并不介绍活动标架法产生的源头和基本原型。这导致有志于学习微分几何的高年级本科生和低年级研究生，无论是参阅本科教材，还是研究生教材，都无法获得完整的活动标架法的图景，只能凭自己的运算和思考，耗费多达数月，甚至数年的时间，把这些碎片化的知识拼接成完整的图景。大三，大四，研一正是贪婪地学习数学知识的黄金时段，大好青春被如此浪费实在是一件暴殄天物的事。

为此，本文试图填补本科和研究生教材中关于活动标架法内容的缺口，梳理清楚从曲线 Frenet 标架、曲面自然标架的运动公式，到黎曼流形上活动标架及其结构方程的脉络。

简介

在本科微分几何课程的学习当中，往往有这样一部分同学，在外在几何，甚至内蕴几何的学习当中，都游刃有余，意气风发，敢笑 Gauss-Bonnet 不丈夫（此处含义实为 Gauss-Bonnet 定理的难度并不大，本质上就是 Green 公式的变体）；一到活动标架法的部分，就丈二和尚摸不着头脑了。对于他们来说，并不是看不懂活动标架法的结构方程，也不是不会把活动标架法用在研究曲面，曲线上。他们真正的疑惑在于：引入活动标架法的根本动机何在？活动标架法可以简化运算的根本原因又是什么？

不解决这些疑惑，就不可能真正理解活动标架法，更不可能臻于化境般地使用活动标架法。

Hermann Weyl 曾经评价过活动标架法^[1]：

“I did not quite understand how he [Cartan] does this in general, though in the examples he gives the procedure is clear.”

“Nevertheless, I must admit I found the book^[2], like most of Cartan’s papers, hard reading.”

可见，对于大众而言，活动标架法并不是特别容易理解的。究其原因，在于活动标架法的理论是在黎曼几何，李群的基础之上建立的。而国内大部分教材都是直接把这一套理论应用在欧氏空间的曲线曲面上，略去了黎曼流形以及李群层面活动标架法的一般理论。自然学起来就是知其然，而不知其所以然。

真正要学懂活动标架法，最彻底的办法就是在有本科微分几何中曲线 Frenet 标架和曲面自然标架运动公式的基础上，学习过黎曼几何和李群之后，直接从李群角度引入活动标架法^[3]。然而这需要非常多的准备知识。事实上，由于任给一个标架，其变换群均为李群。笔者个人认为，从黎曼流形上的活动标架法，演进到用李群李代数描述的活动标架法，是很自然的一件事，无需多言。同时，也为了能让本科高年级同学较快地了解活动标架法的全貌，我们局限于黎曼几何的框架下讨论，不涉及李群李代数。

*sczhangw@scut.edu.cn

文章分为两部分，第一节介绍了从欧氏空间中曲线和曲面上的特殊标架，演化到黎曼流形上活动标架的脉络；第二节列举了活动标架法的初步应用，研究欧氏空间中的曲线和曲面，以此展现活动标架法的优势，并加深对活动标架法的理解。

1 活动标架法的演进

1.1 三维欧氏空间上标架场的结构方程

同学们在学习本科微分几何课程的时候，知道曲线上的 Frenet 标架，曲面上的自然标架和 Darboux 标架（非脐点处）。活动标架就是这些特定标架的推广。为了更好地和黎曼流形上的活动标架法相衔接，我们先介绍平直空间 $\mathbb{R}^3$ 上的活动标架法（这里的维数实际上并没有限制，任意 n 维均可）。

考虑 $\mathbb{R}^3$ 的标架场 $\{p; e_1(p), e_2(p), e_3(p)\}$ 。简单起见，假定标架场是单位正交标架场。其运动公式，必然可以写成

$$\begin{cases} \frac{\partial e_1}{\partial v} = b_1^1 e_1 + b_1^2 e_2 + b_1^3 e_3 \\ \frac{\partial e_2}{\partial v} = b_2^1 e_1 + b_2^2 e_2 + b_2^3 e_3 \\ \frac{\partial e_3}{\partial v} = b_3^1 e_1 + b_3^2 e_2 + b_3^3 e_3 \end{cases}$$

这里 $\frac{\partial}{\partial v}$ 是沿某个方向的方向导数。我们自然想知道运动方程中系数需要满足的基本性质。为了方便研究，将运动方程改写为矩阵形式

$$\frac{\partial}{\partial v} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = {}_v B \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

其中

$${}_v B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 & b_1^3 \\ b_2^1 & b_2^2 & b_2^3 \\ b_3^1 & b_3^2 & b_3^3 \end{pmatrix}$$

再设 e_1, e_2, e_3 的具体坐标分别为 (a_{11}, a_{12}, a_{13}) , (a_{21}, a_{22}, a_{23}) , (a_{31}, a_{32}, a_{33}) 。则(1.1)式可改写为

$$\frac{\partial}{\partial v} A = {}_v B A$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

由于方向 v 的任意性，为了让表达形式更简洁，后续计算更方便，我们可以采用函数的微分这一语言来重塑之前的表达式，即

$$dA = BA \quad (1.2)$$

这里矩阵 $B = (\omega_j^k)$ ，每个 ω_j^k 都是一个函数的微分¹，使得 $\omega_j^k(v) = b_j^k$ 。我们称矩阵 B 为联络系数矩阵（可简称为联络系数）， ω_j^k 称为联络形式。

从上文可以看到，有了标架场 $\{p; e_1(p), e_2(p), e_3(p)\}$ ，自然会有运动公式（也就是联络系数矩阵）。现在我们反过来看这一问题，有了联络系数矩阵，以及某一点处的标架，能否得到整个空间上的标架场？

¹简单地解释下微分： ω_i^j 是一个切空间上的线性函数

这本质上是个一阶线性偏微分方程组的解的存在性的问题。令

$${}_iB = B\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = (\omega_j^k\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}b_j^k\right)$$

再简记 $\frac{\partial}{\partial x^i}b_j^k$ 为 b_j^k , 也就是说矩阵 ${}_iB$ 的 (j, k) 元素为 b_j^k 。由于方向导数的线性, 只需要考虑:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}A = {}_iBA, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

根据线性偏微分方程组的基本理论, 这一方程组有解的充分必要条件是求偏导次序可交换, 即:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i}A = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}A$$

将(1.3)代入上式, 有

$$\frac{\partial {}_iB}{\partial x^j}A + {}_iB{}_jBA = \frac{\partial {}_jB}{\partial x^i}A + {}_jB{}_iBA$$

由于矩阵 A 可逆, 故有

$$\frac{\partial {}_iB}{\partial x^j} + {}_iB{}_jB = \frac{\partial {}_jB}{\partial x^i} + {}_jB{}_iB \quad (1.4)$$

即联络系数矩阵满足上述关系, 则存在相应的活动标架场。实际上, (1.4)式可以类比于: 在使用曲面的自然标架场来论证曲面的存在性时, 需要 Gauss-Codazzi 方程这一额外的偏微分方程组相容性条件。

关系式(1.4)比较复杂, 我们希望从外微分¹的角度进行化简。注意到在局部坐标下, 联络一次微分形式

$$\omega_i^j = \sum_{k=1}^3 {}_kb_i^j dx^k$$

为了简化书写, 我们在这篇文章中采用 Einstein 求和记号, 也就是如果同一个字符分别出现在上标和下标里, 那么表示对应单项的求和。求和的范围可以通过上下文推定 (在这一小节中, 显然做和的范围都是从 1 到 3)。那么上式用 Einstein 求和记号可以简写为

$$\omega_i^j = {}_kb_i^j dx^k$$

进而作为一次微分形式的矩阵 B , 有:

$$B = {}_kB dx^k$$

对(1.2)式再进行一次外微分, 根据外微分算子的闭性: $d \circ d \equiv 0$, 有

$$0 = ddA = (dB)A - B \wedge dA$$

这里 $\wedge$ 是外积运算, 可以视为张量积运算 $\otimes$ 的反对称化。再用(1.2)式的右端替换上式最右端中的 dA , 有

$$(dB)A - (B \wedge B)A = 0$$

同样, 由于 A 是一个可逆矩阵, 故有

$$dB = B \wedge B \quad (1.5)$$

现在我们来比较(1.4)和(1.5)式这两个不同形式的条件。把(1.5)式用坐标具体写出

$$d({}_kB dx^k) = ({}_lB dx^l) \wedge ({}_mB dx^m)$$

即

$$\frac{\partial {}_kB}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^k = {}_lB{}_mB dx^l \wedge dx^m$$

¹我们目前没有引入外微分, 大家可以简单理解为微分的反对称化。

重新编号有：

$$\frac{\partial_j B}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j = {}_i B_j B dx^i \wedge dx^j$$

根据外积的反称性，有

$$\sum_{i < j} \left(\frac{\partial_j B}{\partial x^i} - \frac{\partial_i B}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j = \sum_{i < j} ({}_i B_j B - {}_j B_i B) dx^i \wedge dx^j$$

由于 $dx^i \wedge dx^j$ 是基底，故有

$$\frac{\partial_j B}{\partial x^i} - \frac{\partial_i B}{\partial x^j} = {}_i B_j B - {}_j B_i B \quad \forall i, j$$

也就是两式等价。换言之，外微分算子的闭性 ($d \circ d \equiv 0$)，或者等价的(1.5)式，在欧氏空间中等同于求偏导次序可交换，是活动标架存在的充分必要条件。

总之，在欧氏空间中，我们可以把活动标架的结构方程总结为

$$\begin{cases} dA = BA \\ dB = B \wedge B \end{cases} \quad (1.6)$$

其中，第一个式子是标架场确定后，它的运动公式；第二个式子可在第一个式子成立的前提下由第一个式子导出，同时反过来，也是联络系数矩阵确定后，保证标架场存在的相容性条件，是一个充分必要条件。

整篇文章的主线，即把上述欧氏空间中成立的活动标架结构方程，推广到一般的黎曼流形上。在具体推广之前，我们需要把欧氏空间中的结构方程(1.6)改写成更容易推广的形式。首先把(1.1)改写为

$$d \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

其中 $B = (\omega_i^j)$ 是联络系数矩阵。当然，需要注意的是，这里的微分算子 d 实际上是作用在向量 e_i 的每个分量上的。严格地讲，我们尚未定义对一个一般的切向量“求导”¹，大家可以暂时将这里的 d 视为权宜的记法。将上式中的矩阵乘法具体写出，即得

$$de_i = \omega_i^j \otimes e_j$$

这就是结构方程中的标架的运动公式。再看结构方程中标架场的相容性条件，将(1.5)式中的联络系数矩阵 B 写回到 (ω_i^j) 的形式，即

$$d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j$$

最终，得到和(1.6)等价的方程

$$\begin{cases} de_i = \omega_i^j \otimes e_j \\ d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j \end{cases} \quad (1.7)$$

在将欧氏空间中的活动标架结构方程(1.7)推广到黎曼流形的过程中，我们默认读者掌握了如下的基础知识：

- 微分流形上的微分形式以及外微分运算 d ；
- 黎曼流形上与度量 g 相容的黎曼联络 ∇ 。

没有系统学习过微分流形和黎曼几何的同学也不必担心，外微分运算可以视为 $\mathbb{R}^n$ 上函数全微分的推广；黎曼联络可以视为 $\mathbb{R}^3$ 中曲面 S 上协变导数的推广。只要有本科微分几何课程的基础，理解本文的叙述并不是很困难的一件事。

¹之后我们会引入“联络”的概念

1.2 切空间上的标架场的运动公式

切标架场是黎曼流形上活动标架法的最初始形态。假设 M 是一个 n 维黎曼流形，有黎曼度量 g 。 $T_p M$ 是 M 在 p 点处的切空间。在 $T_p M$ 中选取一组关于度量 g 的单位正交的基底 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ¹。当 p 点变化时，就得到了 M 上的切标架场²。

现在我们考虑标架场 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 的运动公式。对于任意的 $v \in T_p M$ ，继续采用 Einstein 求和记号，默认做和的范围从 1 到 n ：

$$\nabla_v e_i = \omega_i^j e_j$$

这里的 ∇ 是与度量 g 相容的无挠联络。由于系数 ω_i^j 和求协变导数的方向 v 有关，表达和计算都不是很简洁，与欧氏空间中的讨论类似，引入所谓的联络形式 ω_i^j 。它本质上是一个余切向量场，也就是每点处都是切向量的线性函数，使得对于 $v \in T_p M$ ，有 ω_i 在 v 上取值得 $\omega_i^j(v) = \omega_i^j$ 。进而上式可以改写为

$$\nabla e_i = \omega_i^j \otimes e_j \quad (1.8)$$

已经知道 Frenet 标架运动方程中的系数矩阵是反对称矩阵（任一单位正交标架场均有此性质），由于黎曼联络与度量 g 相容，故标架场关于黎曼联络的联络形式也是反对称的。具体来看，根据相容性

$$\begin{aligned} \nabla_v g(e_i, e_j) &= g(\nabla_v e_i, e_j) + g(e_i, \nabla_v e_j) \\ &= g(\omega_i^k(v) e_k, e_j) + g(e_i, \omega_j^k(v) e_k) \\ &= \omega_i^j(v) + \omega_j^i(v) \end{aligned}$$

而 $g(e_i, e_j) \equiv \delta_{ij}$ ， $\nabla_v g(e_i, e_j) \equiv 0$ ，从而 $\omega_i^j = -\omega_j^i$ 。反之也成立。总之联络形式反对称，等价于联络与黎曼度量相容。

而我们知道，联络除了要与黎曼度量相容外，还要满足无挠的条件。即

$$\nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i - [e_i, e_j] = 0$$

这里 $[e_i, e_j]$ 表示两个切向量场的李括号积 $e_i e_j - e_j e_i$ ，它还是一个切向量场。若记 $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$ ，则上式可改写为

$$\omega_j^k(e_i) - \omega_i^k(e_j) = c_{ij}^k \quad (1.9)$$

总结如下，流形上有一个与度量相容的无挠联络这件事，从活动标架角度来看，等同于流形上存在一个单位正交的标架场 $\{e_i\}$ ，使得

$$\nabla e_i = \omega_i^j \otimes e_j$$

同时联络形式 ω_i^j 需要满足：

- $\omega_i^j = -\omega_j^i$
- $\omega_j^k(e_i) - \omega_i^k(e_j) = c_{ij}^k$

然而，式子(1.8)中既出现了切向量场 e_j ，又出现了余切向量场 ω_i^j ，同时无挠这一条件的表述(1.9)式也非常繁琐。为了表达的更简洁，我们希望把标架的运动公式全部放在余切空间中考虑。

¹理论上只要取任意仿射标架即可，但是一方面简洁起见，另一方面考虑到使用的频率，我们取正交标架。此外，由于微分流形上存在单位分解函数，黎曼流形上整体的单位正交标架场可以通过局部单位正交标架场拼接而成，其数目是非常大的，无需担心其存在性

²严格地讲，应该是切丛上的标架场，但是为了避免引入过多新的名词，在不影响理解的前提下，我们用本科微分几何中现有的接近的概念来替代

1.3 余切空间上的标架场的运动公式

其实，切空间上的联络，自然会诱导余切空间上的联络，两者可以相互决定。具体来看，假定 θ^j 是 T_p^*M 上关于 e_i 的对偶基底（在诱导度量下依然单位正交），即 $\theta^j(e_i) = \delta_i^j$ 。将余切向量上诱导出的联络仍记为 ∇ ，设联络形式为 $\tilde{\omega}_i^j$ ，即 $\nabla\theta^j = \tilde{\omega}_i^j \otimes \theta^i$ 。约定对偶基之间的缩合和求联络可以交换次序，同时满足 Leibniz 法则，即

$$\nabla(\theta^j(e_i)) = (\nabla\theta^j)(e_i) + \theta^j(\nabla e_i) = \tilde{\omega}_k^j \theta^k(e_i) + \omega_i^k \theta^j(e_k)$$

注意到对偶基之间的缩合关系，有

$$\tilde{\omega}_k^j \delta_i^k + \omega_i^k \delta_k^j = \tilde{\omega}_i^j + \omega_i^j = 0$$

换言之，对偶标架 $\{\theta^j\}$ 的运动方程为：

$$\nabla\theta^j = -\omega_i^j \otimes \theta^i \quad (1.10)$$

此时，联络形式依然是反对称的，我们重点来看无挠条件的表述。因为 θ^j 是基底，从而有

$$\omega_i^j = \Gamma_{ik}^j \theta^k$$

其中的 Γ_{ik}^j 实际上就是所谓的 Christoffel 记号（注意上下指标的含义与本科微分几何中自然标架下的 Christoffel 记号略有不同）。代入(1.9)式中，得

$$\Gamma_{jl}^k \theta^l(e_i) - \Gamma_{il}^k \theta^l(e_j) = c_{ij}^k$$

即

$$\Gamma_{ji}^k - \Gamma_{ij}^k = c_{ij}^k$$

也就从余切空间角度来看，有一个和度量相容的无挠联络，意味着

$$\nabla\theta^j = -\omega_i^j \otimes \theta^i$$

且

- $\omega_i^j = -\omega_j^i$
- $\Gamma_{ji}^k - \Gamma_{ij}^k = c_{ij}^k$

看起来比用切标架场叙述要整洁一些，但是无挠这一性质的表述还是略显复杂。我们试图找到更好的一种叙述方式。

1.4 用外微分表述的标架场的运动公式

我们知道，只要是一个微分流形，流形上就有外微分算子 d 。从基本的定义来看，外微分算子 d 和联络 ∇ 显然不是一个概念，但是两者依然有着密切的联系¹。

首先，我们引入关于外微分算子的两个引理。

引理 1. 设 α 为任意余切向量场（1-形式）， X, Y 为切向量场，则有

$$d\alpha(X, Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y])$$

¹最显然的，两者作用在普通函数 f 上的效果相同

这一引理可以通过形如将 α 写成形如 df 的 1-形式的组合来证明，就不展开细节了。同时，这一引理还可以推广为更一般的形式

引理 2. 设 φ 为任意微分 k -形式, $Y_0, Y_1, \dots, Y_k$ 都是切向量场, 则有

$$\begin{aligned} & (d\varphi)(Y_0, Y_1, \dots, Y_k) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i Y_i(\varphi(Y_0, \dots, \hat{Y}_i, \dots, Y_k)) + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \varphi([Y_i, Y_j], Y_0, \dots, \hat{Y}_i, \dots, \hat{Y}_j, \dots, Y_k) \end{aligned}$$

在此基础上, 更关键要说明的是外微分算子 d 和联络 ∇ 有如下关系:

命题 1. 联络 ∇ 无挠, 等价于 $d = \theta^i \wedge \nabla_{e_i}$ 。这里 $\{e_i\}$ 和 $\{\theta^i\}$ 为切空间和余切空间中对偶的标架场¹。

证明. d 和 $\theta^i \wedge \nabla_{e_i}$ 在函数上的作用结果是相同的。接下来我们考虑它们在 1-形式上的作用。假定 α 是一个 1-形式, 比较 $d\alpha$ 和 $\theta^i \wedge \nabla_{e_i} \alpha$, 只需要对标架场进行验证。当联络 ∇ 无挠时, 利用引理 1, 有

$$\begin{aligned} d\alpha(e_k, e_l) &= e_k \alpha(e_l) - e_l \alpha(e_k) - \alpha([e_k, e_l]) \\ &= (\nabla_{e_k} \alpha)(e_l) + \alpha(\nabla_{e_k} e_l) - (\nabla_{e_l} \alpha)(e_k) - \alpha(\nabla_{e_l} e_k) - \alpha([e_k, e_l]) \\ &= (\nabla_{e_k} \alpha)(e_l) - (\nabla_{e_l} \alpha)(e_k) + \alpha(\nabla_{e_k} e_l - \nabla_{e_l} e_k - [e_k, e_l]) \\ &= (\nabla_{e_k} \alpha)(e_l) - (\nabla_{e_l} \alpha)(e_k) \end{aligned}$$

另一方面,

$$(\theta^i \wedge \nabla_{e_i} \alpha)(e_k, e_l) = \theta^i(e_k)(\nabla_{e_i} \alpha)(e_l) - \theta^i(e_l)(\nabla_{e_i} \alpha)(e_k) = (\nabla_{e_k} \alpha)(e_l) - (\nabla_{e_l} \alpha)(e_k)$$

显然两者在 1-形式上的作用相同。反过来, 若有 $d = \theta^i \wedge \nabla_{e_i}$ 成立, 比较上面两个式子也可推得联络无挠。验证 d 和 $\theta^i \wedge \nabla_{e_i}$ 在一般微分 k -形式上的作用相同, 可以根据引理 2 类似得到。□

其实, 熟悉微分流形内容的同学, 还可以通过另一种途径, 也就是微分流形上外微分算子的唯一性来证明上述命题。简单地说, 就是验证算子 $\theta^i \wedge \nabla_{e_i}$ 满足

- 对于函数 f 有 $\theta^i \wedge \nabla_{e_i} f = df$;
- $(\theta^i \wedge \nabla_{e_i}) \circ (\theta^i \wedge \nabla_{e_i}) = 0$;
- 反 Leibniz 性质;

则可以断言 $\theta^i \wedge \nabla_{e_i}$ 就是唯一的外微分算子 d 。

现在我们回到主线, 此时, 若已知有联络形式

$$\nabla \theta^j = -\omega_i^j \otimes \theta^i$$

则在无挠的条件下, 有

$$d\theta^j = \theta^i \wedge \nabla_{e_i} \theta^j = \theta^i \wedge (-\omega_k^j(e_i))\theta^k = -\omega_k^j(e_i)\theta^i \wedge \theta^k = -\omega_k^j \wedge \theta^k$$

最终, 已有联络形式 ω_i^j 的情况下, 我们可以用

$$d\theta^j = -\omega_i^j \wedge \theta^i \quad (1.11)$$

再外加 ω_i^j 反对称来表示联络无挠且与度量相容。从这一点来看, 使用外微分, 可以让标架场的运动公式写起来更简洁 (其实就是自动包含了无挠性, 不需要额外写出了)。

¹命题本身中的标架场不需要单位正交, 当然也就不需要流形上有度量, 只要有联络就成立。

需要指出的是,在无挠的条件下,(1.10)式可以推出(1.11)式;反过来,如果联络是与度量相容的无挠联络,也就是所谓的黎曼联络,(1.11)式也可以推出(1.10)式。这是因为,一方面,根据 $\omega_i^j = \Gamma_{ik}^j \theta^k$, (1.11)式等价于

$$d\theta^j = -\Gamma_{ik}^j \theta^k \wedge \theta^i = -\sum_{k < i} (\Gamma_{ik}^j - \Gamma_{ki}^j) \theta^k \wedge \theta^i$$

由于 $\theta^k \wedge \theta^i, k < i$ 是 2-形式的基底,故比较基底前的系数,得到 $n \times \frac{n(n-1)}{2}$ 个关于 Γ_{ik}^j 的方程。另一方面,在单位正交标架场下,黎曼联络的 ω_i^j 关于 i, j 反对称,即

$$\Gamma_{ik}^j \theta^k = -\Gamma_{jk}^i \theta^k$$

于是 $\Gamma_{ik}^j = -\Gamma_{jk}^i$, 这意味着 $\Gamma_{ik}^i \equiv 0$, 同时,独立的 Γ_{ik}^j 一共有 $n \times \frac{n(n-1)}{2}$ 个。总之,方程的个数和未知数的个数是一致的,对于真实存在的标架场而言,这意味着我们可以通过(1.11)式求解出全部的 Christoffel 记号 Γ_{ik}^j , 也就是联络系数 ω_i^j 。当然,如果不是黎曼联络,则(1.11)式无法推出(1.10)式。

1.5 标架场存在的相容性条件

然而(1.11)式,以及等价的(1.8)式及其对偶形式,只是标架场的运动公式,并非完整的结构方程。我们已经知道在欧氏空间中的活动标架结构方程除了标架场的运动公式外,还有标架场存在的相容性条件。说的更具体些,之前所有的讨论,都是建立在已经知道流形上标架场 $\{e_i\}$ 或 $\{\theta^j\}$ 存在的基础上,求其满足的运动方程。反过来看,已经知道一组 1-形式 $\tilde{\omega}_i^j$, 我们需要弄清楚是否存在某个标架场 $\{\tilde{e}_i\}$ 或 $\{\tilde{\theta}^j\}$, 使得其运动方程中的系数就是 $\tilde{\omega}_i^j$ 。

现在我们就来寻找黎曼流形上标架场存在的相容性条件。为方便理解,我们还是先在切空间上讨论。对于黎曼流形上的切向量场,并没有普通的导数(偏导)运算,而是需要求联络;同时,我们知道,在黎曼流形上,求联络是不能交换次序的:考虑任意的向量场 X, Y , 有

$$\nabla_X \nabla_Y e_i - \nabla_Y \nabla_X e_i - \nabla_{[X, Y]} e_i = R(X, Y) e_i \quad (1.12)$$

这里 $R(X, Y)$ 是所谓的曲率算子,一个 $(1, 3)$ 型张量,用来描述求导的非交换性。因此,我们不能照搬欧氏空间中求偏导可交换次序这一条件,需要使用曲率来替换欧氏空间中求偏导可以交换次序,进而得到黎曼流形上标架场的相容性条件。

具体来看,由于

$$\nabla e_i = \omega_i^j \otimes e_j$$

代入曲率张量表达式(1.12)中,有

$$\nabla_X (\omega_i^j(Y) e_j) - \nabla_Y (\omega_i^j(X) e_j) - (\omega_i^j([X, Y]) e_j) = R(X, Y) e_i$$

即

$$(\nabla_X \omega_i^j(Y) - \nabla_Y \omega_i^j(X) - \omega_i^j([X, Y])) e_j + (\omega_i^j(Y) \omega_j^k(X) - \omega_i^j(X) \omega_j^k(Y)) e_k = R(X, Y) e_i$$

再根据引理1,有

$$\nabla_X \omega_i^j(Y) - \nabla_Y \omega_i^j(X) - \omega_i^j([X, Y]) = (d\omega_i^j)(X, Y)$$

而

$$\omega_i^j(Y) \omega_j^k(X) - \omega_i^j(X) \omega_j^k(Y) = -\omega_i^j \wedge \omega_j^k(X, Y)$$

综合有

$$((d\omega_i^j)(X, Y) - \omega_i^k \wedge \omega_k^j(X, Y)) e_j = R(X, Y) e_i$$

¹ 求解联络系数的过程非常的复杂, 参见附录A。附录中的求解思路与这里提到的有所不同, 但本质等价。

令 $R(X, Y)e_i = \Omega_i^j(X, Y)e_j$, 这里 Ω_i^j 是一个微分 2-形式, 称为曲率形式。于是有

$$d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = \Omega_i^j \quad (1.13)$$

自然, 上述相容性条件是黎曼流形上标架场存在的必要条件。

进一步, 我们说明上述相容性条件(1.13)也是标架场存在的充分条件。即现在有一组新的 1-形式 $\tilde{\omega}_i^j$, 满足相容性条件 $d\tilde{\omega}_i^j - \tilde{\omega}_i^k \wedge \tilde{\omega}_k^j = \tilde{\Omega}_i^j$, 我们需要寻找某个标架场 $\{\tilde{e}_i\}$, 使得其运动方程中的系数就是 $\tilde{\omega}_i^j$ 。

首先, 我们需要先取定一个切标架场作为背景标架场。不妨设 $\{e_i\}$ 是已经存在的一个标架场, 其联络形式随之确定, 记为 ω_i^j 。由于是已经存在的标架场, 故 ω_i^j 天然满足相容性条件(1.13)。假若能够找到 $\{\tilde{e}_i\}$ 使得 $\tilde{\omega}_i^j$ 成为它的联络形式, 由于 $\{e_i\}$ 是基底, 故可设

$$\tilde{e}_i = a_i^k e_k$$

其中矩阵 (a_i^k) 处处单位正交。寻找标架场 $\{\tilde{e}_i\}$, 就转化成为找正交矩阵 (a_i^k) 。根据题设, 有

$$\nabla \tilde{e}_i = \tilde{\omega}_i^j \otimes \tilde{e}_j$$

即

$$\nabla(a_i^k e_k) = \tilde{\omega}_i^j \otimes (a_j^k e_k)$$

于是

$$(da_i^k) \otimes e_k + a_i^k \nabla e_k = a_j^k \tilde{\omega}_i^j \otimes e_k$$

从而

$$(da_i^k) \otimes e_k + a_i^k \omega_k^l \otimes e_l = a_j^k \tilde{\omega}_i^j \otimes e_k$$

改变指标有

$$(da_i^l) \otimes e_l + a_i^k \omega_k^l \otimes e_l = a_j^l \tilde{\omega}_i^j \otimes e_l$$

比较基底前的系数有

$$da_i^l + a_i^k \omega_k^l = a_j^l \tilde{\omega}_i^j$$

即

$$da_i^l = a_j^l \tilde{\omega}_i^j - a_i^k \omega_k^l \quad (1.14)$$

这是一个普通的一阶线性偏微分方程组 (不再是求联络了, 而是求普通偏导数, 这也是为什么要取背景标架场的原因)。我们想要说明, 在相容性条件的保证下, 关于 a_i^l 的微分方程可解。之前已经提到过, 一阶线性偏微分方程组可解的充分必要条件是求导可以交换次序, 或者等价的, $d \circ d = 0$ 。故我们直接来计算 dda_i^l 。具体来看, 对(1.14)左右两边求外微分, 有

$$dda_i^l = d(a_j^l \tilde{\omega}_i^j - a_i^k \omega_k^l) = (da_j^l) \wedge \tilde{\omega}_i^j + a_j^l d\tilde{\omega}_i^j - (da_i^k) \wedge \omega_k^l - a_i^k d\omega_k^l$$

再将相容性条件(1.13)式和(1.14)式代入上式最右端, 有

$$\begin{aligned} & (a_m^l \tilde{\omega}_j^m - a_j^k \omega_k^l) \wedge \tilde{\omega}_i^j + a_j^l (\tilde{\omega}_i^k \wedge \tilde{\omega}_k^j + \tilde{\Omega}_i^j) - (a_j^k \tilde{\omega}_i^j - a_i^m \omega_m^k) \wedge \omega_k^l - a_i^k (\omega_k^m \wedge \omega_m^l + \Omega_k^l) \\ &= a_m^l \tilde{\omega}_j^m \wedge \tilde{\omega}_i^j + a_j^l \tilde{\omega}_i^k \wedge \tilde{\omega}_k^j \\ & - (a_j^k \omega_k^l \wedge \tilde{\omega}_i^j + a_j^k \tilde{\omega}_i^j \wedge \omega_k^l) \\ & + a_i^m \omega_m^k \wedge \omega_k^l - a_i^k \omega_k^m \wedge \omega_m^l \\ & + a_j^l \tilde{\Omega}_i^j - a_i^k \Omega_k^l \end{aligned}$$

前三组式子显然都是零，只需要考虑最后一组式子。记 a_i^k 逆矩阵为 a_k^i ，而曲率形式是个张量，必有

$$a_k^i \tilde{\Omega}_i^j a_j^l = \Omega_k^l$$

从而所有四组式子均为零。进而在满足相容性条件(1.13)的前提下， $dda_i^l \equiv 0$ ，故方程(1.14)在给定一点处的初值后一定有解。同时，不难验证若给定点的初值为正交矩阵，整体的解也全为正交矩阵。也就是说，相容性条件(1.13)不但是黎曼流形上标架场存在的必要条件，也是充分条件。

最终，依然回到更简洁的余切空间上，黎曼流形上单位正交活动标架场的结构方程为

$$\begin{cases} d\theta^j = -\omega_i^j \wedge \theta^i \\ d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \Omega_i^j \end{cases} \quad (1.15)$$

其中， ω_i^j 和 Ω_i^j 都关于 i, j 反对称（非单位正交的活动标架场也满足同样的方程，只是不额外要求 ω_i^j 反对称）。

大家可以把上述黎曼流形上结构方程和欧氏空间中的结构方程(1.7)相对比：核心的区别在于黎曼流形上的结构方程中包含了曲率项。当曲率为零时，(1.15)式就变成了(1.7)式的对偶形式。换言之，(1.15)式确实是(1.7)式的推广。

1.6 相容性条件的额外说明

此外，我们还需要注意到，在黎曼流形上，相容性条件并不能通过外微分算子的闭性来导出，简而言之，就是外积的反交换性会自动地把求联络中的非交换部分抹去，不会对联络有任何的限制。具体来看，从运动公式(1.11)出发，对(1.11)左右两端同时求外微分，根据连续两次外微分必为零的性质，左边有

$$dd\theta^j = 0$$

而右边

$$\begin{aligned} d(-\omega_i^j \wedge \theta^i) &= -(d\omega_i^j) \wedge \theta^i + \omega_i^j \wedge d\theta^i \\ &= -(d\omega_i^j) \wedge \theta^i - \omega_i^j \wedge \omega_k^i \wedge \theta^k \\ &= -(d\omega_i^j + \omega_k^j \wedge \omega_i^k) \wedge \theta^i \end{aligned}$$

也就是

$$(d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j) \wedge \theta^i = 0$$

但是这并不能导出 $d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = 0$ ，或任何其他对联络的限制。因为实际上我们已经知道 $d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = \Omega_i^j$ ，而根据 $R(X, Y)e_i = \Omega_i^j(X, Y)e_j$ ，可得

$$\Omega_i^j = R_{kli}^j \theta^k \wedge \theta^l \quad (1.16)$$

其中， $R(e_k, e_l)e_i = R_{kli}^j e_j$ 。于是

$$\Omega_i^j \wedge \theta^i = R_{kli}^j \theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^i$$

但是，根据第一 Bianchi 恒等式：

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

从而

$$R_{kli}^j + R_{lik}^j + R_{ikl}^j = 0$$

进而

$$\Omega_i^j \wedge \theta^i = 0$$

也就是曲率项本身的对称性可以导致 $d \circ d = 0$ 的结果；但反过来， $d \circ d = 0$ 在任何流形上都成立，由它是推导不出曲率项的。总之，相容性条件(1.13)必不可少。

2 活动标架法的初步应用

目前为止，我们按部就班，事无巨细地梳理了从曲线上的 Frenet 标架，逐步进化到黎曼流形上的活动标架这一过程。然而，为什么要这样做，亟待回答。抛开标架场天然就和变换群密切相关这一形而上的解释，我们需要知道：活动标架法，比曲面的自然标架，正交曲率线网，这些“固定”的标架场，以及正交参数系这些局部的标架场，有哪些优势。我们在这一节中首先利用活动标架法来研究三个具有代表性的曲线曲面的几何问题，并在下一节中，对这三个例子进行总结和分析，加深我们对活动标架法的理解和认知。

2.1 曲面的 Gauss-Codazzi 方程

$\mathbb{R}^3$ 中有一张曲面 S ，在曲面上取一个单位正交标架场 $\{\vec{r}, e_1, e_2, e_3\}$ ，为了方便我们研究，这个标架场有一定的特殊性： e_1, e_2 是曲面 S 的相互正交的单位切向量场， $e_3 = \vec{n}$ 是曲面的单位法向量。不失一般性，我们不妨认为 S 上的这个标架场可以延拓到整个三维欧氏空间。将切标架场用对偶的 1-形式来表示，有 $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ ，且联络形式 $\omega_i^j = -\omega_j^i$ 满足欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 上的结构方程

$$\begin{cases} d\theta^j = -\omega_i^j \wedge \theta^i \\ d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j \end{cases} \quad (2.1)$$

这里默认 i, j 的取值范围以及 Einstein 求和的范围都为 1, 2, 3。然而，我们所要考虑的问题都完全局限于曲面 S ，所有的 $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ 以及 ω_i^j 都要限制在 S 上考虑，也就是视为以 (u, v) 为参数的一次微分式。根据 $e_3 = \vec{n}$ 的取法，限制在 S 上，不难看出 $\theta^3|_S \equiv 0$ （为了书写简便，我们忽略微分形式的拉回记号）；再注意到根据反称性， $\omega_3^3 \equiv 0$ ，原先欧氏空间中的结构方程(2.1)，限制在曲面 S 上，就变成了

$$\begin{cases} d\theta^\beta = -\omega_\alpha^\beta \wedge \theta^\alpha \\ d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta + \omega_\alpha^3 \wedge \omega_3^\beta \end{cases} \quad (2.2)$$

其中 $\alpha, \beta = 1, 2$ (本小节中，默认所有关于希腊字母的 Einstein 求和式的范围都是从 1 到 2)；以及额外的

$$d\omega_\alpha^3 = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^3 \quad (2.3)$$

特别需要注意的是，(2.2)和(2.3)式中的外微分算子 d （流形 $\mathbb{R}^3$ 上的外微分算子）已经和(2.1)式中的 d （曲面上的外微分算子）含义不同。再注意到 θ^1, θ^2 是曲面 S 上的活动标架场。将(2.2)式与一般黎曼流形上的结构方程(1.15)对比可得

$$d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta + \Omega_\alpha^\beta \quad (2.4)$$

其中

$$\Omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^3 \wedge \omega_3^\beta \quad (2.5)$$

结构方程限制到曲面 S 这一过程，几何意义非常清晰：原本曲率为零的欧氏空间，限制到弯曲的抽象曲面 S 上，结构方程中自然会出现曲面 S 的曲率 Ω_α^β 。

现在我们整理下已经得到的三维欧氏空间中曲面 S 上的方程，有

$$\begin{cases} d\theta^\beta = -\omega_\alpha^\beta \wedge \theta^\alpha \\ d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta + \Omega_\alpha^\beta \end{cases} \quad (2.6)$$

以及

$$\begin{cases} \Omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^3 \wedge \omega_3^\beta \\ d\omega_\alpha^3 = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^3 \end{cases} \quad (2.7)$$

这里(2.6)是曲面 S 作为一个流形其上内蕴的结构方程。所以不难猜出,(2.7)式就是活动标架法下的 Gauss-Codazzi 方程。

我们具体验证这一猜测。首先来探究(2.5)式,也就是活动标架法下的 Gauss 方程。 Ω_α^β 和 $\omega_\alpha^3 \wedge \omega_\beta^3$ 关于 α, β 均反对称,只需要考虑 $\alpha = 1, \beta = 2$ 的情况。一方面,由定义式(1.16)有

$$\Omega_1^2 = R_{\gamma\eta 1}^2 \theta^\gamma \wedge \theta^\eta = 2R_{121}^2 \theta^1 \wedge \theta^2$$

需要注意的是, R_{121}^2 前的系数 2, 可以通过将(1.16)中的求和范围修改为 $k < l$ 消除(具体到这个例子中, 对应 $\gamma < \eta$)。另一方面, 记 $\omega_\alpha^3 = h_{\alpha\gamma} \theta^\gamma$, 也就是

$$\begin{cases} \omega_1^3 = h_{11}\theta^1 + h_{12}\theta^2 \\ \omega_2^3 = h_{21}\theta^1 + h_{22}\theta^2 \end{cases} \quad (2.8)$$

于是有

$$\omega_1^3 \wedge \omega_2^3 = -\omega_1^3 \wedge \omega_2^3 = -(h_{11}\theta^1 + h_{12}\theta^2) \wedge (h_{21}\theta^1 + h_{22}\theta^2) = -(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21})\theta^1 \wedge \theta^2$$

最终(2.5)式等价于

$$-2R_{121}^2 = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} \quad (2.9)$$

由于曲率与第二基本形式都是张量, 所以这一式子在任何的单位正交标架场下都是成立的, 这便是单位正交标架场下的 Gauss 方程(因为是单位正交标架, 所以 $R_{121}^2 = R_{1221}$)。

接下来研究(2.3)式, 将(2.3)式具体写出, 由于联络形式的反对称性, 有

$$\begin{cases} d\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 \\ d\omega_2^3 = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 \end{cases}$$

记 $\omega_1^2 = \Gamma_{1\alpha}^2 \theta^\alpha$, 于是

$$\begin{cases} d(h_{11}\theta^1 + h_{12}\theta^2) = (\Gamma_{11}^2 \theta^1 + \Gamma_{12}^2 \theta^2) \wedge (h_{21}\theta^1 + h_{22}\theta^2) \\ d(h_{21}\theta^1 + h_{22}\theta^2) = -(\Gamma_{11}^2 \theta^1 + \Gamma_{12}^2 \theta^2) \wedge (h_{11}\theta^1 + h_{12}\theta^2) \end{cases}$$

即

$$\begin{aligned} (\nabla_{e_2} h_{11})\theta^2 \wedge \theta^1 - h_{11}\omega_2^1 \wedge \theta^2 + (\nabla_{e_1} h_{12})\theta^1 \wedge \theta^2 - h_{12}\omega_1^2 \wedge \theta^1 &= (\Gamma_{11}^2 h_{22} - \Gamma_{12}^2 h_{21})\theta^1 \wedge \theta^2 \\ (\nabla_{e_2} h_{21})\theta^2 \wedge \theta^1 - h_{21}\omega_2^1 \wedge \theta^2 + (\nabla_{e_1} h_{22})\theta^1 \wedge \theta^2 - h_{22}\omega_1^2 \wedge \theta^1 &= -(\Gamma_{11}^2 h_{12} - \Gamma_{12}^2 h_{11})\theta^1 \wedge \theta^2 \end{aligned}$$

比较基底前系数, 最终有

$$\begin{aligned} \nabla_{e_2} h_{11} - \nabla_{e_1} h_{12} &= \Gamma_{11}^2 h_{11} + \Gamma_{12}^2 h_{12} + \Gamma_{12}^2 h_{21} - \Gamma_{11}^2 h_{22} \\ \nabla_{e_2} h_{21} - \nabla_{e_1} h_{22} &= -\Gamma_{12}^2 h_{11} + \Gamma_{11}^2 h_{12} + \Gamma_{11}^2 h_{21} + \Gamma_{12}^2 h_{22} \end{aligned} \quad (2.10)$$

这便是单位正交标架场下的 Codazzi 方程。

我们对曲面上的标架场运动方程(2.6)再做一些说明。考虑其中的第二式, 也就是(2.4)式。之前已经提到, 只需要考察

$$d\omega_1^2 = \omega_1^\gamma \wedge \omega_\gamma^2 + \Omega_1^2$$

然而, 同样由联络形式的反对称性, 上式中无论 γ 取 1 或是 2, ω_1^1, ω_2^2 均为零, 从而式子简化为

$$d\omega_1^2 = \Omega_1^2$$

同时 Ω_1^2 作为曲面上的 2-形式, 必然可以写为 $-K\theta^1 \wedge \theta^2$, K 就是曲面的 Gauss 曲率, 等同于 $-2R_{121}^2$ 。结构方程保留(2.4)式的形式, 而非 $d\omega_1^2 = \Omega_1^2$ 这样的特殊形式, 是因为这种原始形式的方程实质上对任意维数欧氏空间中的子流形都成立, 我们不想把自己局限于过于特殊的情形。

为了和本科微分几何内容有更好的衔接, 同时也为了让大家更为确信活动标架法的有效性, 现在我们想办法把(2.9)(2.10)式写成本科教材中大家熟悉的自然标架下的 Gauss-Codazzi 方程。为了计算简便, 不妨设曲面 S 取正交正交参数系 (u, v) , 此时曲面的第一基本形式可以写为 $E(du)^2 + G(dv)^2$; 同时假定曲面的第二类基本量为 L, M, N 。我们可以取一个特殊的“活动”标架, $e_1 = \frac{\vec{r}_u}{\sqrt{E}}, e_2 = \frac{\vec{r}_v}{\sqrt{G}}, e_3 = \vec{n}$ 。也就是 $\theta^1 = \sqrt{E}du, \theta^2 = \sqrt{G}dv$ 。

首先来看 Gauss 方程, 先从内蕴的角度来入手, 也就是(2.6)式中的第一式:

$$d\theta^1 = d(\sqrt{E}du) = -(\sqrt{E})_v du \wedge dv = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} du \wedge \sqrt{G}dv = -\omega_2^1 \wedge \theta^2$$

类似有

$$d\theta^2 = d(\sqrt{G}dv) = (\sqrt{G})_u du \wedge dv = -\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} dv \wedge \sqrt{E}du = -\omega_1^2 \wedge \theta^1$$

综合这两式, 再由 $\omega_2^1 = -\omega_1^2$, 不难看出

$$\omega_1^2 = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} du + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} dv \quad (2.11)$$

再看(2.6)式中的第二式, 已经知道第二式中非零的部分只有:

$$\begin{aligned} d\omega_1^2 &= \Omega_1^2 = d\left(-\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} du + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} dv\right) \\ &= \left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right) du \wedge dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right) \theta^1 \wedge \theta^2 \end{aligned}$$

即

$$2R_{121}^2 = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right)$$

再从外在的角度来看。已经知道 $e_1 = \frac{\vec{r}_u}{\sqrt{E}}, e_2 = \frac{\vec{r}_v}{\sqrt{G}}$ 。根据(2.8)式, 有

$$h_{11} = \omega_1^3(e_1) = (\nabla_{e_1} \vec{n}) \cdot e_1 = \frac{1}{E} \vec{n}_u \cdot \vec{r}_u = -\frac{L}{E}$$

同理有 $h_{12} = h_{21} = -\frac{M}{\sqrt{EG}}, h_{22} = -\frac{N}{G}$ 。把所有得到的具体表达式代入(2.9)式中, 就可以得到正交参数系下的 Gauss 方程

$$-\sqrt{EG} \left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right) = LN - M^2$$

类似地, 我们由(2.10)式导出自然标架下的 Codazzi 方程。为了记号清晰, 令 $L = b_{11}, M = b_{12} = b_{21}, N = b_{22}$, 则有

$$h_{11} = -\frac{b_{11}}{E}, h_{12} = -\frac{b_{12}}{\sqrt{EG}}, h_{21} = -\frac{b_{21}}{\sqrt{EG}}, h_{22} = -\frac{b_{22}}{G}$$

同时, 通过观察(2.11)式, 不难看出

$$\omega_1^2 = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}(\sqrt{E}du) + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}}(\sqrt{G}dv) = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}\theta^1 + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}}\theta^2$$

于是

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}, \Gamma_{12}^2 = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}}$$

全部代入(2.10)式中, 就可以得到正交参数系下的 Codazzi 方程

$$\begin{cases} \frac{\partial b_{11}}{\partial v} - \frac{\partial b_{12}}{\partial u} = \tilde{\Gamma}_{12}^1 b_{11} + \tilde{\Gamma}_{12}^2 b_{21} - \tilde{\Gamma}_{11}^1 b_{12} - \tilde{\Gamma}_{11}^2 b_{22} \\ \frac{\partial b_{21}}{\partial v} - \frac{\partial b_{22}}{\partial u} = \tilde{\Gamma}_{22}^1 b_{11} + \tilde{\Gamma}_{22}^2 b_{21} - \tilde{\Gamma}_{21}^1 b_{12} - \tilde{\Gamma}_{21}^2 b_{22} \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \log E}{\partial u}, & \tilde{\Gamma}_{12}^1 &= \tilde{\Gamma}_{21}^1 = \frac{1}{2} \frac{\partial \log E}{\partial v}, & \tilde{\Gamma}_{22}^1 &= -\frac{1}{2E} \frac{\partial G}{\partial u} \\ \tilde{\Gamma}_{11}^2 &= -\frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial v}, & \tilde{\Gamma}_{12}^2 &= \tilde{\Gamma}_{21}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial \log G}{\partial u}, & \tilde{\Gamma}_{22}^2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \log G}{\partial v} \end{aligned}$$

为 (u, v) 参数下的 Christoffel 记号 (不要与 $\{\theta^1, \theta^2\}$ 下的 $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ 相混淆)。

不难看出, 活动标架法和自然标架等方法最终是等价的。但是用活动标架法来书写的 Gauss-Codazzi 方程显然更加简洁。换句话说, 在证明或者计算一些和不变量, 特别是张量相关式子时, 使用活动标架法会给我们带来很大的方便。这是引入活动标架法的好处之一。

然而, 通过活动标架下的 Gauss-Codazzi 方程来推导自然标架下的 Codazzi 方程 (Codazzi 方程左右两端并非张量), 过程依然非常的复杂, 甚至比直接在自然标架下推导 Gauss-Codazzi 方程还要复杂。换言之, 如果我们不是仅仅需要一个形式的表达式, 而是需要计算出具体的坐标表达式甚至数值, 那么对于不少的问题, 经典标架和一般活动标架的复杂度, 相差并不大。

我们应该观察地更细致深入些: 经典的标架场, 比如 Frenet 标架, 或自然标架, 都是固定的; 而活动标架有很大的选取自由度。这也意味着, 有一些特定的情况下, 我们可以选取和所研究问题更贴合的特殊的活动标架, 来简化计算, 方便地得到显式的结果。

2.2 曲面上曲线的测地曲率 κ_g ——利用活动标架法证明 Gauss-Bonnet 公式

如果已经知道 $\mathbb{R}^3$ 中曲面 S 的方程为 $\vec{r}(u, v)$, 曲面上曲线 C 的参数方程为 $(u(s), v(s))$, s 为弧长参数。所谓的测地曲率定义为

$$\kappa_g = \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \cdot e_2 \quad (2.12)$$

这里 e_2 是将曲线的单位切向量 $\frac{d\vec{r}}{ds}$ 在切平面中逆时针旋转 90° 得到的。然而测地曲率是一个内蕴的几何量, 对于抽象的曲面, 没有参数方程 $\vec{r}(u, v)$, 就没有办法按照上述定义来进行计算了。

现在我们换用活动标架法从内蕴几何角度来计算测地曲率 κ_g 。首先将定义式(2.12)转化为内蕴形式:

$$\kappa_g = (\nabla_{e_1} e_1) \cdot e_2$$

这里 ∇ 是表面上的协变导数, 也就是表面上与诱导度量相容的无挠联络, e_1 是曲线的单位切向量场, e_2 的定义和之前相同。根据(1.8)式, 有 $\nabla_{e_1} e_1 = \omega_1^2(e_1)e_2$, 于是 $\kappa_g = \omega_1^2(e_1)$ 。由于 e_1 是单位向量, s 是弧长参数, 于是可以进一步改写为

$$\kappa_g = \frac{\omega_1^2|_C}{ds} \quad (2.13)$$

注意, 由于曲线是一维的, 两个 1-形式的比值是有意义的。

注意到表面上的单位正交标架场是非常多的, 并不局限与取上述特定的 $\{e_1, e_2\}$, 我们自然也希望在一般的正交单位标架上来计算测地曲率。接下来我们试着推广上述测地曲率的计算公式, 不妨记曲面上一般的单位正交标架场为 $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$, 相应的对偶标架场 $\tilde{\theta}^1, \tilde{\theta}^2$; 同时记曲线 C 的切向与 $\tilde{e}_1$ 的夹角为 $\tilde{\phi}$ 。由题设可知, e_1 与 $\tilde{e}_1$ 的夹角, e_2 与 $\tilde{e}_2$ 的夹角均为 $\tilde{\phi}$ (默认由 $\tilde{e}_1$ 逆时针方向转向 e_1), 于是

$$e_1 = \cos \tilde{\phi} \tilde{e}_1 + \sin \tilde{\phi} \tilde{e}_2, \quad e_2 = -\sin \tilde{\phi} \tilde{e}_1 + \cos \tilde{\phi} \tilde{e}_2$$

自然

$$\theta^1 = \cos \tilde{\phi} \tilde{\theta}^1 + \sin \tilde{\phi} \tilde{\theta}^2, \quad \theta^2 = -\sin \tilde{\phi} \tilde{\theta}^1 + \cos \tilde{\phi} \tilde{\theta}^2$$

此时

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= -\sin \tilde{\phi} d\tilde{\phi} \wedge \tilde{\theta}^1 - \cos \tilde{\phi} \tilde{\omega}_2^1 \wedge \tilde{\theta}^2 + \cos \tilde{\phi} d\tilde{\phi} \wedge \tilde{\theta}^2 - \sin \tilde{\phi} \tilde{\omega}_1^2 \wedge \tilde{\theta}^1 \\ &= d\tilde{\phi} \wedge (-\sin \tilde{\phi} \tilde{\theta}^1 + \cos \tilde{\phi} \tilde{\theta}^2) - \tilde{\omega}_2^1 \wedge (-\sin \tilde{\phi} \tilde{\theta}^1 + \cos \tilde{\phi} \tilde{\theta}^2) \\ &= -(-d\tilde{\phi} + \tilde{\omega}_2^1) \wedge \theta^2 \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} d\theta^2 &= -\cos \tilde{\phi} d\tilde{\phi} \wedge \tilde{\theta}^1 + \sin \tilde{\phi} \tilde{\omega}_2^1 \wedge \tilde{\theta}^2 - \sin \tilde{\phi} d\tilde{\phi} \wedge \tilde{\theta}^2 - \cos \tilde{\phi} \tilde{\omega}_1^2 \wedge \tilde{\theta}^1 \\ &= -d\tilde{\phi} \wedge (\cos \tilde{\phi} \tilde{\theta}^1 + \sin \tilde{\phi} \tilde{\theta}^2) - \tilde{\omega}_1^2 \wedge (\cos \tilde{\phi} \tilde{\theta}^1 + \sin \tilde{\phi} \tilde{\theta}^2) \\ &= -(d\tilde{\phi} + \tilde{\omega}_1^2) \wedge \theta^1 \end{aligned}$$

从而有

$$\omega_1^2 = d\tilde{\phi} + \tilde{\omega}_1^2$$

于是

$$\kappa_g = \frac{(d\tilde{\phi} + \tilde{\omega}_1^2)|_C}{ds} = \frac{d\tilde{\phi}}{ds} + \frac{\tilde{\omega}_1^2|_C}{ds} \quad (2.14)$$

注意到

- (2.13)式确实是(2.14)式的特殊情况 ($\tilde{\phi} \equiv 0$);
- (2.14)式在整张曲面上都成立, 和曲面上的参数系选取无关; 这一点非常关键, 在我们接下来的讨论中起着至关重要的作用。

在使用这一表达式具体计算测地曲率前, 我们先来看下这一公式更重要的一个作用: 证明 Gauss-Bonnet 公式。一方面, 易知

$$\kappa_g ds = d\tilde{\phi} + \tilde{\omega}_1^2|_C$$

沿单连通区域上的简单闭曲线 C 积分, 有

$$\oint_C \kappa_g ds = \oint_C d\tilde{\phi} + \oint_C \tilde{\omega}_1^2$$

另一方面, 由活动标架的结构方程

$$d\tilde{\omega}_1^2 = \tilde{\Omega}_1^2 = -K\tilde{\theta}^1 \wedge \tilde{\theta}^2$$

以及 Green 公式, 有

$$\oint_C \tilde{\omega}_1^2 = \iint_D d\tilde{\omega}_1^2 = -\iint_D K d\sigma$$

这里 $d\sigma = \tilde{\theta}^1 \wedge \tilde{\theta}^2$ 就是曲面的面积元。于是

$$\oint_C \kappa_g ds + \iint_D K d\sigma = \oint_C d\tilde{\phi}$$

如果记 α_i 为曲线 C 在角点 s_i 处的外角, 则根据曲线的 Hopf 旋转指标定理, 可以证明 (具体过程可以参考^[4])

$$\oint_C d\tilde{\phi} = 2\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

于是最终证明了单连通区域上简单闭曲线的 Gauss-Bonnet 公式:

$$\oint_C \kappa_g ds + \iint_D K d\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

以上是活动标架法下的证明思路。我们自然会问，如果不使用活动标架法，而是早先的自然标架，能否证明 Gauss-Bonnet 公式？实际上，熟知本科微分几何内容的同学，对使用 Liouville 公式来证明 Gauss-Bonnet 公式一定熟稔于胸。为了更好地对比，接下来简述其证明梗概。

首先，假定在曲面 S 的一个邻域内存在正交参数系 (u, v) ，此时曲面的第一基本形式可以写为 $E(du)^2 + G(dv)^2$ ，若记曲线 C 与 u -曲线的夹角为 ϕ ，则有所谓 Liouville 公式。

$$\kappa_g = \frac{d\phi(s)}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(E_v \frac{du}{ds} - G_u \frac{dv}{ds} \right)$$

熟悉微积分的同学一眼就可以看出，大致上，只要对公式左右两端同时关于简单闭曲线进行积分即可。

- 一方面，之前已经解释过 $\oint_C \frac{d\phi(s)}{ds} ds$ 就是右端的 $2\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i$ ；
- 另一方面，

$$\oint_C \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(E_v \frac{du}{ds} - G_u \frac{dv}{ds} \right) ds = \oint_C \frac{1}{2\sqrt{EG}} (E_v du - G_u dv)$$

对于分段光滑闭曲线，依然可以使用 Green 公式，将上述第二类曲线积分转化为所围区域的二重积分：

$$-\frac{1}{2} \iint_D \left(\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v \right) du dv$$

注意到曲面的面积元实际上为 $d\sigma = \sqrt{EG} du dv$ ，上式即为

$$\iint_D -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{\sqrt{E_v}}{\sqrt{G}} \right)_v + \left(\frac{\sqrt{G_u}}{\sqrt{E}} \right)_u \right) d\sigma$$

最后，由于正交参数系下

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{\sqrt{E_v}}{\sqrt{G}} \right)_v + \left(\frac{\sqrt{G_u}}{\sqrt{E}} \right)_u \right)$$

移项后即得左端的 $\iint_D K d\sigma$ 。

最核心的想法和使用活动标架法证明都是一样的：Green 公式。只是活动标架法中的使用的是高级的微分形式版本的 Green 公式；Liouville 公式方法中使用的是初级的多变量微积分版本的 Green 公式。这样的思路大方向是可行的，但具体操作起来，很快就会遇到如下的问题：我们的证明思路依赖于 Liouville 公式，Liouville 公式存在的前提是取了正交参数系。但是不要忘记，正交参数系的存在是局部的，一个正交参数系，并不一定可以覆盖整个闭曲线所围成的区域。也就是直接积分的方法只能适用简单闭曲线落在正交参数系邻域内的情形。解决曲线 C 所围的区域 D 不能包含在曲面 S 的一个具有正交参数系的坐标域内这一问题，可以用分段光滑的曲线将区域 D 分割成有限个单连通的小区域，使得每一个小区域

- 都落在 S 的某个具有正交参数系的坐标域中；
- 每一个小区域的边界仍然是一条简单闭曲线。

于是，在每个小区域都可以进行积分，再将得到的积分式做和，分析区域 D 内部边上的测地曲率的积分，以及角点处的转角，最终也可得单连通区域上关于简单闭曲线的 Gauss-Bonnet 公式。篇幅所限，这一部分内容就不展开论述了，感兴趣的同学可以参考^[5]的 6.6 节。

通过比较两种不同的证明方法，很容易看到活动标架法的优点：

- 由于活动标架法以微分形式作为承载体，而微分形式版本的公式（Green 公式，Gauss 曲率表达式）要比局部坐标系版本的公式简洁太多；
- 活动标架都是在流形上整体存在的，其联络形式和相关公式也是整体的，与坐标系的选取无关。因此使用活动标架法来研究流形的整体性质有着天然的优势。

2.3 曲面上曲线的测地曲率 κ_g ——具体计算

在这一小节中，我们通过计算曲面上具体的一条曲线的测地曲率 κ_g ，来体现活动标架场法在具体计算中的优势。

例 1. 设曲面 S 的第一基本形式为 $I = (du)^2 + (u^2 + a^2)(dv)^2$ ，求其上曲线 $C: u + v = 0$ 的测地曲率。

从曲面第一基本形式的样式中不难看出，这是正交参数系，可以使用 Liouville 公式。但用 Liouville 公式来具体计算测地曲率 κ_g 是很不方便的，原因在于夹角 $\phi(s)$ 的计算非常复杂。

自然想到使用活动标架法。同样，由于(2.14)式中的夹角 $\tilde{\phi}$ 也不容易计算，我们选择(2.13)这一特殊的表达式来计算测地曲率。取上文中提到的特殊的活动标架 $\{e_1, e_2\}$ ，其中 e_1 是曲线 C 的单位切向量。接下来显式写出 $\{e_1, e_2\}$ 的表达式。曲线 C 的切向量¹为 $\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}$ 。这不是单位向量，根据第一基本形式，单位化得到：

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+u^2}} \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

不难得到和 e_1 垂直的单位向量：

$$e_2 = \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{\sqrt{1+a^2+u^2}} \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{a^2+u^2} \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

如果直接在切空间上计算联络系数 ω_1^2 ，则需要用到联络与度量相容，即 Christoffel 符号，这样的话和使用正交参数系下的 Liouville 公式的区别就微乎其微了。

所以，接下来，我们从切标架场转换到余切标架场，并将求联络转化为求外微分。具体来看，让第一基本形式 I 分别作用在 e_1, e_2 上，可得 1-形式

$$\theta^1 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+u^2}} du - \frac{a^2+u^2}{\sqrt{1+a^2+u^2}} dv; \quad \theta^2 = \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{\sqrt{1+a^2+u^2}} (du + dv)$$

我们选择先对 θ^1 进行外微分（下文会说明为何一定要先对 θ^1 外微分）

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= - \left(\frac{2u}{\sqrt{1+a^2+u^2}} - \frac{u(a^2+u^2)}{(\sqrt{1+a^2+u^2})^3} \right) du \wedge dv \\ &= - \frac{u(2+a^2+u^2)}{(\sqrt{1+a^2+u^2})^3} du \wedge dv \\ &= - \frac{u(2+a^2+u^2)}{\sqrt{a^2+u^2}(1+a^2+u^2)} du \wedge \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{\sqrt{1+a^2+u^2}} (du + dv) \\ &= - \frac{u(2+a^2+u^2)}{\sqrt{a^2+u^2}(1+a^2+u^2)} du \wedge \theta^2 \end{aligned}$$

对比(1.11)式，不难得到²

$$\omega_2^1 = \frac{u(2+a^2+u^2)}{\sqrt{a^2+u^2}(1+a^2+u^2)} du + c(u, v)\theta^2$$

其中， $c(u, v)$ 是待定的函数。如果要得到 $c(u, v)$ 的表达式，可以对 θ^2 也求外微分，比较两式后可得（具体运算可参见附录A）。然而测地曲率 κ_g 的表达式中 ω_1^2 是要限制在曲线上的， θ^2 天然限制在曲线 C 上为零，实际上完全没有必要知道 $c(u, v)$ 的具体表达式。这同时回答了之前的多个问题：

1. 我们选择对 θ^1 而不是 θ^2 进行外微分，原因就在于如果对 θ^2 进行外微分，得到的 ω_1^2 中的余项就变成了 $d(u, v)\theta^1$ 的形式，限制在曲线 C 上余项不为零，必须要具体求出系数 $d(u, v)$ 的表达式，运算量大增。

¹由于曲面 S 是一个抽象曲面，没有参数方程 $\vec{r}(u, v)$ ，使用 $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ 代表切向量并不合适，我们转而分别使用内蕴的 $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$ 来表示 u, v -曲线的切向量。

²这里使用外微分 d 运算显然比联络 ∇ 要简便，但同时要付出由原来的张量积 $\otimes$ 换做外积 $\wedge$ 的代价。由于外积的反对称性，这里并不能确定联络系数，而是会差一个余项

2. 求外微分运算远远比求联络运算简单, 且外微分在黎曼联络的情况下可以替代求联络, 这也是活动标架法中, 最终使用外微分, 而非联络, 来表达标架场运动公式的根本原因。

最后, 我们来看

$$\omega_1^2|_C = -\omega_2^1|_C = -\frac{u(2+a^2+u^2)}{\sqrt{a^2+u^2}(1+a^2+u^2)}du$$

$$ds = \sqrt{1+a^2+u^2}du$$

于是

$$\kappa_g = -\frac{u(2+a^2+u^2)}{\sqrt{a^2+u^2}(\sqrt{1+a^2+u^2})^3}$$

整个过程有一定运算量, 但依然要比正交参数系下的 Liouville 公式要简单的多。更重要的是, 活动标架法完全不需要找到曲面的正交参数系 (显式地求出一般曲面上的正交参数系是非常复杂的一件事), 对于第一基本形式有交叉项的曲面, 同样适用。

更多的利用活动标架法研究欧氏空间中曲线和曲面的例子, 大家可以参考^[5]。在更广的黎曼流形的子流形的研究中使用活动标架法, 可以参考^[6]。同时, 这本书^[6]也是国内少有的愿意仔细推导活动标架结构公式来龙去脉的研究生教材, 非常值得一读。

3 活动标架法的理解

3.1 活动标架法的灵活性

在之前的若干例子当中, 我们已经能看到活动标架法的众多优点。笔者个人认为, 活动标架法最核心的优势, 是它的灵活性。为了大家能对此有更深刻的认识, 我们从更宏观的视角来梳理一下利用活动标架法来求解曲面上曲线测地曲率的逻辑框架。曲面上的单位正交标架场是非常多的, 不妨记曲面上一般的单位正交标架场为 $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$, 相应的对偶标架场 $\tilde{\theta}^1, \tilde{\theta}^2$; 同时记曲线 C 的切向与 $\tilde{e}_1$ 的夹角为 $\tilde{\phi}$ 。

- 已经知道, 在任一个活动标架 $\tilde{\theta}^1, \tilde{\theta}^2$ 下, 都可以求得测地曲率的表达式为

$$\kappa_g = \frac{d\tilde{\phi}}{ds} + \frac{\tilde{\omega}_1^2|_C}{ds} \quad (3.1)$$

- 特别的, 如果给定的曲面第一基本形式为 $I = E(du)^2 + G(dv)^2$, 也就是正交参数系, 此时取

$$\tilde{\theta}^1 = \sqrt{E}du, \quad \tilde{\theta}^2 = \sqrt{G}dv$$

之前已经计算过, 类似于(2.11), 有

$$\tilde{\omega}_1^2 = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}du + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}dv$$

且 $\tilde{\phi} = \phi$ 。代入(3.1)式即得到正交参数系下的 Liouville 公式

$$\kappa_g = \frac{d\phi(s)}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(E_v \frac{du}{ds} - G_u \frac{dv}{ds} \right)$$

- 在所有的单位正交标架场中, 选择自然标架的单位化并不是最佳选择, 一来计算复杂, 二来需要自然标架本身就正交。我们有更好的选择, 即取曲线的单位切向量 e_1 和逆时针旋转 90° 后得到的 e_2 作为标架场。此时的 $\tilde{\phi} \equiv 0$, 于是(3.1)式变为

$$\kappa_g = \frac{\omega_1^2|_C}{ds}$$

也就是我们在例1中具体使用的公式, 比使用其他的标架都要简便。而且, 这一标架, 放在欧氏空间中来看, 本质上就是本科微分几何课程中常用到的曲面上和曲线相容的标架场 $\{e_1, e_2, \vec{n}\}$ 。

概括如下：

流形上的标架场有很多，选取的自由度非常大。我们可以根据实际选取最方便解决问题的那一个。

而且，私以为，这也是为什么把“Moving frame”翻译为活动标架法的原因。正常直译应该是“运动标架场”，“运动”强调的是标架场而非固定点的单个标架；而翻译为“活动”，其实是要强调“活动”=“灵活”，也就是标架场有非常多选择余地的含义。但是这样的翻译也会让初学者产生一定的误解，就是觉得活动标架场在整个求解过程中一直都是“活动”“变动”的；事实是，一旦取定后，标架场在每一点就确定下来了。所谓的“灵活”性，只在选取标架场前存在（涉及到张量场的计算时，确实计算过程中标架场也可以变动，不影响运算结果，当然，这是另一个层面的问题）。

3.2 如何选取合适的标架场

现在我们来解决另外一个维度的问题，实际上也是进一步理解活动标架法的关键：已经知道了活动标架有很多种不同的选取，那么在如此众多的标架场（流形上主丛的截面，是一个非常大的空间）中，到底哪一个最方便于我们进行计算呢？或者有没有一种准则，可以通过这一准则，找到最合适的那一个标架场呢？

我们还是回到 2.1 和 2.2 两小节中的例子来看。在研究空间中的曲面 S 时，我们在空间中选取的标架场为 $\{e_1, e_2, \bar{n}\}$ ，其中 e_1, e_2 为曲面的单位正交切标架场，对偶标架为 $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ ，于是有 $\theta^3|_S \equiv 0$ ；在研究曲面 S 上曲线 C 的测地曲率时，我们选取的标架场为 $\{e_1, e_2\}$ ，其中 e_1 是曲线 C 的单位切向量场， e_2 为 e_1 逆时针旋转 90° ，对偶标架为 θ^1, θ^2 ，于是有 $\theta^2|_C \equiv 0$ 。

不难看出，这两个问题都属于子流形几何范畴。使用活动标架研究子流形时，一般来说标架都有固定的取法，即子流形上的单位正交切标架场 $\theta^1, \dots, \theta^k$ 再加上垂直补空间上的单位正交标架场 $\theta^{k+1}, \dots, \theta^n$ 。而这样取的好处就在于：限制回子流形，有 $\theta^{k+1} \equiv \dots \equiv \theta^n \equiv 0$ ，大大化简我们的计算。这一特质在之前的两个例子当中也可以明显地看到。

也就是说，虽然名字叫做“活动标架法”，但是在具体某一个问题的研究中，为了让计算简单，标架场的选取几乎是固定的¹，而不是像理论上那样可以任意变动，并不如大家想象中那般“活络”。

然而，也恰恰是因为理论上选取的灵活性，保障了我们一定可以选到最合适的那个确定的标架场。

后记

回过头来审视，从活动标架法的内在逻辑来看，也许根本上，在本科微分几何课程中安排活动标架法的内容本身就不是一个合理、自洽的选择。系统性地引入活动标架法，需要在微分流形，黎曼几何课程之后。没有外微分，联络这些概念，就无法理解活动标架法的来龙去脉，即便可以直接在平坦的三维欧氏空间中使用，也往往流于表面。

某种意义上讲，本文所作的工作，就是给这样不甚合理的课程安排打了个补丁。把本科微分几何中的活动标架法与研究生微分几何中的活动标架法两部分的内容对接起来，同时做了一些扩展和阐释；可以看作在本科生教材^[5,4]和研究生教材^[6]之间搭建了一座桥梁，方便大家更轻松地完成。而不是像十多年前的笔者一样，虽然本科以及研究生微分几何教科书上的每一个汉字，每一个公式，甚至每一步推导，每一条定理的证明都能看懂，但就是理解不了何为活动标架法，在一片迷雾中蹉跎。以致于在从事本科和研究生微分几何教学多年之后，才花时间把活动标架法从源头到应用仔细梳理清晰。

诚然，笔者水平有限，对活动标架理解自然也非常粗浅，虽然已尽力参阅相关文献，可能仍对部分内容的理解有偏差。但是相比于后来的学子重复走弯路，在活动标架法的学习中浪费大量时间，我觉得

¹ 特别的，曲面上有 Darboux 标架场，是正交曲率线标架场的单位化，完全确定

这篇文章，只要能对大家迅速地通关已经非常成熟的活动标架法理论有帮助，就是值得的。我个人的露拙微不足道，也欢迎大家批评指正。

附录

A 计算例1中曲面的联络系数

在计算好 θ^1 的外微分之后，对 θ^2 也进行外微分

$$\begin{aligned} d\theta^2 &= \left(\frac{u}{\sqrt{a^2+u^2}\sqrt{1+a^2+u^2}} - \frac{u\sqrt{a^2+u^2}}{(\sqrt{1+a^2+u^2})^3} \right) du \wedge dv \\ &= \frac{u}{\sqrt{a^2+u^2}(\sqrt{1+a^2+u^2})^3} du \wedge dv \\ &= -\frac{u}{(\sqrt{a^2+u^2})^3(1+a^2+u^2)} du \wedge \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2+u^2}} du - \frac{a^2+u^2}{\sqrt{1+a^2+u^2}} dv \right) \\ &= -\frac{u}{(\sqrt{a^2+u^2})^3(1+a^2+u^2)} du \wedge \theta^1 \end{aligned}$$

即

$$\omega_1^2 = \frac{u}{(\sqrt{a^2+u^2})^3(1+a^2+u^2)} du + d(u, v)\theta^1$$

由于 $\omega_2^1 + \omega_1^2 = 0$ ，于是有

$$\frac{u}{(\sqrt{a^2+u^2})^3(1+a^2+u^2)} ((a^2+u^2)^2 + 2(a^2+u^2) + 1) du + c(u, v)\theta^2 + d(u, v)\theta^1 = 0$$

即

$$-\frac{u(1+a^2+u^2)}{(\sqrt{a^2+u^2})^3} du = c(u, v)\theta^2 + d(u, v)\theta^1$$

不难解得

$$\begin{cases} c(u, v) = -\frac{u\sqrt{1+a^2+u^2}}{a^2+u^2} \\ d(u, v) = -\frac{u\sqrt{1+a^2+u^2}}{(\sqrt{a^2+u^2})^3} \end{cases}$$

相当于

$$\omega_2^1 = \frac{u}{\sqrt{a^2+u^2}} \left(\frac{du}{1+a^2+u^2} - dv \right) = -\omega_1^2$$

可见确定联络系数远远比单纯进行外微分运算要复杂得多。如果仅仅是要求曲线的测地曲率，显然没有必要去求解曲面的联络系数。

参考文献

- [1] WEYL H. Cartan on groups and differential geometry[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1938, 44: 598-601.
- [2] CARTAN E J, LERAY J L. La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile[M]//leçons professées à la Sorbonne: No. 18. Gauthier-Villars, Paris: Cahiers Scientifiques, 1937: 6-269.

- [3] GRIFFITHS P A. On cartan's method of lie groups and moving frames as applied to uniqueness and existence questions in differential geometry[J]. Duke Mathematical Journal, 1974, 41: 775-814.
- [4] 彭家贵, 陈卿. 微分几何[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2021.
- [5] 陈维桓. 微分几何[M]. 第二版. 北京: 北京大学出版社, 2017.
- [6] 吴传喜, 李光汉. 子流形几何[M]. 北京: 科学出版社, 2003.