

# 微分几何入门

——微分方程和解析函数视角下的曲线和曲面

张玮

华南理工大学

V1.4

2026年6月13日



# 前言

本书讨论的内容是古典微分几何，也就是三维欧氏空间中的曲线和曲面。在笔者的印象中，大概二十年前，国内只有少部分综合性大学，师范类大学，以及极少的理工类大学的数学系（或应用数学系）会开设本科生的微分几何课程。换言之，当时这门课程所服务的对象，是将来有望成为数学科研工作者的数学专业本科生。

随着各行各业的发展，特别是近年来信息技术的爆发，越来越多的学科需要微分几何的知识，不限于力学，机械，计算机等领域。如何让这些非数学专业的人士更容易掌握微分几何，变成了笔者撰写这一讲义的初衷。此外国内还有很多高校的数学系，在本科阶段并不开设微分几何这门课程，而当他们进入研究生阶段后，却要学习微分流形，黎曼几何等课程，要想达到较好的学习效果，也需要自己在课下补充本科微分几何的知识。

还有一个更重要的动机，是笔者希望这一讲义能够厘清多年来关于微分几何教学的困惑。不论是在我读书时，还是授课时，周围的同学和所教的学生，都反映这门课很难学。然而和微分几何领域的科研人员交流时，很多人都表示本科微分几何的内容太浅，没什么用处，还不如不学本科的微分几何，直接从微分流形，黎曼几何学起。

是什么原因造成了这样的反差？也许有人会说这明显就是幸存者偏差，一路读到博士，毕业后还能继续苦心孤诣做学问，本就不是寻常人等；况且孰能生巧，回过头来看自己以前学过的东西，自然觉得简单。然而并没有数学工作者认为微积分，线性代数太简单，完全不用学，虽说放在整个数学的框架中，微积分和线性代数确实不算难。

我想，根本原因在于微分几何这门课程它是有内核的。不难或者难，却决于是否掌握了核心思路。就像一部手机，装了非常多的应用，自然很卡顿。去除掉所有的应用，只剩下操作系统，运行速度就会快很多。更进一步，要是只留下操作系统的内核，那么可想而知快的起飞。

微分几何的内核是什么呢？就是我们的副标题：微分方程。类比与解析几何，只要能学好线性代数，把矩阵和行列式应用于坐标运算，一气呵成。当然，微分几何远比解析几

何要复杂，微分方程也不能等同于微分几何，但是，将微分方程应用于几何问题的研究，仍然是微分几何这门课程最最根本的主线。这份讲义的目的，便是花最小的代价，让读者掌握这一主线。

讲义选择和组织材料，便遵循了这样的原则：只论述曲线和曲面理论中最基本，最核心的内容。比如，曲线和曲面在一点处的展开，不能说和泰勒展开一模一样，也无本质区别，简单到可以一看便知，我们这里就不花时间讨论。而诸如曲线的包络，这些过于专门的论题，和我们关注的主线距离较远，我们也略去。总之，保留可以反应微分几何主旨的最少的内容。我想，这不论是对初学微分几何的本科生，还是其他理工科的研究生，都是有益的。

当然，有一个例外，就是曲面和解析函数的关联（主要集中在第九章）。如果严格按照“最少”的思路来操作，这部分内容不讲授也是可以的。然而，我个人觉得这应该是整个曲面理论中最精妙的部分，和黎曼面，复几何等更深入的内容有着密切的关联。不讲授的话，就好比去掉了一颗种子的胚芽，扼杀了它成长为参天大树的可能，单纯为了学习微分几何而学习微分几何，而没有把微分几何作为数学这一有机整体的一部分加以认知和揣摩。

除了材料的选取之外，我个人觉得讲义还有以下五个主要的特点，至少是我希望做到的目标：

1. 主线清晰：和其他的数学课程不太一样，本科微分几何的研究曲面的视角是变化的：从外在到内蕴，从局部到整体（当然，有不少高校数学系的教学内容仅仅限于曲面的外在局部性质，也就是曲面的第一和第二基本形式外加曲面论基本定理。不过这样的微分几何毕竟不是微分几何的全貌，也没有触及到微分几何的核心）。这样复杂的变化，使得一部分同学在学习了一整个学期，甚至一年的微分几何后，都不清楚微分几何的核心研究对象，或者不明白为什么一定要从外在的、局部的视角，转换到内蕴的、整体的视角。我们的解决方法也很直接，就是从标题目录、内容安排上完全契合研究视角的变化，所有外在的、局部的内容都放在前部，内蕴的、整体的内容都放在后部；或者更直白地说，只看我们讲义的目录，就能很大程度上掌握微分几何这门课程的主线。

2. 充分交代和其他学科之间的关联：几何学科有一个特点，就是必须和其他学科结合才会有深刻美妙的结论出现。我们当然知道，微分几何要用到微积分和微分方程，本讲义当然也不例外，充分阐释了各种几何对象背后所对应的微分方程。此外，很多同学往往会忽视的一点是，曲面和复变函数的关系也非常的密切，本讲义首先会在曲面上的等温参数系，保角映射和复平面的对应的这一部分初步探讨和解析函数的关联；接着在极

小曲面，常平均曲率曲面的内容中，进一步深入探讨拉普拉斯算子，解析函数在研究曲面中的应用。小而言之，这样处理能让大家在学习微分几何的同时，加深对常微分方程，偏微分方程，复变函数的理解和掌握；大而言之，以后在学习几何分析，复几何这些课程时完全不会有陌生的感觉，和高阶的数学课程完美衔接。

3. 方便同学自学，也是我们编撰这份讲义的初衷：

- 这其实也是第一点主线清晰的后果，我们这份讲义的内容安排严格遵循难度由低到高的原则，从最简单的曲面的外在局部理论（相当于解析几何添加了微积分和线性微分方程），慢慢过渡到曲面的内蕴局部理论（非线性微分方程），最后到达终极目标，曲面的整体性质（包含内蕴和外在，除了用到微分方程，还要和拓扑建立关联）。不同学习能力，不同学习目标的同学，完全可以在合适的阶段停下来，所掌握足够自己使用的知识即可。
- 每个概念的引入，都详细交代了背景和几何直观；其中重要的概念，都用作者自己的理解，把它的来龙去脉介绍清楚，比如空间曲线的挠率，就可以看作是曲线密切平面法向量转动的快慢。特别重要的概念，还添加了注解，方便大家掌握，进而构建完整的知识体系。但是，本科微分几何中的很多概念并不自洽，比如微分形式，实际上是需要引入流形，以及流形上的张量场才能严格定义的。对于这类概念，我们就是点到而止，不去过多纠缠细节。
- 内容严格局限于本科中低年级，也就是所谓的“低”观点。这里可能会有争议，“低”观点到底算是优点还是缺点，只能是仁者见仁，智者见智。但至少从这本讲义服务的对象的角度来看，我觉得“流形”就应该放在专门的微分流形课程中来学习，初级的微分几何课程没有必要大包大揽；更何况相较之下，探讨微分几何和解析函数的关联，一来更有趣，二来还是本科低年级知识范围内。我们在讲义中也稍微提及了流形这一概念的雏形，为大家将来的深入学习做好衔接。另外还要提一下，我们讲义中没有使用活动标架法，根本原因也是活动标架法其实是有很高门槛的，需要以微分流形，黎曼联络，甚至李群作为基础。
- 完整交代前置知识。根据笔者教学的经验，很多同学觉得微分几何难学，很大程度上是因为自身的微分方程掌握的程度不够，特别是常微分方程。某些情况下，解析几何或是高等代数中的一些概念理解的不到位，也会造成学习的困难。简而言之，基础不牢固，是数学专业学生学习这一科目最大的障碍，更不用说工科专业的学生。所以讲义在编写时，涉及到需要准备知识的情况，往往都不厌其烦，把这些知识重

新叙述一遍。基础较好的同学，可以略过这些内容，比如第三章当中的双线性函数与二次型，内积空间与度量矩阵，二次型对应的自伴随线性变换，第四章当中一阶线性偏微分方程组的解的存在性与唯一性等。

4. 尽量使用现代的记号和讲法，方便学生无缝接轨本科高年级或是研究生阶段的微分流形，黎曼几何课程。比如曲面的第一、第二基本形式。笔者在初学的时候，一头雾水，什么是“形式”？只能凭感觉认定为函数的微分；这样的认知不能说完全不正确，但是也对后续的学习几乎没有任何正面的帮助（如果说使读者概念混淆不清的负面作用，那是必须有，而且还很强）。所以，我认为不如直接把第一基本形式定义为度量，甚至是张量，而第一基本形式经典表达式就是张量在局部坐标系下的表达式。与此配套，我们引入第二基本形式的时候，也是通过类似于子流形中形状算子的方式引入的，这样第二基本形式天然就是一个切空间上的对称双线性函数（同样是张量）。总之，笔者个人觉得要相信读者的能力，只要是有抽象逻辑思维，探索精神的学生，理解度量，对称双线性函数这些概念没有任何难度。本来数学就是在一定程度上越抽象越有力，定义成具体的微分式子反而不利于学生掌握与理解，远不如直接采用研究生阶段的记号和讲法，一方面也不难理解；另一方面和后续课程无缝接轨。

5. 完备的附录和参考文献。这其实也是为广大读者自学而准备的。先来看一下参考文献，坦白地说，国内很多教材的参考文献都是聊胜于无。本讲义中的参考文献，大致分为三类，一类列出了微分几何需要的前置知识，包含了数学分析，高等代数，常微分方程等教材，及其具体需要参考的章节；第二类，列出了后续进一步提升所要阅读的文献，包含了微分流形，黎曼几何，复几何，黎曼曲面，几何分析，子流形几何等方向的参考书；第三类，由于篇幅限制，以及为了主线清晰，我们这份讲义中很多有意义的曲面内容并未涉及，故列出了相应微分几何教材作为参考。毫不夸张地说，参考文献囊括了从本科数学专业到几何方向研究生这两阶段的大部分相关教材。同时，我们在选取参考文献时，本着以经典教材为前提，能用最新的就用最新的，能用中文的就不用英文的，方便同学们查阅。再来看一下附录。本讲义附录中的内容大体也可以分为三类，一类是所谓的“一题多解”，当然肯定是要换个更高，更一般的角度，重新梳理讲义正文中的内容。这一类是所有附录中最不关键的内容。一类是对微分几何前置知识的梳理和夯实。众所周知，本科微分几何需要用到很多微分方程的内容，这些内容在常微分教材或是偏微分教材中会出现，但是往往是更一般的形式，或者是和微分几何中所用到形式还有一定的差异。如果仅仅是让读者自行查阅参考书并推导的话，效率不能说高，甚至就是零。所以我们把这些内容写在了附录内，比如二元一次微分式的积分因子，弥补前置课程内容和我们这

门课程之间的缺口。这一类也是所有附录中最关键的内容。最后一类是对本科微分几何知识的延申和拔高，主要涉及一些复几何的内容。其实，由于没有现成的内容作为参考，所以附录的撰写比正文的撰写还要花时间，很多内容都需要从头计算或证明。我个人觉得也许这些附录的内容没有正文重要，但是可能比正文更有趣，希望大家不要无视它们。

尽管我们这份讲义是用初级的古典微分几何语言组织材料的，但是这并不意味着讲义的内容与现代的微分流形，黎曼几何脱节。比如我们引入第二基本形式时，更贴近一般黎曼子流形形状算子的引入方式；介绍曲面上正交参数系的存在性时，就额外从微分形式的角度给出了更简明的说明。换言之，尽管并没有严格给出定义，但是在读完我们这份讲义之后，度量，微分形式，局部坐标系，复结构与复几何这些概念已经呼之欲出了。我相信在此基础上，进一步学习微分流形，黎曼几何，复几何时会倍感亲切，水到渠成。

总之，我们这本讲义的名称为《微分几何入门》，不论是从选材，还是撰写的方式来看，都恰如其名。它仅仅包含了最基本的内容，只能为大家学习微分几何的起步阶段提供帮助。就像火箭的助推器一样，真正要把载荷送入轨道，还需要一级甚至是二级的火箭。所以，我们这里也罗列一下这些更强力的火箭，供有志于把微分几何这门课程真正地学好的读者参考。

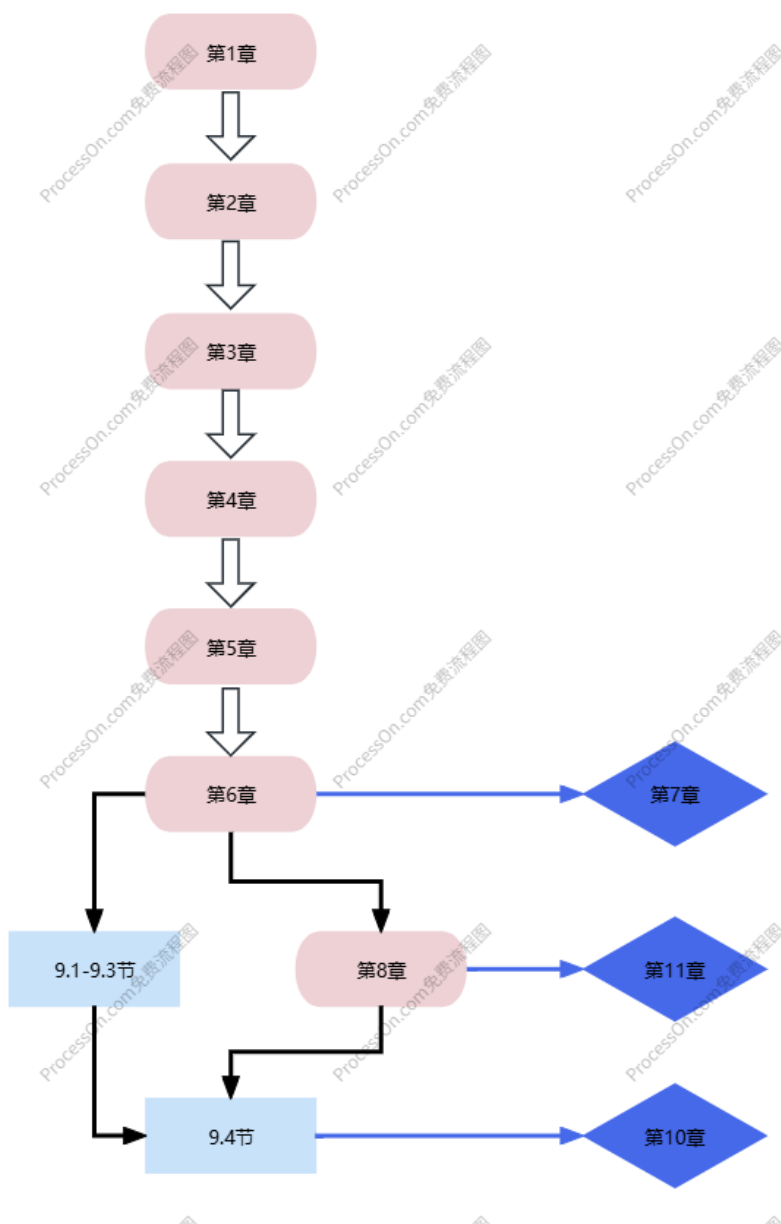
首推的是 Spivak 的 "A Comprehensive Introduction to Differential Geometry" 中的第三卷。这一卷的主要内容就是研究空间中的曲线和曲面。当然，它的观点相对激进一些，是你必须先有了微分流形的概念，才能顺利把教材读下来。其实，长远来看，这样的学习方式才是最高效的：一方面，流形概念本身并没有什么难度，难的是其上的计算；另一方面，这样才能让古典微分几何的内容更好地和现代微分几何接轨。

如果感觉 Spivak 的书难度过高，则可以考虑 Alfred Gray 的 "Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica"，易读性非常高，难度适中，特别适合初学者。这本教材的选材和 Spivak 的教材有一定差异，但是这两本教材有一个共性就是讲法非常现代，能和整体微分几何无缝接轨。

除了上述两本英文教材外，本讲义还主要参考了陈维桓老师的《微分几何》和彭家贵，陈卿老师的《微分几何》这两本经典的中文教材。实际上，本人微分几何的学习历程，也是以这两本教材作为起步的，在这里对几位作者老师表示深切的感谢。在撰写过程中，特别还要感谢华南理工大学电信学院的覃昊同学，和中国科学技术大学数学学院的黄天一同学。覃昊同学把他所发现的讲义中的众多错误整理成 ppt 发给我，特别是一处涉及到曲面上相容性条件的推导，非常关键和隐蔽；黄天一同学向我介绍了最新的作图方法，对我后续完善讲义中的插图有很大的帮助。还要感谢华南理工大学数学学院的

张浩然, 梁家浩, 马立凡, 骆泽玮, 中山大学数学学院的欧阳康炜, 以及知乎上众多读者, 指出讲义中的错误或提供改进建议。

古典微分几何最基本的曲线, 曲面论, 内容比较简单, 主线是比较清晰的。但是随着内容的深入, 各个知识点相互交织依赖, 学习的难度会大大提升。为了广大读者更好地使用本讲义, 我把各章节的依赖关系粗略地做了一个图表如下



其中, 粉色椭圆框和浅蓝色矩形都是核心的概念和工具, 只是浅蓝色矩形是一章中的某

些节，黑色箭头代表依赖关系；深蓝色菱形框是利用工具研究的几何的对象，其他内容不依赖与它们。

张玮



# 目录

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| 前言 .....                       | iii |
| 第一部分 曲线和曲面的局部理论——从外在到内蕴        | 1   |
| 第一章 曲线的不变量 .....               | 5   |
| 1.1 向量函数 .....                 | 5   |
| 1.1.1 向量函数的定义                  | 5   |
| 1.1.2 向量函数的性质                  | 6   |
| 1.2 正则参数曲线 .....               | 11  |
| 1.2.1 参数曲线                     | 11  |
| 1.2.2 参数曲线的正则性                 | 12  |
| 1.2.3 参数变换和容许参数变换              | 13  |
| 1.2.4 行星轨道——参数曲线的实际例子          | 14  |
| 1.3 曲线的弧长, 曲率和挠率 .....         | 16  |
| 1.3.1 曲线的弧长                    | 16  |
| 1.3.2 曲线的曲率                    | 18  |
| 1.3.3 曲线的挠率                    | 19  |
| 本章注记 .....                     | 23  |
| 第二章 曲线论基本定理 .....              | 25  |
| 2.1 Frenet 标架及其运动公式 .....      | 25  |
| 2.1.1 Frenet 标架                | 25  |
| 2.1.2 Frenet 标架的运动公式           | 26  |
| 2.1.3 Frenet 公式的初步应用           | 28  |
| *2.1.4 非弧长参数下的 Frenet 标架、曲率和挠率 | 30  |

|                                      |    |
|--------------------------------------|----|
| *2.1.5 Frenet 标架的代数本质                | 33 |
| 2.2 曲线的存在唯一性定理                       | 33 |
| 2.2.1 超定常微分方程组                       | 34 |
| 2.2.2 Frenet 标架场的存在性和唯一性             | 34 |
| 2.2.3 曲线的存在唯一性                       | 38 |
| *2.2.4 曲线基本定理中条件 $\kappa(s) > 0$ 的解读 | 39 |
| 2.3 平面曲线                             | 41 |
| 2.3.1 平面曲线的 Frenet 标架及其运动公式          | 41 |
| 2.3.2 平面曲线的存在唯一性                     | 42 |
| *2.3.3 相对曲率 $\kappa_r$ 的计算           | 44 |
| 2.4 重要的曲线                            | 45 |
| *2.4.1 渐伸线和渐屈线                       | 45 |
| 本章注记                                 | 52 |
| 第三章 曲面的第一和第二基本形式                     | 53 |
| 3.1 正则参数曲面                           | 53 |
| 3.1.1 参数曲面                           | 53 |
| 3.1.2 曲面的切向量、切平面、正则性和容许参数变换          | 54 |
| 3.1.3 正则参数曲面的性质                      | 57 |
| 3.2 第一基本形式                           | 58 |
| 3.2.1 双线性函数与二次型                      | 59 |
| 3.2.2 内积空间与度量矩阵                      | 60 |
| 3.2.3 曲面上曲线长度的计算                     | 62 |
| 3.2.4 第一基本形式的引入                      | 63 |
| 3.2.5 方向导数, 和以切向量为自变量的第一基本形式         | 64 |
| 3.2.6 张量视角下的第一基本形式, 及其在参数变换下的不变性     | 66 |
| 3.2.7 计算曲面的面积                        | 69 |
| 3.3 法曲率和第二基本形式                       | 70 |
| 3.3.1 曲面上曲线的法曲率与法截线                  | 70 |
| 3.3.2 曲面的法曲率                         | 73 |
| 3.3.3 第二基本形式                         | 74 |
| 3.3.4 曲面第二基本形式的几何意义                  | 77 |

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| *3.3.5 通过对法向量场求方向导数引入第二基本形式    | 81  |
| 3.4 主曲率和 Weingarten 映射 .....   | 83  |
| 3.4.1 主曲率                      | 84  |
| 3.4.2 二次型对应的自伴随 (对称) 线性变换      | 84  |
| 3.4.3 Weingarten 映射            | 88  |
| 3.4.4 Gauss 曲率和平均曲率            | 90  |
| *3.4.5 预定曲率曲面和 Monge-Ampère 方程 | 90  |
| 3.5 旋转面中的特殊曲面 .....            | 92  |
| 3.5.1 旋转面的参数方程                 | 92  |
| 3.5.2 常曲率旋转面                   | 93  |
| 3.5.3 旋转面中的极小曲面                | 96  |
| 本章注记 .....                     | 99  |
| 第四章 曲面论基本定理 .....              | 101 |
| 4.1 曲面的自然标架及其运动公式 .....        | 102 |
| 4.2 一阶线性偏微分方程组的解的存在性与唯一性 ..... | 107 |
| 4.3 曲面论基本方程的相容性条件 .....        | 109 |
| 4.3.1 解存在的必要性                  | 109 |
| 4.3.2 Gauss-Codazzi 方程中的对称性    | 113 |
| 4.3.3 解存在的充分性和解的唯一性            | 117 |
| 4.4 曲面的存在唯一性定理 .....           | 122 |
| 4.4.1 曲面的存在性                   | 123 |
| 4.4.2 曲面的唯一性                   | 127 |
| 4.4.3 曲面自然标架运动方程的初步应用          | 128 |
| 4.5 内蕴几何初探 .....               | 130 |
| 4.5.1 换个角度看 Gauss-Codazzi 方程   | 130 |
| 4.5.2 Gauss 绝妙定理               | 131 |
| 本章注记 .....                     | 133 |
| 第一部分注记 .....                   | 135 |

|  |     |
|--|-----|
| 第二部分 研究曲面的进阶工具                                   | 137 |
| 第五章 曲面上的曲线 1——向量场的积分曲线                           | 141 |
| 5.1 曲面上的切向量场和积分曲线                                | 141 |
| 5.1.1 切向量场的积分曲线                                  | 141 |
| 5.1.2 积分曲线和坐标的关联                                 | 144 |
| 5.2 参数曲线网与正交参数系                                  | 147 |
| 5.2.1 切标架场的两族积分曲线                                | 147 |
| 5.2.2 二元一次微分式积分因子存在性                             | 150 |
| 5.2.3 正交参数系                                      | 151 |
| 5.2.4 正交参数系下的 Christoffel 记号, Gauss 曲率和 Gauss 方程 | 152 |
| 5.3 曲率线和正交曲率线网                                   | 154 |
| 5.3.1 曲率线的定义, 存在性及其方程                            | 154 |
| 5.3.2 正交曲率参数网                                    | 158 |
| 5.3.3 正交曲率参数系下的 Gauss-Codazzi 方程                 | 159 |
| 5.4 曲面上的特殊曲线拾遗                                   | 160 |
| 5.4.1 曲面上的渐近线                                    | 161 |
| 本章注记   | 163 |
| 第六章 曲面间的映射                                       | 165 |
| 6.1 曲面之间的映射及其切映射                                 | 165 |
| 6.1.1 曲面间的映射                                     | 165 |
| 6.1.2 切映射  | 166 |
| 6.2 Gauss 映射                                     | 167 |
| 6.2.1 Gauss 映射及其切映射                              | 167 |
| 6.2.2 Gauss 映射的切映射和 Weingarten 映射的关系             | 169 |
| 6.3 保长映射   | 170 |
| 6.3.1 保长映射的判定法则                                  | 170 |
| 6.3.2 抽象曲面片的参数化                                  | 172 |
| 6.3.3 曲面间映射的适用参数系                                | 173 |
| 6.3.4 保长映射的存在性                                   | 174 |
| 6.3.5 Gauss 曲率在保长映射存在性中的应用                       | 177 |
| 本章注记   | 182 |

|  |     |
|--|-----|
| 第七章 可展曲面——利用现有工具研究曲面的典型示例 .....              | 183 |
| 7.1 可展曲面的引入 .....                            | 183 |
| 7.1.1 直纹面 .....                              | 183 |
| 7.1.2 可展曲面的定义 .....                          | 185 |
| 7.2 可展曲面的性质与应用 .....                         | 186 |
| 7.2.1 可展曲面的分类 .....                          | 186 |
| 7.2.2 可展曲面的应用 .....                          | 187 |
| 7.2.3 可展曲面和保长映射的关联 .....                     | 189 |
| 7.3 Monge-Ampère 方程在研究零 Gauss 曲率曲面中的应用 ..... | 195 |
| *7.3.1 特征线法求解退化齐次 Monge-Ampère 方程 .....      | 196 |
| 7.4 曲线和曲面的包络 .....                           | 199 |
| *7.4.1 平面和空间曲线族的包络线 .....                    | 199 |
| *7.4.2 空间中曲面族的包络面 .....                      | 202 |
| 本章注记 .....                                   | 205 |
| 第八章 曲面上的曲线 2——测地线 .....                      | 207 |
| 8.1 曲面上曲线的 Darboux 标架场及其运动公式 .....           | 207 |
| 8.1.1 曲面上曲线的 Darboux 标架场 .....               | 208 |
| 8.1.2 Darboux 标架场的运动公式 .....                 | 208 |
| 8.2 测地挠率 .....                               | 210 |
| 8.2.1 测地挠率和 Weingarten 映射的关系 .....           | 211 |
| 8.2.2 测地挠率的几何和代数意义 .....                     | 212 |
| 8.3 测地曲率 .....                               | 214 |
| 8.3.1 非弧长参数下的测地曲率的计算 .....                   | 215 |
| 8.3.2 测地曲率的几何意义 .....                        | 215 |
| 8.4 预测地线和测地线 .....                           | 218 |
| 8.4.1 弧长参数下的测地线方程 .....                      | 218 |
| 8.4.2 一般参数下的测地线方程 .....                      | 221 |
| 8.4.3 测地线的存在唯一性 .....                        | 223 |
| 8.4.4 测地线的几何意义 .....                         | 226 |
| 8.5 协变导数和平行移动 .....                          | 228 |
| 8.5.1 协变导数的引入与严格定义 .....                     | 229 |

|        |  |     |
|--------|--|-----|
| 8.5.2  | 协变导数的性质与具体表达式                                | 231 |
| 8.5.3  | 平行向量场  | 232 |
| 8.5.4  | 通过协变导数引入测地线                                  | 233 |
| 8.6    | 切向辐角下的测地曲率和协变导数的 Liouville 公式, 以及测地线方程 ..... | 235 |
| 8.6.1  | 测地曲率的 Liouville 公式                           | 235 |
| *8.6.2 | 曲线测地曲率和曲面 Gauss 曲率的潜在关联                      | 238 |
| 8.6.3  | 切向辐角下测地线的方程                                  | 239 |
| 8.6.4  | 协变导数的 Liouville 公式                           | 243 |
| 8.6.5  | 向量场测地曲率的进一步理解                                | 245 |
| 8.7    | 测地坐标系和常曲率曲面 .....                            | 246 |
| 8.7.1  | 测地平行坐标系                                      | 246 |
| 8.7.2  | 测地极坐标系                                       | 249 |
| 8.7.3  | 常曲率曲面  | 251 |
|        | 本章注记 .....                                   | 253 |
| 第九章    | 高阶工具: 解析函数和 Laplace 算子 .....                 | 255 |
| 9.1    | 保角映射 .....                                   | 255 |
| 9.1.1  | 保角映射的定义与判定                                   | 255 |
| 9.1.2  | 保角映射的例子与应用                                   | 258 |
| 9.2    | 等温参数系 .....                                  | 262 |
| 9.2.1  | 等温参数系与保角映射的关联                                | 262 |
| 9.2.2  | 等温参数系的存在性                                    | 264 |
| 9.3    | 曲线上的复坐标 .....                                | 267 |
| 9.3.1  | 保角映射和解析函数的关系                                 | 267 |
| 9.3.2  | 复标架场及其运动公式                                   | 269 |
| 9.4    | 曲线上的 Laplace 算子 .....                        | 273 |
| 9.4.1  | 单位正交基底下 Hessian 矩阵和 Laplace 算子的定义            | 273 |
| 9.4.2  | 等温参数系下的 Laplace 算子和调和函数                      | 276 |
| 9.4.3  | 一般参数系下的 Hessian 矩阵和 Laplace 算子               | 278 |
| 9.4.4  | 曲面上 Laplace 算子的性质                            | 280 |
|        | 本章注记 .....                                   | 282 |
| 第二部分   | 注记 .....                                     | 285 |

|  |     |
|--|-----|
| 第三部分 曲线和曲面的整体几何                        | 287 |
| 第十章 利用 Laplace 算子和解析函数研究曲面的外在整体几何      | 291 |
| 10.1 极小曲面                              | 291 |
| 10.1.1 极小曲面的 Weierstrass 表示及其几何意义      | 292 |
| 10.1.2 极小图上的 Levy 变换和等温参数系             | 296 |
| 10.1.3 极小图的 Weierstrass 表示             | 300 |
| *10.1.4 极小图上的 Bernstein 定理和 Heinz 估计   | 302 |
| 10.2 常平均曲率曲面                           | 305 |
| 10.2.1 常平均曲率曲面上的等温参数系                  | 305 |
| 10.2.2 Hopf 微分                         | 312 |
| *10.2.3 常平均曲率曲面的唯一性                    | 314 |
| 本章注记                                   | 315 |
| 第十一章曲线和曲面的内蕴整体几何选讲                     | 317 |
| 11.1 平面上简单闭曲线的整体性质                     | 317 |
| 11.1.1 等周不等式                           | 318 |
| 11.1.2 Hopf 旋转指标定理                     | 319 |
| 11.2 曲面的内蕴整体性质                         | 322 |
| 11.2.1 Gauss-Bonnet 公式的局部初探            | 322 |
| 11.2.2 单连通区域上的 Gauss-Bonnet 公式的证明思路    | 325 |
| *11.2.3 曲面的定向                          | 327 |
| *11.2.4 可定向紧致无边闭曲面上的 Gauss-Bonnet 公式简介 | 328 |
| 本章注记                                   | 330 |
| 第三部分注记                                 | 333 |
| 后记                                     | 335 |
| 附录                                     | 337 |
| 附录 A 行星运动常微分方程的进一步求解                   | 339 |
| 附录 B 行列式求导的一般处理                        | 345 |
| 附录 C 倒置摆线的等时性和最速降线                     | 347 |
| 附录 D 曲面的第三基本形式                         | 353 |
| 附录 E 能量方法证明曲线 Frenet 标架场和曲面自然标架场的唯一性   | 357 |

|  |     |
|--|-----|
| 附录 F 二元一次微分式积分因子的存在性 .....                     | 359 |
| 实二元一次微分式 .....                                 | 359 |
| 复函数系数的二元一次实微分式 .....                           | 364 |
| 附录 G 切映照的复合 .....                              | 369 |
| 附录 H 求解偏微分方程得到锥面到平面的保长映射 .....                 | 371 |
| 附录 I 测地挠率的各种表达式及其推导 .....                      | 375 |
| 附录 J Liouville 公式和行列式形式的测地曲率表达式之间的关系 .....     | 377 |
| 附录 K 用更高的复几何观点来看曲面等温参数系的存在性 .....              | 381 |
| 附录 L Bernstein 定理不使用 Weierstrass 表示的证明方法 ..... | 385 |

## 第一部分

# 曲线和曲面的局部理论——从外在到内蕴



研究曲线的目的是为了研究曲面。

在这一部分的前半段，我们使用不变量来描述空间中的曲线和曲面。具体来说，给出了曲线的弧长，曲率和挠率的定义，并证明这三者给定后，在差一个刚体运动的意义下，曲线是唯一确定的；也给出了曲面的第一和第二基本形式，在两者相容的前提下，在差一个刚体运动的意义下，曲面也是唯一确定的。

也就是说，前四章的内容是基本上均是外在几何。但第四章内容是从外在几何向内蕴几何过渡的关键，其中最重要的莫过于 Gauss 绝妙定理 (Gauss theorem egregium)。

在这一部分的学习中，我们默认大家掌握了解析几何中的向量运算及性质，空间中的坐标变换，以及能够求解基本的线性常微分方程。

即便是要求最低的专业，也必须要讲授完第一部分，否则无法形成逻辑上的闭环。但是，我依然建议最低要求依然要把第一、二部分完整地讲授，因为如果仅仅涉及曲线和曲面论基本定理的话，整个课程和大一的解析几何的差异就微乎其微，或者是完全没有展现微分几何的特质，只能称为带微积分运算的解析几何，对学生数学认知的提高没有丝毫助力。这样的话还不如把课程时间投入到常微分方程或偏微分方程（数学物理方程）的教学当中，至少能实打实地加强学生们的分析基本功。



# Chapter 1

## 曲线的不变量

### 1.1 向量函数

#### 1.1.1 向量函数的定义

我们可以回忆一下，解析几何中最重要的概念是什么？**向量**。它是几何问题和坐标运算之间的桥梁。解析几何中的向量都是固定的，实际当中向量可以是随时间和空间变化的，这意味着我们必须从**函数**的角度来重新审视向量，自然要引入

**定义 1.1.** 所谓**向量函数**是指从它的定义域到三维欧氏向量空间  $E^3$  中的映射。

我们早已接触过函数，要研究函数，最有力的工具自然是微积分。也就是要对向量函数进行求导和积分。类比与普通函数，先引入向量函数的极限的概念：设  $\vec{r}(t)$  为一元向量函数， $\vec{a}$  是常向量，

**定义 1.2.** 如果对于任意给定的  $\epsilon > 0$ ，都存在  $\delta > 0$ ，使得当  $0 < |t - t_0| < \delta$  时， $|\vec{r}(t) - \vec{a}| < \epsilon$  成立，则称当  $t$  趋于  $t_0$  时， $\vec{r}(t)$  的极限为  $\vec{a}$ ，记作

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}.$$

在此基础上，

**定义 1.3.** 当  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$  时，我们称向量函数  $\vec{r}(t)$  在  $t_0$  点是连续的。如果  $\vec{r}(t)$  在每一点都连续，则称  $\vec{r}(t)$  为连续函数。

定义 1.4. 若极限

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

存在, 我们称向量函数  $\vec{r}(t)$  在  $t_0$  点是可微的。这一极限称为  $\vec{r}(t)$  在  $t_0$  处的导数, 记作  $\vec{r}'(t_0)$  或者  $\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{t_0}$ 。

当取定欧氏空间中的一组单位正交基  $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  后,  $\vec{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ 。即向量函数可视为到  $\mathbb{R}^3$  的映射, 也就是三个有序的实函数  $x(t), y(t), z(t)$ 。简便起见, 当基底确定时, 我们不严格区分向量和三元有序数组, 可记为  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 。

不难验证, 向量函数  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  是连续的当且仅当  $x(t), y(t), z(t)$  都是  $t$  的连续函数。还可以进一步验证

$$\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{t=t_0} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

同样, 可以定义向量函数的积分, 可以参考<sup>[1]</sup>, 这里不再赘述。

这里我们脱离坐标系直接定义了向量函数的连续性, 导数和积分等。当然, 也可以先引入坐标系, 用坐标函数的连续性, 导数和积分来定义向量函数相关的概念, 然后根据坐标变换公式验证, 向量函数的微积分性质和整个空间的坐标系选取无关。在具体问题中, 我们均使用更方便的坐标函数进行运算。同时, 我们在使用坐标函数时, 不再额外声明运算结果与欧氏空间的坐标系选取是无关的, 因为这一点在我们讨论的范畴内永远成立。

## 1.1.2 向量函数的性质

向量函数, 既是向量, 也是函数。一方面继承了函数的运算, 比如求导和积分; 另一方面也继承向量的运算性质, 比如内积 (得到函数), 外积 (得到向量函数), 混合积 (得到函数)。更为重要的是, **向量和函数的运算还可以结合起来**, 具体来看

命题 1.5. 设  $\vec{a}(t), \vec{b}(t), \vec{c}(t)$  是三个连续可微的向量函数, 则他们的内积, 外积和混合积的导数满足下列关系:

1.  $(\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t))' = \vec{a}'(t) \cdot \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \cdot \vec{b}'(t);$
2.  $(\vec{a}(t) \times \vec{b}(t))' = \vec{a}'(t) \times \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \times \vec{b}'(t);$
3.  $(\vec{a}(t), \vec{b}(t), \vec{c}(t))' = (\vec{a}'(t), \vec{b}(t), \vec{c}(t)) + (\vec{a}(t), \vec{b}'(t), \vec{c}(t)) + (\vec{a}(t), \vec{b}(t), \vec{c}'(t)).$

证明. 先证性质 1。

$$\begin{aligned} & \vec{a}(t + \Delta t) \cdot \vec{b}(t + \Delta t) - \vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t) \\ &= (\vec{a}(t + \Delta t) \cdot \vec{b}(t + \Delta t) - \vec{a}(t + \Delta t) \cdot \vec{b}(t)) + (\vec{a}(t + \Delta t) \cdot \vec{b}(t) - \vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t)) \\ &= \vec{a}(t + \Delta t) \cdot (\vec{b}(t + \Delta t) - \vec{b}(t)) + (\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)) \cdot \vec{b}(t) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) \cdot \vec{b}(t + \Delta t) - \vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}(t + \Delta t) \cdot \frac{\vec{b}(t + \Delta t) - \vec{b}(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} \cdot \vec{b}(t) \\ &= \vec{a}'(t) \cdot \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \cdot \vec{b}'(t) \end{aligned}$$

最后一个等号中我们用到了内积运算的连续性，因为内积作为线性运算必然是连续的。

也可以使用坐标法。来看第 3 个性质。取右手单位正交基，假定  $\vec{a}(t), \vec{b}(t), \vec{c}(t)$  对应的坐标分别为  $(a_1(t), a_2(t), a_3(t)), (b_1(t), b_2(t), b_3(t)), (c_1(t), c_2(t), c_3(t))$ ，从而

$$(\vec{a}(t), \vec{b}(t), \vec{c}(t)) = \begin{vmatrix} a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) \\ b_1(t) & b_2(t) & b_3(t) \\ c_1(t) & c_2(t) & c_3(t) \end{vmatrix}$$

而

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) \\ b_1(t) & b_2(t) & b_3(t) \\ c_1(t) & c_2(t) & c_3(t) \end{vmatrix}' \\ &= \begin{vmatrix} a_1'(t) & a_2'(t) & a_3'(t) \\ b_1(t) & b_2(t) & b_3(t) \\ c_1(t) & c_2(t) & c_3(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) \\ b_1'(t) & b_2'(t) & b_3'(t) \\ c_1(t) & c_2(t) & c_3(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) \\ b_1(t) & b_2(t) & b_3(t) \\ c_1'(t) & c_2'(t) & c_3'(t) \end{vmatrix} \\ &= (\vec{a}'(t), \vec{b}(t), \vec{c}(t)) + (\vec{a}(t), \vec{b}'(t), \vec{c}(t)) + (\vec{a}(t), \vec{b}(t), \vec{c}'(t)). \end{aligned}$$

性质 2 可以类似证明，我们这里不再赘述。 □

看起来好像是自然而然，平淡无奇的结论。其实不然，函数和向量的结合别有深意。根据上述命题，我们可以证明

**定理 1.6.** 设  $\vec{a}(t)$  是一个处处非零的向量函数，则

1.  $\vec{a}(t)$  的长度是常数当且仅当  $\vec{a}'(t) \cdot \vec{a}(t) \equiv 0$ ;
2.  $\vec{a}(t)$  的方向不变当且仅当  $\vec{a}'(t) \times \vec{a}(t) \equiv \vec{0}$ ;
3.  $\vec{a}(t)$  与某一个固定的方向垂直, 则  $(\vec{a}(t), \vec{a}'(t), \vec{a}''(t)) \equiv 0$ 。反过来, 如果上式成立, 并且处处有  $\vec{a}'(t) \times \vec{a}(t) \neq \vec{0}$ , 那么  $\vec{a}(t)$  必定与某一个固定的方向垂直。

证明. 1, 考虑  $|\vec{a}(t)|^2$ , 对它求导。由

$$(\vec{a}(t) \cdot \vec{a}(t))' = \vec{a}'(t) \cdot \vec{a}(t) + \vec{a}(t) \cdot \vec{a}'(t) = 2\vec{a}'(t) \cdot \vec{a}(t)$$

即得。

2, 向量的方向由其对应的单位化向量表示, 自然考虑对  $\vec{a}(t)$  的单位化求导:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\vec{a}(t)}{|\vec{a}(t)|} \right)' &= \frac{\vec{a}'(t)}{|\vec{a}(t)|} - \frac{|\vec{a}(t)|' \vec{a}(t)}{|\vec{a}(t)|^2} = \frac{\vec{a}'(t)}{|\vec{a}(t)|} - \frac{(\sqrt{\vec{a}(t) \cdot \vec{a}(t)})' \vec{a}(t)}{|\vec{a}(t)|^2} \\ &= \frac{\vec{a}'(t)}{|\vec{a}(t)|} - \frac{(\vec{a}'(t) \cdot \vec{a}(t)) \vec{a}(t)}{|\vec{a}(t)|^3} \\ &= \frac{(\vec{a}(t) \cdot \vec{a}(t)) \vec{a}'(t) - (\vec{a}'(t) \cdot \vec{a}(t)) \vec{a}(t)}{|\vec{a}(t)|^3} \\ &= \frac{\vec{a}(t) \times (\vec{a}'(t) \times \vec{a}(t))}{|\vec{a}(t)|^3} \end{aligned}$$

其中最后一个等式用到了解析几何中的二重外积公式(可以参考<sup>[2]</sup>), 由于  $\vec{a}(t)$  与  $\vec{a}'(t) \times \vec{a}(t)$  相互垂直, 上式为零当且仅当  $\vec{a}'(t) \times \vec{a}(t) = \vec{0}$ , 得证。

3, 几何上看, 三维空间中  $\vec{a}(t)$  与某一个固定的方向垂直, 就是  $\vec{a}(t)$  落在某个固定的平面内。此时,  $\vec{a}'(t)$  也落在这一平面内。当  $\vec{a}(t)$  与  $\vec{a}'(t)$  共线时, 混合积  $(\vec{a}(t), \vec{a}'(t), \vec{a}''(t))$  自然为零。当  $\vec{a}(t)$  与  $\vec{a}'(t)$  不共线时, 等价于  $\vec{a}(t)$  和  $\vec{a}'(t)$  张成的平面, 其法向量  $\vec{a}'(t) \times \vec{a}(t)$  方向不变。

可以直接套用 2 的结论, 考虑

$$\begin{aligned} (\vec{a}'(t) \times \vec{a}(t))' \times (\vec{a}'(t) \times \vec{a}(t)) &= (\vec{a}''(t) \times \vec{a}(t) + \vec{a}'(t) \times \vec{a}'(t)) \times (\vec{a}'(t) \times \vec{a}(t)) \\ &= -(\vec{a}''(t) \times \vec{a}(t) \cdot \vec{a}'(t)) \vec{a}(t) \\ &= -(\vec{a}(t), \vec{a}'(t), \vec{a}''(t)) \vec{a}(t). \end{aligned}$$

当  $\vec{a}'(t) \times \vec{a}(t)$  的方向不变时, 上式为零, 故  $(\vec{a}(t), \vec{a}'(t), \vec{a}''(t)) = 0$ 。反过来, 当混合积  $(\vec{a}(t), \vec{a}'(t), \vec{a}''(t)) = 0$  时, 非零向量  $\vec{a}'(t) \times \vec{a}(t)$  方向不变, 且给出了  $\vec{a}(t)$  所垂直的方向。□

从上面的证明中，大家能否“一叶知秋”，体会到微分几何的端倪？所谓微分几何，某种程度上讲就是可以求导的解析几何。证明就靠求导；如果求导一次不行，就求两次导数。当然，我们要注意即便是简单的求导，仍然要在明确几何意义的前提下进行。

一次求导虽然简单，两次求导就比较复杂了。可想而知，有些问题即便两次求导也不一定能解决。除了直接求导，能否有其他的思路？

回到定理 1.6 中的性质 2： $\vec{a}(t)$  的方向不变当且仅当  $\vec{a}'(t) \times \vec{a}(t) \equiv \vec{0}$ 。注意到所谓方向不变，几何上看就是始终在一条直线上，

$\Rightarrow$  取直线的方向向量为  $\vec{b}$ ，则  $\vec{a}(t) = f(t)\vec{b}$ ，于是  $\vec{a}'(t) = f'(t)\vec{b}$  自然有  $\vec{a}'(t) \times \vec{a}(t) \equiv \vec{0}$ 。

$\Leftarrow$  已知  $\vec{a}'(t) \times \vec{a}(t) \equiv \vec{0}$ ，则有

$$\vec{a}'(t) = g(t)\vec{a}(t) \quad (1.1)$$

如何由此推出向量  $\vec{a}(t)$  的方向固定？我们可以回想一下，解析几何中最基本的方法就是取坐标系后转换为坐标的运算。微分几何可以看作是解析几何的强力升级版，故任取一直角坐标系，(1.1) 式等价于

$$\begin{cases} a_1'(t) = g(t)a_1(t) \\ a_2'(t) = g(t)a_2(t) \\ a_3'(t) = g(t)a_3(t) \end{cases}$$

这实际上就是常微分方程。先看第一个方程，简化为  $(\ln |a_1(t)|)' = g(t)$ ，进而可解得： $a_1(t) = C_1 e^{\int_0^t g(s) ds}$ 。其他两个方程类似，综合有

$$\begin{aligned} a_1(t) &= C_1 e^{\int_0^t g(s) ds} \\ a_2(t) &= C_2 e^{\int_0^t g(s) ds} \\ a_3(t) &= C_3 e^{\int_0^t g(s) ds} \end{aligned}$$

即

$$\vec{a}(t) = e^{\int_0^t g(s) ds} (C_1, C_2, C_3)$$

向量函数方向固定为  $\vec{b} = (C_1, C_2, C_3)$ 。

定理 1.6 中性质 3 的证明也可类似处理：

$\Rightarrow$  取和固定方向垂直的平面的基底  $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ ，有

$$\vec{a}(t) = f(t)\vec{b}_1 + g(t)\vec{b}_2$$

自然可得： $(\vec{a}(t), \vec{a}'(t), \vec{a}''(t)) = 0$ 。

⇐ 根据  $(\vec{a}(t), \vec{a}'(t), \vec{a}''(t)) = 0$  且  $\vec{a}'(t) \times \vec{a}(t) \neq \vec{0}$ , 有  $\vec{a}''(t) + f(t)\vec{a}'(t) + g(t)\vec{a}(t) = \vec{0}$ , 取直角坐标系后, 变为三个二阶线性方程组成的方程组, 其中第一个坐标函数满足的方程为

$$a_1''(t) + f(t)a_1'(t) + g(t)a_1(t) = 0$$

可解得:

$$a_1(t) = \varphi(t)(C_1 + D_1 \int \frac{1}{\varphi^2(t)} e^{-\int f(t)dt} dt)$$

这里  $\varphi(t)$  是一个特解。其他两个方程同理, 重新整理得:

$$\begin{aligned} a_1(t) &= C_1\varphi(t) + D_1\varphi(t) \int \frac{1}{\varphi^2(t)} e^{-\int f(t)dt} dt \\ a_2(t) &= C_2\varphi(t) + D_2\varphi(t) \int \frac{1}{\varphi^2(t)} e^{-\int f(t)dt} dt \\ a_3(t) &= C_3\varphi(t) + D_3\varphi(t) \int \frac{1}{\varphi^2(t)} e^{-\int f(t)dt} dt \end{aligned}$$

即

$$\vec{a}(t) = \varphi(t)(C_1, C_2, C_3) + \varphi(t) \int \frac{1}{\varphi^2(t)} e^{-\int f(t)dt} dt (D_1, D_2, D_3)$$

$\vec{a}(t)$  显然落在向量  $(C_1, C_2, C_3)$  和  $(D_1, D_2, D_3)$  所在的平面中。进一步, 要找始终和  $\vec{a}(t)$  垂直的向量, 只要找向量同时垂直于  $(C_1, C_2, C_3)$  和  $(D_1, D_2, D_3)$  即可。

实际上定理1.6的证明和常微分方程还有更深刻的关系。注意到  $a_1(t), a_2(t), a_3(t)$  都可以看作下列方程的解:

$$y''(t) + f(t)y'(t) + g(t)y(t) = 0.$$

而

$$(\vec{a}(t), \vec{a}'(t), \vec{a}''(t)) = \begin{vmatrix} a_1''(t) & a_1'(t) & a_1(t) \\ a_2''(t) & a_2'(t) & a_2(t) \\ a_3''(t) & a_3'(t) & a_3(t) \end{vmatrix}$$

为这一方程的朗斯基 (Wronsky) 行列式。同时我们知道方程为 2 阶齐次线性方程, 它不可能有 3 个线性无关的解, 从而 Wronsky 行列式必然为零。与  $(\vec{a}(t), \vec{a}'(t), \vec{a}''(t)) = 0$  等价。也就是说, 常微分方程中, 二阶线性方程解的线性相关性, 反应到微分几何上, 就是曲线从三维空间约化到二维的平面中。

这一节的内容既基础又简单, 但反映出了微分几何这门课程的整体风貌:

- 微分几何固然可以看作解析几何的升级版，但是解析几何在微分几何中仅仅起到一个基础作用，甚至不用学解析几何，只要明白标架，内积，外积，混合积，即可直接学微分几何。
- 微分几何中的问题，如果求导还没有办法解决的话，那就考虑比求导更有力的工具：求解微分方程。

此外，除了向量值的函数，还有线性变换值（矩阵值）的函数。它们也同时继承了函数的微积分运算和矩阵的代数运算，感兴趣的同学可以自己推导具体性质。我们后续也会用到。

至此，我们不妨总结得更直白些，微分几何实质上 and 微积分（微分方程）没有本质区别，只是求导和积分的对象由普通函数换成了向量或矩阵函数。当然，这会导致复杂度迅速提升，同时也会产生众多的精美而深刻的结论。让我们接下来逐步展开这一壮美的画卷。

## 1.2 正则参数曲线

首先来研究微分几何中最简单的对象：曲线。几何上看，曲线是  $E^3$  中一维子集。在解析几何课中提到过，曲线可以用普通方程，也就是两个曲面方程联立来表示；但是这样的方程很难进行微分运算，不方便使用。

### 1.2.1 参数曲线

定义 1.7. 从区间  $[a, b]$  到  $E^3$  中的一个连续映射，记为  $\vec{r}: [a, b] \rightarrow E^3$ ，称为一条参数曲线。一般简记作  $C$ 。

- 参数曲线可以看作对一个一维的子集进行参数化。直观上，这样的参数曲线可以看做一个点随时间运动所描出的轨迹；
- 一条参数曲线，实际上就是一个连续的向量函数；
- 取定正交标架  $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ，则  $\vec{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ ，我们通常把曲线  $C$  直接简记为  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ，称作曲线的参数方程，其中  $t$  是参数。

我们知道，微积分的核心即是线性化。对曲线的研究也一样，我们考虑曲线在一点的线性化。

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

定义 1.8. 如果  $\vec{r}'(t)$  唯一存在且不为零向量，则称  $\vec{r}'(t)$  为该参数曲线在点  $\vec{r}(t)$  处的切线的方向向量，简称为切向量。

- 严格地讲，切向量需要存在唯一，且不为零两个条件，也就是默认切向量不能为零向量。此时曲线的切线是完全确定的。<sup>1</sup>
- 我们把切向量存在的点，称为曲线的正则点。换言之，曲线在该点可微，且  $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ 。

## 1.2.2 参数曲线的正则性

简单起见，我们研究的曲线满足以下两个条件：

1. 向量函数  $\vec{r}(t)$  是自变量  $t$  的至少三次连续可微函数；
2. 曲线处处是正则点，即对任意的  $t$ ， $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ 。

这样的参数曲线称为正则参数曲线。

例 1.9. 半三次曲线  $\vec{r}(t) = (t^3, t^2)$ 。

- $\vec{r}'(0) = (0, 0)$ ，不是正则的参数曲线；
- $(0, 0)$  点处切线存在，但切线的正方向改变  $180^\circ$ ；
- 图形上看有尖点，不光滑；
- 但向量函数是光滑的。

参数方程的光滑性与曲线在直观上的光滑性是两个不同的概念，参数曲线方程是光滑函数，曲线自身并不见得光滑。这也是我们要求在正则点处导数不为零的根本原因。

换句话说，正则曲线的切向量一直存在，且非零、连续，说明正则曲线的切线（及其正方向）一直存在且连续，故直观上必然是光滑的。反过来讲，有非光滑点的曲线，无论取怎样的参数，都不是正则的。

再来看下面一个特殊的例子

---

<sup>1</sup>有时也不太严格地说切向量退化，或者切向量为零

例 1.10. 曲线  $\vec{r}(t) = (t^3, t^3)$ 。

- $\vec{r}'(0) = (0, 0)$ ，不是正则的参数曲线；
- $(0, 0)$  点处是没有切向量的，但是该点处的切线是确定存在的；
- 整条曲线实际上是光滑的。

切向量不存在不代表切线不存在，非正则曲线不一定是非光滑的。我们不妨大胆地猜测，对于几何上看起来光滑的曲线，一定可以取到“好”的参数，使得它成为正则曲线。为了更好地研究这类型问题，我们需要引入参数变换的概念。

### 1.2.3 参数变换和容许参数变换

需要注意的是，同样一个一维子集，可以有不同的参数化。

例 1.11. 圆螺旋线  $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ，其中  $a, b$  是常数， $a > 0$ 。

此时， $\vec{r}'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$ ，是一条正则曲线。考虑另外一个映射  $\vec{p}$ ， $\vec{p}(u) = (a \cos 2u, a \sin 2u, 2bu)$ ，

- 作为参数方程，两者不相同；
- 但作为空间中的点集，两者是完全相同的。所以从几何上说，我们应当把这两条参数方程代表的曲线视为同一条曲线，两者的不同只是做了不同的“参数化”。
- 它可以视为令  $t = 2u$ ， $\vec{p}(u) = \vec{r}(2u)$ 。

定义 1.12. 已有参数曲线  $\vec{r}(t)$ ，以及函数  $t = t(u)$ ，则参数曲线  $\vec{p}(u) = \vec{r}(t(u))$  称为  $\vec{r}(t)$  的重新参数化。

不同的参数的选取，会影响到曲线的正则性。比如例1.11中，令  $t = u^3$ ，得到参数曲线

$$\vec{p}(u) = (a \cos u^3, a \sin u^3, bu^3)$$

在  $u = 0$  处不是正则的。

为了保证正则参数曲线所满足的两个条件，我们要求参数的变换  $t = t(u)$  满足下面两个条件：

1.  $t(u)$  是  $u$  的三次以上的连续可微函数;
2.  $t'(u)$  处处不是零。

这样的参数变换称为**容许参数变换**。根据  $(\vec{r}(t(u)))' = \vec{r}'(t(u))t'(u)$ , 容许参数变换将正则参数曲线变为正则参数曲线。

根据条件 1 和 2, 不难推得,  $t'(u)$  只有恒大于 0 或者恒小于 0 两种可能。如果条件 2 改为  $t'(u) > 0$ , 则参数变换称为**保持定向的容许参数变换**, 反之则是**改变定向的参数变换**。在我们这份讲义中, 如果不明确指明, 一般默认所做的参数变换都是保持定向的。

重新参数化仅仅只改变曲线的参数方程, 而不会改变曲线作为几何对象本身。这意味着: 1、同一条曲线有不同的参数化; 2、我们需要从众多的参数化中选出最“好”的那一种, 以便我们更好地研究曲线的性质。我们将在下一节讨论这一问题。

## 1.2.4 行星轨道——参数曲线的实际例子

历史上, 牛顿通过行星轨道为椭圆且满足开普勒定律, 推导出万有引力和距离的平方成反比, 即天体也满足牛顿运动定律。现在我们降低一些问题的难度, 假如已经知道万有引力是和距离的平方成反比, 而且也知道了牛顿运动定律, 能否推出行星的运行轨迹为椭圆?

第一步, 设由太阳指向地球的向量为  $\vec{a}(t)$ 。首先根据牛顿定律, 加速度  $\vec{a}''(t)$  的方向和引力方向相同, 和向量  $\vec{a}(t)$  的方向相反, 故有  $(\vec{a}(t), \vec{a}'(t), \vec{a}''(t)) \equiv 0$ 。再结合之前对向量函数的讨论, 整个运行轨迹必然落在一个平面内。为了求解方便, 取平面极坐标系  $(r(t), \theta(t))$ 。

第二步, 根据牛顿运动定律, 及引力公式<sup>1</sup> (简单起见, 忽略了万有引力常数),

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{M}{r^2} \quad (1.2)$$

$$\frac{d(r \frac{d\theta}{dt})}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (1.3)$$

从相对简单的 (1.3) 式入手求解, 先化简为:

$$r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0$$

<sup>1</sup>对径向切向运动分解, 受力分析不熟悉的同学, 可以考虑把向量改写成复数  $re^{i\theta}$  的形式, 于是有  $\frac{d^2(re^{i\theta})}{dt^2} = -M \frac{e^{i\theta}}{r^2}$ , 可得  $\frac{d^2 r}{dt^2} + 2i \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + ir \frac{d^2 \theta}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{M}{r^2}$ , 分离实部虚部即得。

添加积分因子  $r$  后, 有:

$$\frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0$$

进一步化简为:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h$$

这里  $h$  为一常数。于是有  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}$ , 带入 (1.2) 式得到:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{M}{r^2} = 0 \quad (1.4)$$

一方面, 直接求解上述二阶非线性方程非常困难, 另一方面要得到运动轨迹, 我们需要的是  $r$  和  $\theta$  的关系, 故需要将 (1.4) 式转化为  $r$  关于  $\theta$  的常微分方程。

第三步, 对 (1.4) 式做变量替换, 有

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{dr}{d\theta} \frac{d^2 \theta}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{M}{r^2} = 0$$

再一次将  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}$  带入, 并做变量替换, 得到:

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} \frac{h^2}{r^4} - 2 \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 \frac{h^2}{r^5} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{M}{r^2} = 0$$

最终得到:

$$r \frac{d^2 r}{d\theta^2} - 2 \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r^2 + r^3 \frac{M}{h^2} = 0$$

记  $r' = \frac{dr}{d\theta}$ ,  $r'' = \frac{d^2 r}{d\theta^2}$ ,  $c = \frac{M}{h^2}$ , 有:

$$r r'' - 2(r')^2 - r^2 + c r^3 = 0 \quad (1.5)$$

根据之前的经验, 不难发现方程 (1.5) 可以改写为:

$$r^3 (r^{-2} r')' - r^2 + c r^3 = 0$$

即

$$\left( \frac{r'}{r^2} \right)' - r^{-1} + c = 0$$

从而

$$-\left( \frac{1}{r} \right)'' - \frac{1}{r} + c = 0$$

自然, 可令  $\rho = \frac{1}{r}$ ,

$$\rho'' + \rho - c = 0$$

即

$$(\rho - c)'' = -(\rho - c)$$

可解得： $\rho - c = b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cos(\theta + \theta_1)$ 。

最终，取合适的极坐标系（使  $\theta_1 = 0$ ），使得最终的解为

$$cr = \frac{1}{1 + a \cos \theta}$$

其中  $a = \frac{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}{c}$ 。由于  $c = \frac{M}{h^2} > 0$ ，自然有  $0 \leq a < 1$ ，得到一个椭圆（ $a = 0$  时成为圆）。

思考：

- $a = 1$  时是什么曲线？
- 在确定了轨迹之后，能否更精准地确定行星随时间运动的规律？
- 如果直接求解方程 (1.4)，能否最终得到曲线的方程？

上述几个问题的答案可以参考附录A)。

从整个过程来看，

- 绝大多数情况下，事先我们并不知道曲线的方程，只能根据限定条件去求解方程；
- 而这样的方程一般都不容易求解。行星轨道的例子可以看出，即便是一条平面曲线，曲线的方程可以求出来也是非常“巧合”的。

总之，我们不能奢望一定能够得到曲线方程的显式表达式。比如，有三个质量相当的天体组成的系统，其运行轨迹是没有解析表达式的。硬要完整地给出曲线的参数方程，再来研究曲线，是不明智的。需要换一种更有效的方式来研究曲线，即找出曲线的不变量。

## 1.3 曲线的弧长，曲率和挠率

### 1.3.1 曲线的弧长

对于一条曲线而言，最容易求出的就是弧长。设  $E^3$  中的一条正则曲线  $C$  的参数方程是  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ， $a \leq t \leq b$ ，则其长度为  $s = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$ 。

然而对于同一条曲线, 有不同的参数化, 也就是有不同的参数方程的形式。自然的问题是选取不同的参数化, 得到弧长是否相同?

不妨设参数变换是:  $t = t(u)$ ,  $t' > 0$ ,  $\alpha \leq u \leq \beta$ , 且  $t(\alpha) = a$ ,  $t(\beta) = b$ 。此时弧长为  $\int_{\alpha}^{\beta} |(\vec{r}(t(u)))'| du$ 。而

$$\begin{aligned} \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt &= \int_{t(\alpha)}^{t(\beta)} |\vec{r}'(t(u))| dt(u) = \int_{\alpha}^{\beta} |\vec{r}'(t(u))| t'(u) du \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} |(\vec{r}(t(u)))'| du \end{aligned}$$

- 由积分的换元法, 可知弧长  $s$  与参数变换是无关系的;
- 实际上也可以从弧长的几何意义直接来理解, 不同的参数只是导致具体剖分的不同。

弧长与坐标选取和参数选取都没有关系, 是曲线的**不变量**。看似简单, 却能给我们很重要的启示, 管中窥豹来体会微分几何的实质。

积分的换元法  $\leftrightarrow$  弧长是不变量

分析  $\leftrightarrow$  几何

即每一个几何的不变量(命题)的背后, 往往就是若干分析的命题。当然, 很多情况下这两者之间的对应是比较复杂的。

若正则曲线  $C$  的参数方程为  $\vec{r}(t)$ , 对于任意的  $t \in [a, b]$ , 令

$$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(u)| du,$$

则  $s(t)$  是正则曲线  $C$  从  $a$  到  $t$  的弧长。由于  $\frac{ds(t)}{dt} = |\vec{r}'(t)| > 0$ , 可以从单调函数反解得到  $t = f(s)$ , 且

$$\frac{df(s)}{ds} = \frac{1}{|\vec{r}'(f(s))|} = \frac{1}{|\vec{r}'(t)|} > 0$$

所以  $t = f(s)$  给出了曲线  $C$  保持定向的容许参数变换。即总是可以把正则曲线的弧长作为它的参数, 这种参数称为**弧长参数**。注意弧长参数之间可以相差一个常数, 对我们的计算没有任何影响; 此外, 弧长参数的取值范围可以是  $(-\infty, \infty)$ , 即积分上限  $t$  小于下限  $a$  时也完全有意义。

采用弧长参数, 会给我们研究曲线性质带来很大的方便。令  $\vec{p}(s) = \vec{r}(f(s))$ , 则  $\vec{p}'(s) = \vec{r}'(f(s))f'(s) = \frac{\vec{r}'(f(s))}{|\vec{r}'(f(s))|}$ , 即  $|\vec{p}'(s)| \equiv 1$ 。也就是说正则曲线  $\vec{r}(t)$  中的  $t$  为弧长参数的充分必要条件为  $|\vec{r}'(t)| \equiv 1$ , 也就是它的切向量均为单位切向量。更直观的说, 将以弧长为参数的曲线看做点运动的轨迹, 点的速度恒定为 1。

最后我们考虑这样一个实例, 一根不能拉伸和压缩的理想细铁丝, 可以在空间中弯成任意的形状, 同时保持长度不变。这告诉我们, 虽然弧长是一个不变量, 而且能选为参数曲线的参数, 但它并不能告诉我们曲线的形状。想要知道曲线的形状, 我们还需要寻找其他的不变量。

### 1.3.2 曲线的曲率

曲线的形状实际上就是曲线弯曲的方式和程度。直观上看, 曲线切线转动的快慢反映了曲线的弯曲程度。设曲线  $C$  的方程为  $\vec{r}(s)$ , 其中  $s$  是弧长参数。令  $\vec{\alpha}(s) = \vec{r}'(s)$  为曲线  $C$  的单位切向量场, 将这些向量平移到同一起点。用  $\Delta\theta$  表示  $\vec{\alpha}(s + \Delta s)$  和  $\vec{\alpha}(s)$  之间的夹角。从而切线转动的速率为:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right|$$

根据数学分析中的知识, 角度  $\Delta\theta$ , 视为单位圆周的弧长, 可以由弦长  $|\Delta\vec{\alpha}(s)| = |\vec{\alpha}(s + \Delta s) - \vec{\alpha}(s)|$  近似, 于是

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\vec{\alpha}(s)}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\vec{\alpha}}{ds} \right|$$

定义 1.13. 设曲线  $C$  的方程为  $\vec{r}(s)$ , 其中  $s$  是弧长参数。则

$$\vec{\alpha}'(s) = \frac{d\vec{\alpha}}{ds}$$

称为**曲率向量**。

$$\kappa(s) = \left| \frac{d\vec{\alpha}}{ds} \right| = |\vec{r}''(s)|$$

称为曲线在  $s$  处的**曲率**。

不难看出, 曲率与坐标系和参数方程选取无关, 也是不变量。同时, 由于  $\vec{\alpha}(s)$  是单位向量, 故  $\vec{\alpha}'(s)$  始终与  $\vec{\alpha}(s)$  垂直。

如果已知的是曲率向量  $\vec{\alpha}'(s)$ , 显然曲线的形状确定; 那么如果知道的仅仅是曲率, 能否确定整个曲线的形状?

**定理 1.14.** 曲线  $C$  是一条直线当且仅当它的曲率  $\kappa(s) \equiv 0$ 。

证明非常简单, 读者可以自行补全。我们重点看下面一个例子。

**例 1.15.** 试计算圆螺旋线  $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$  的曲率, 其中  $a, b$  是常数,  $a > 0$ 。

证明. 目前而言, 按照定义计算曲线的曲率, 必须在弧长参数下。我们先来计算弧长。

$$\vec{r}'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$$

于是  $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ , 进而

$$s = \sqrt{a^2 + b^2}t$$

将  $t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  代入  $\vec{r}(t)$  的方程, 有

$$\vec{p}(s) = \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

于是

$$\vec{\alpha}(s) = \vec{p}'(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( -a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \right)$$

$$\vec{\alpha}'(s) = \frac{1}{a^2 + b^2} \left( -a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right)$$

最终,

$$\kappa(s) = |\vec{\alpha}'(s)| = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

□

从例子中可见, 不同的螺旋线可以有相同的曲率。曲率确实在一定程度上刻画了曲线的弯曲程度, 但是仅仅知道曲率, 无法确定曲线的形状。我们还需要其他的不变量。

### 1.3.3 曲线的挠率

考虑一种特殊情况, 曲线  $C$  为一平面曲线, 已知曲率, 由于曲率向量始终与切向垂直, 这时曲率向量大小和方向都确定, 于是曲线的形状也随之确定<sup>1</sup>。此时切向量  $\vec{\alpha}(s)$  和曲率向量  $\vec{\alpha}'(s)$  始终都落在同一平面内。

<sup>1</sup>在曲率处处非零的前提下, 我们会在后续章节中严格说明

反之, 如果  $C$  不是平面曲线, 此时切向量  $\vec{\alpha}(s)$  和曲率向量  $\vec{\alpha}'(s)$  所张成平面就会变化。我们自然希望可以描述这一平面转动的快慢。考虑这一平面的单位法向量:

$$\vec{\gamma}(s) = \vec{\alpha}(s) \times \frac{\vec{\alpha}'(s)}{|\vec{\alpha}'(s)|} = \frac{1}{\kappa(s)} \vec{\alpha}(s) \times \vec{\alpha}'(s)$$

接着计算导数有

$$\vec{\gamma}'(s) = \left( \frac{1}{\kappa(s)} \right)' \vec{\alpha}(s) \times \vec{\alpha}'(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \vec{\alpha}(s) \times \vec{\alpha}''(s) \quad (1.6)$$

直接计算  $\vec{\gamma}'(s)$  的模长太复杂, 不过容易分析得到

- 由于  $\vec{\gamma}(s)$  是单位向量,  $\vec{\gamma}'(s)$  与  $\vec{\gamma}(s)$  垂直, 这意味着  $\vec{\gamma}'$  落在  $\vec{\alpha}(s)$  与  $\vec{\alpha}'(s)$  张成的平面中。
- 再由  $\vec{\gamma}'(s)$  的表达式可知  $\vec{\gamma}'(s)$  与  $\vec{\alpha}(s)$  垂直。

事先已经知道  $\vec{\alpha}'(s)$  与  $\vec{\alpha}(s)$  垂直, 故  $\vec{\gamma}'(s)$  与  $\vec{\alpha}'(s)$  共线。需要注意到  $\left( \frac{1}{\kappa(s)} \right)' \vec{\alpha}(s) \times \vec{\alpha}'(s)$  和  $\frac{1}{\kappa(s)} \vec{\alpha}(s) \times \vec{\alpha}''(s)$  各自并不和  $\vec{\alpha}'(s)$  共线, 它们两个加起来才和  $\vec{\alpha}'(s)$  共线。

**定义 1.16.**  $\vec{\gamma}'(s)$  称为曲线的**挠率向量**, 它与曲线的曲率向量  $\vec{\alpha}'(s)$  共线。**挠率**  $\tau(s)$  是一个函数, 它的绝对值为  $|\vec{\gamma}'(s)|$ , 若  $\vec{\gamma}'(s)$  与  $\vec{\alpha}'(s)$  同向, 则为负; 反之则为正。

这里挠率的正负是人为规定的, 只是为了后续讨论的形式简便。

现在我们来具体把挠率计算出来。由于  $\vec{\gamma}'(s)$  的方向已经确定, 可将

$$\vec{\gamma}'(s) = -\tau(s) \frac{\vec{\alpha}'(s)}{|\vec{\alpha}'(s)|}$$

代入(1.6)式, 两边同时与  $\frac{\vec{\alpha}'(s)}{|\vec{\alpha}'(s)|}$  做内积, 有

$$\begin{aligned} \tau(s) &= -\vec{\gamma}'(s) \cdot \frac{\vec{\alpha}'(s)}{|\vec{\alpha}'(s)|} \\ &= -\left( \left( \frac{1}{\kappa(s)} \right)' \vec{\alpha}(s) \times \vec{\alpha}'(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \vec{\alpha}(s) \times \vec{\alpha}''(s) \right) \cdot \frac{\vec{\alpha}'(s)}{|\vec{\alpha}'(s)|} \\ &= \frac{(\vec{\alpha}(s), \vec{\alpha}'(s), \vec{\alpha}''(s))}{|\vec{\alpha}'(s)|^2} \end{aligned}$$

显然, 挠率也是一个不变量。从挠率的定义来看, 挠率在很大程度上是描述曲线从  $\vec{\alpha}(s), \vec{\alpha}'(s)$  张成的平面中脱离的速率。实际上, 我们可以把这一观察严格化:

**定理 1.17.** 曲率处处非零的曲线  $C$  是平面曲线的充分必要条件是其挠率为零。

证明. 必要性显然, 来看充分性。曲率处处为零, 意味着  $\vec{\alpha}(s)$  和  $\vec{\alpha}'(s)$  始终可以张成一个平面。挠率为零, 按定义有该平面的单位法向量  $\vec{\gamma}'(s) = \vec{0}$ ; 或者根据挠率的计算公式, 有  $(\vec{\alpha}(s), \vec{\alpha}'(s), \vec{\alpha}''(s)) = 0$ 。但是这两个式子只能说明  $\vec{\alpha}(s)$  和  $\vec{\alpha}'(s)$  张成的平面法向量不变, 抑或  $\vec{\alpha}(s)$  是一条平面曲线, 并不能直接明晰地说明整个曲线  $\vec{r}(s)$  是平面曲线。为此, 我们还是要借助微积分的语言来说明。

此时, 根据  $(\vec{\alpha}(s), \vec{\alpha}'(s), \vec{\alpha}''(s)) = 0$ , 有  $\vec{\alpha}(s)$  落在一个固定的平面中, 即  $\vec{\alpha}(s) = \lambda(s)\vec{a} + \mu(s)\vec{b}$ 。

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{\alpha}(s) ds \\ &= \vec{r}(0) + \int_0^t (\lambda(s)\vec{a} + \mu(s)\vec{b}) ds \\ &= \vec{r}(0) + \left( \int_0^t \lambda(s) ds \right) \vec{a} + \left( \int_0^t \mu(s) ds \right) \vec{b}\end{aligned}$$

这一曲线, 一定是落在过点  $\vec{r}(0)$ , 平行于  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  的平面上。

□

注意, 曲率处处非零这一条件不能缺少, 我们可以看下面这个例子

**例 1.18.** 设曲线的参数方程为

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} (e^{-\frac{1}{t^2}}, t, 0) & t < 0, \\ (0, 0, 0), & t = 0, \\ (0, t, e^{-\frac{1}{t^2}}) & t > 0. \end{cases}$$

不难计算, 这是一条正则参数曲线, 而且在  $t=0$  处的曲率为零, 整条曲线的挠率也都为零, 但它不是一条平面曲线。根本原因在于在  $t=0$  处,  $\vec{r}''(0) = \vec{0}$ 。这导致该点处  $\vec{r}'$  和  $\vec{r}''$  共线, 无法确定一个平面。我们在后续的2.2.4小节中还会进一步分析这个例子。

现在我们有曲率和挠率来描述曲线的弯曲程度。核心的问题就成为了: 有了目前这些不变量, 弧长, 曲率, 挠率, **能否完全决定一条曲线?** 重新回到这些不变量的定义, 统一在弧长参数下, 整合起来看。

$$\begin{aligned}|\vec{r}'(s)| &= 1 \\ |\vec{r}''(s)| &= \kappa(s) \\ \frac{(\vec{r}'(s), \vec{r}''(s), \vec{r}'''(s))}{|\vec{r}''(s)|^2} &= \tau(s)\end{aligned}$$

由于并不显式出现  $\vec{r}$ , 用  $\vec{\alpha}(s)$  替换  $\vec{r}(s)$ ,

$$\begin{aligned} |\vec{\alpha}(s)| &= 1 \\ |\vec{\alpha}'(s)| &= \kappa(s) \\ \frac{(\vec{\alpha}(s), \vec{\alpha}'(s), \vec{\alpha}''(s))}{|\vec{\alpha}'(s)|^2} &= \tau(s) \end{aligned}$$

得到一个关于  $\vec{\alpha}(s)$  的常微分方程 (组), 需要在已知  $\kappa(s)$  和  $\tau(s)$  的情况下求解出  $\vec{\alpha}(s)$ 。但是这个向量值的非线性方程太复杂了, 很难直接求解。

在固定的某个直角坐标系下, 关于  $\vec{\alpha}(s)$ , 包含曲率和挠率的方程是非常复杂的, 但是由于曲率和挠率是不变量, 在任何的坐标系下都不变, 所以我们自然希望能够取到合适的右手直角标架, 使得方程简化。当然, 和解析几何中取定一个固定的右手直角标架不同, 这里是要取和曲线密切相关的直角标架场, 我们将在下一章中展开。

## 本章注记

学习本章的要点有两个，一是理解向量函数；二是懂得：微积分，特别是微分方程在微分几何中的应用几乎是无处不在的这样一个事实。

向量函数的关键点在于，向量函数的连续性，导数，积分等概念在定义时是不需要坐标系的，自然也就和坐标系的选取无关。很多教材为了行文简洁，从坐标函数的连续性，导数，积分等概念出发引入向量函数相应的概念，再通过坐标变换公式说明这些定义与坐标系选取无关。应该说这样的讲法只是篇幅限制下的妥协，是向量函数性质的表象，而非实质。



# Chapter 2

## 曲线论基本定理

### 2.1 Frenet 标架及其运动公式

#### 2.1.1 Frenet 标架

对于弯曲的曲线，如果取定固定的标架，最多只能在某一点处简化曲率和挠率的计算。要整体地简化曲率和挠率的表达式，我们实际上要取的是一系列的标架，随着曲线的变化而变化。不妨设曲线曲率不为零。自然希望点点都是正交标架，注意到  $\vec{\alpha}(s)$  已经是单位向量，而且和  $\vec{\alpha}'(s)$  恒垂直。故可以将  $\vec{\alpha}(s)$ ,  $\vec{\beta}(s) = \frac{\vec{\alpha}'(s)}{|\vec{\alpha}'(s)|}$  作为两个基向量。其中， $\vec{\beta}(s)$  称为曲线的**主法向量**。此外，取  $\vec{\gamma}(s) = \vec{\alpha}(s) \times \vec{\beta}(s)$ ，称为曲线的**次法向量**。

这样，在正则曲线曲率  $\kappa(s)$  不为零的点处有一个完全确定的右手单位正交标架  $\{\vec{r}(s); \vec{\alpha}(s), \vec{\beta}(s), \vec{\gamma}(s)\}$ ，称为 Frenet 标架。

Frenet 标架的三个坐标平面也有特定的称谓。其中，

- $\vec{\beta}(s)$  和  $\vec{\gamma}(s)$  张成的（以  $\vec{\alpha}(s)$  为法向量的）平面称为**曲线的法平面**。
- $\vec{\alpha}(s)$  和  $\vec{\beta}(s)$  张成的（以  $\vec{\gamma}(s)$  为法向量的）平面称为**曲线的密切平面**。
- $\vec{\alpha}(s)$  和  $\vec{\gamma}(s)$  张成的（以  $\vec{\beta}(s)$  为法向量的）平面称为**曲线的从切平面**。

## 2.1.2 Frenet 标架的运动公式

现在我们利用 Frenet 标架, 来计算曲率和挠率。依然默认曲线曲率恒不为零, 根据曲率的定义, 曲率向量  $\vec{\alpha}'(s)$  可以表示为

$$\vec{\alpha}'(s) = \kappa(s)\vec{\beta}(s)$$

同时, 我们之前已经分析过, 曲率向量和挠率向量是共线的, 再由挠率的定义

$$\vec{\gamma}'(s) = -\tau(s)\vec{\beta}(s)$$

整合之后我们得到如下的方程组

$$\begin{aligned}\vec{r}'(s) &= \vec{\alpha}(s), \\ \vec{\alpha}'(s) &= \kappa(s)\vec{\beta}(s), \\ \vec{\gamma}'(s) &= -\tau(s)\vec{\beta}(s)\end{aligned}$$

不要忘记我们的目的是在仅仅知道曲率和挠率的情况下, 就能知道整条曲线的形状。而上述方程组显然是不完整的, 我们需要把它补充成真正的方程组。要想得到  $\vec{r}(s)$ , 必须知道  $\vec{\beta}(s)$  或者是  $\vec{\beta}(s)$  的变化规律, 即  $\vec{\beta}(s)$  所满足的微分方程。显然  $\vec{\beta}'(s)$  可以被基底  $\vec{\alpha}(s), \vec{\beta}(s), \vec{\gamma}(s)$  表出, 不妨设

$$\vec{\beta}'(s) = a(s)\vec{\alpha}(s) + b(s)\vec{\beta}(s) + c(s)\vec{\gamma}(s)$$

$\vec{\beta}(s)$  是单位向量, 故  $(\vec{\beta}(s) \cdot \vec{\beta}(s))' = 2\vec{\beta}'(s) \cdot \vec{\beta}(s) = 0$ 。从而,  $b(s) = 0$ 。同样利用内积,  $a(s) = \vec{\beta}'(s) \cdot \vec{\alpha}(s)$ 。注意到  $\vec{\beta}(s) \cdot \vec{\alpha}(s) = 0$

$$(\vec{\beta}(s) \cdot \vec{\alpha}(s))' = \vec{\beta}'(s) \cdot \vec{\alpha}(s) + \vec{\beta}(s) \cdot \vec{\alpha}'(s) = 0$$

从而

$$a(s) = \vec{\beta}'(s) \cdot \vec{\alpha}(s) = -\vec{\beta}(s) \cdot \vec{\alpha}'(s) = -\kappa(s)$$

同理

$$c(s) = \vec{\beta}'(s) \cdot \vec{\gamma}(s) = -\vec{\beta}(s) \cdot \vec{\gamma}'(s) = \tau(s)$$

故

$$\vec{\beta}'(s) = -\kappa(s)\vec{\alpha}(s) + \tau(s)\vec{\gamma}(s)$$

综合得到 Frenet 标架沿曲线  $C$  运动的公式

$$\begin{aligned}\vec{r}'(s) &= \vec{\alpha}(s) \\ \vec{\alpha}'(s) &= \kappa(s)\vec{\beta}(s) \\ \vec{\beta}'(s) &= -\kappa(s)\vec{\alpha}(s) + \tau(s)\vec{\gamma}(s) \\ \vec{\gamma}'(s) &= -\tau(s)\vec{\beta}(s)\end{aligned}$$

称为 **Frenet 公式**。它是 Frenet 标架所满足的常微分方程组。后三个方程可以改写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha}'(s) \\ \vec{\beta}'(s) \\ \vec{\gamma}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\alpha}(s) \\ \vec{\beta}(s) \\ \vec{\gamma}(s) \end{pmatrix}$$

我们注意到方程组的系数矩阵是一个反对称矩阵。事实上，并不限于 Frenet 标架，一般地，沿曲线定义的任何一个单位正交标架的导数的系数矩阵都是反对称矩阵（见习题 2.4 中的 11 题）

更重要的是 Frenet 运动公式是一个关于向量函数的线性常微分方程组。理论上是一定可以解出形式解的，这将在曲线的存在唯一定理的证明中起到至关重要的作用。

需要注意的是，不论是 Frenet 标架的存在，还是 Frenet 运动公式的成立，都有一个前提是曲线的曲率不为零。如果曲线上某些点处的曲率为零，那么情况就会变得复杂。我们通过几个例子来了解。先来看曲率恒为零的情形。

例 2.1. 设直线的方程为  $\vec{r}(s) = (s, 0, 0)$ ，则取

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}(s) &= (1, 0, 0) \\ \vec{\beta}(s) &= (0, \cos \theta, \sin \theta) \\ \vec{\gamma}(s) &= (0, -\sin \theta, \cos \theta)\end{aligned}$$

当  $\theta$  为常数时， $\vec{\alpha}(s), \vec{\beta}(s), \vec{\gamma}(s)$  满足 Frenet 运动公式，可以看作直线  $\vec{r}(s)$  上的 Frenet 标架。但当  $\theta$  随  $s$  变动时，这一标架场不满足 Frenet 运动公式。

再来看曲率有孤立零点的情况。我们之前就遇到过这样的曲线

例 2.2. 设曲线的参数方程为

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} (e^{-\frac{1}{t^2}}, t, 0) & t < 0, \\ (0, 0, 0), & t = 0, \\ (0, t, e^{-\frac{1}{t^2}}) & t > 0. \end{cases}$$

在  $t=0$  处的曲率为零, 曲线在  $0-$  和  $0+$  处的 Frenet 标架并不相同。在区间段  $t < 0$  和  $t > 0$  上各自满足 Frenet 运动公式, 但在  $t=0$  处不满足。

总结一下, 只有在  $\kappa$  严格大于零的前提下, 曲线上的 Frenet 标架场才唯一确定, 同时满足 Frenet 运动方程。仅仅  $\kappa \geq 0$ , 一方面曲线的 Frenet 标架不唯一, 另一方面, 这些 Frenet 标架中, 当初值确定时, 只有一个满足 Frenet 运动公式, 其他均不满足 (2.2.4 小节中我们会详细解释)。

最后, 考虑曲线  $\vec{r}(-s)$ , 此时的 Frenet 标架场变为  $\{-\vec{\alpha}(-s), \vec{\beta}(-s), -\vec{\gamma}(-s)\}$ , 标架运动方程变为

$$\begin{pmatrix} (-\vec{\alpha}(-s))' \\ (\vec{\beta}(-s))' \\ (-\vec{\gamma}(-s))' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}'(-s) \\ -\vec{\beta}'(-s) \\ \vec{\gamma}'(-s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(-s) & 0 \\ -\kappa(-s) & 0 & \tau(-s) \\ 0 & -\tau(-s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\vec{\alpha}(-s) \\ \vec{\beta}(-s) \\ -\vec{\gamma}(-s) \end{pmatrix}$$

结论是曲线定向的改变对曲线运动方程, 以及曲率, 挠率没有任何影响。

### 2.1.3 Frenet 公式的初步应用

先前已经提过, Frenet 公式最关键的作用在于将包含弧长, 曲率、挠率的非线性常微分方程组转化为线性常微分方程组。在利用线性常微分方程得到曲线的存在唯一性之前, 我们先通过一些 Frenet 公式的简单应用来加深对 Frenet 公式的理解。

**定理 2.3.** 曲率处处非零的曲线  $C$  是平面曲线的充分必要条件是其挠率为零。

我们之前从定义出发证明了充分性。利用 Frenet 标架可以得到充分性更简便的证明。

**证明.** 首先, 曲率处处非零表明 Frenet 标架场是被曲线唯一决定, 且满足 Frenet 运动公式。

其次, 挠率为零即  $\vec{\gamma}'(s) = \vec{0}$ , 从而  $\vec{\gamma}(s)$  为常向量, 不妨记为  $\vec{\gamma}_0$ 。

接下来, 我们希望证明曲线落在固定平面中。现在已知了平面法向量为  $\vec{\gamma}_0$ , 自然考虑利用平面的点法式方程, 即试图说明  $(\vec{r}(s) - \vec{r}(0)) \cdot \vec{\gamma}_0 = 0$ 。

为了说明上式, 考虑  $\vec{r}(s) \cdot \vec{\gamma}_0$ , 对其求导数

$$\frac{d}{ds}(\vec{r}(s) \cdot \vec{\gamma}_0) = \vec{\alpha}(s) \cdot \vec{\gamma}_0 = \vec{\alpha}(s) \cdot \vec{\gamma}(s) = 0$$

从而  $0 = \vec{r}(s) \cdot \vec{\gamma}_0 - \vec{r}(0) \cdot \vec{\gamma}_0 = (\vec{r}(s) - \vec{r}(0)) \cdot \vec{\gamma}_0 = 0$ 。充分性得证。必要性显然。

□

**定理 2.4.** 设曲线  $\vec{r}(s)$  中  $s$  为弧长参数, 且曲率和挠率都不为零。如果该曲线落在一个球面上, 则它的曲率和挠率必满足

$$\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)^2 + \left(\frac{1}{\tau(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\right)^2 = \text{常数}$$

证明. 自然要从曲线方程入手。假定该球面的球心是  $\vec{r}_0$ , 半径是  $a$ , 则

$$|\vec{r}(s) - \vec{r}_0|^2 = a^2$$

等式两边关于  $s$  求导

$$\vec{\alpha}(s) \cdot (\vec{r}(s) - \vec{r}_0) = 0$$

继续求导行不通。观察上式, 可见  $\vec{r}(s) - \vec{r}_0$  和  $\vec{\alpha}(s)$  垂直。利用 Frenet 标架, 不妨设

$$\vec{r}(s) - \vec{r}_0 = \lambda(s)\vec{\beta}(s) + \mu(s)\vec{\gamma}(s) \quad (2.1)$$

继续求导, 才发现别有洞天, 根据 Frenet 公式

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}(s) &= \lambda'(s)\vec{\beta}(s) + \lambda(s)(-\kappa(s)\vec{\alpha}(s) + \tau(s)\vec{\gamma}(s)) \\ &\quad + \mu'(s)\vec{\gamma}(s) + \mu(s)(-\tau(s)\vec{\beta}(s)) \\ &= -\lambda(s)\kappa(s)\vec{\alpha}(s) + (\lambda'(s) - \mu(s)\tau(s))\vec{\beta}(s) + (\lambda(s)\tau(s) + \mu'(s))\vec{\gamma}(s) \end{aligned}$$

比较系数, 并求出  $\lambda(s)$ ,  $\mu(s)$ , 得:

$$\begin{aligned} \lambda(s)\kappa(s) &= -1, & \lambda'(s) &= \mu(s)\tau(s), & \mu'(s) &= -\lambda(s)\tau(s) \\ \lambda(s) &= -\frac{1}{\kappa(s)}, & \mu(s) &= \frac{\lambda'(s)}{\tau(s)} = -\frac{1}{\tau(s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa(s)}\right), \end{aligned}$$

此时观察需要证明的结论, 实际上是要求  $\lambda(s)$ ,  $\mu(s)$  这两个系数的限制条件, 即要说明  $\lambda^2(s) + \mu^2(s) = \text{const}$  成立。回到之前的表达式(2.1), 注意到  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  单位正交, 有:

$$|\vec{r}(s) - \vec{r}_0|^2 = \lambda^2(s) + \mu^2(s)$$

根据球面的半径为常数即可得。

□

## \*2.1.4 非弧长参数下的 Frenet 标架、曲率和挠率

以上所有曲率, 挠率, Frenet 标架及公式的计算, 都要基于弧长参数。很多时候所给参数曲线的参数并非是弧长参数, 做容许的参数变换化成弧长参数再计算的话又太复杂了 (事实是反解弧长参数的参数变换绝大多数情况下都无法显式求出)。

如果曲线的方程是  $\vec{r}(t)$ ,  $t$  不是弧长参数。则  $\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'(t)|$ 。假设  $s$  为弧长参数, 令  $\vec{r}(t(s)) = \vec{p}(s)$ , 则参数曲线  $\vec{p}(s)$  有单位切向量  $\vec{\alpha}(s)$ 。换回到参数  $t$  下, 有  $\vec{\alpha}(s(t)) = \tilde{\alpha}(t)$ 。我们希望能够不通过显式的参数变换, 直接求出  $\tilde{\alpha}(t)$ :

$$\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}(t(s)) = \vec{\alpha}(s) = \frac{d\vec{p}(s)}{ds} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \quad (2.2)$$

简而言之, 就是关于参数  $t$  的切向量的单位化。

对于单变量的向量函数, 每次做参数变换后都得到相应的复合函数, 记号太复杂, 实质上却没有什么差异。所以, 以后我们把  $\vec{p}(s)$  和  $\tilde{\alpha}(s)$  仍然记做  $\vec{r}(s)$  和  $\vec{\alpha}(s)$ 。换句话说,  $\vec{r}$  和  $\vec{\alpha}$  均视为定义在点集曲线  $C$  上的函数, 有不同的参数化。同时, 对其求导时自动视为被求导自变量的函数<sup>1</sup>。不加声明, 我们在曲线的研究中始终采用这样的简化记法。于是, (2.2)式就可以简化为

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

接下来求解  $\vec{\beta}(t)$ 。直接对  $\vec{\alpha}(t)$  求导需要处理分式的导数, 相对复杂。可以将方程  $\vec{\alpha}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$  改写为

$$\vec{r}'(t) = |\vec{r}'(t)|\vec{\alpha}(t) \quad (2.3)$$

两边关于  $t$  再求一次导数

$$\begin{aligned} \vec{r}''(t) &= \frac{d|\vec{r}'(t)|}{dt} \vec{\alpha}(t) + |\vec{r}'(t)| \frac{d\vec{\alpha}(t)}{dt} \\ &= \frac{d|\vec{r}'(t)|}{dt} \vec{\alpha}(t) + |\vec{r}'(t)| \frac{d\vec{\alpha}}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= \frac{d|\vec{r}'(t)|}{dt} \vec{\alpha}(t) + |\vec{r}'(t)|^2 \kappa(t) \vec{\beta}(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

理论上此时可以把  $\vec{\beta}(t)$  反解出来, 但是其中涉及到对模长求导数, 还包含了未知的  $\kappa(t)$ 。故而先来求  $\vec{\gamma}(t)$ 。

<sup>1</sup>常微分方程做变量替换时也经常使用这样的记法

(2.3) 式和 (2.4) 式左右两端做外积

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = |\vec{r}'(t)|^3 \kappa(t) \vec{\gamma}(t)$$

从而

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t)|^3 \kappa(t)} \quad (2.5)$$

当然，直接用这个表达式是没有意义的，因为  $\kappa(t)$  未知。不过无关紧要，因为我们知道  $\vec{\gamma}(t)$  是单位向量，于是

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}$$

最后，再求解  $\vec{\beta}(t)$ ，可以利用二重外积公式

$$\begin{aligned} \vec{\beta}(t) &= \vec{\gamma}(t) \times \vec{\alpha}(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|} \times \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \\ &= \frac{|\vec{r}'(t)|}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|} \vec{r}''(t) - \frac{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t)| |\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|} \vec{r}'(t) \end{aligned}$$

此外，根据 (2.5) 式，以及  $\vec{\gamma}(t)$  为单位向量，不难知道，

$$\kappa(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}$$

实际上根据(2.4)式就可以求出主法向量  $\vec{\beta}$  或是曲率  $\kappa(t)$ , (2.4)式可变形为

$$\vec{r}''(t) - \frac{d|\vec{r}'(t)|}{dt} \vec{\alpha}(t) = |\vec{r}'(t)|^2 \kappa(t) \vec{\beta}(t) \quad (2.6)$$

等式左端可以化简为

$$\vec{r}''(t) - \frac{d|\vec{r}'(t)|}{dt} \vec{\alpha}(t) = \vec{r}''(t) - \frac{d|\vec{r}'(t)|}{dt} \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \vec{r}''(t) - \left( \vec{r}''(t) \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \right) \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

上述向量的单位化即得  $\vec{\beta}(t)$ 。注意到上式右端可以看作是  $\vec{r}''$  减去在单位方向  $\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$  上的内射影, 得到的是  $\vec{r}''$  在  $\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$  上的外射影, 故其模长和  $|\vec{r}'' \times \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}|$  相同, 即

$$\left| \vec{r}''(t) - \left( \vec{r}''(t) \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \right) \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \right| = \left| \vec{r}''(t) \times \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \right|$$

于是  $\vec{\beta}(t)$  和之前主法向量的表达式等价。

同时, 对(2.6)式两边同时取模长, 可求出

$$\kappa(t) = \frac{\left| \vec{r}''(t) - \frac{d|\vec{r}'(t)|}{dt} \vec{\alpha}(t) \right|}{|\vec{r}'(t)|^2} = \frac{|\vec{r}''(t) \times \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}|}{|\vec{r}'(t)|^2}$$

也和之前  $\kappa(t)$  的表达式等价。

接下来求解挠率  $\tau(t)$ 。最自然的想法是对 (2.4) 式再求一次导数, 并利用 Frenet 公式, 得到

$$\begin{aligned} \vec{r}'''(t) &= \frac{d^2|\vec{r}'(t)|}{dt^2} \vec{\alpha}(t) + \frac{d|\vec{r}'(t)|}{dt} \kappa(t) |\vec{r}'(t)| \vec{\beta}(t) + (|\vec{r}'(t)|^2 \kappa(t))' \vec{\beta}(t) \\ &\quad + |\vec{r}'(t)|^3 \kappa(t) (-\kappa(t) \vec{\alpha}(t) + \tau(t) \vec{\gamma}(t)) \end{aligned}$$

我们只想保留  $\tau(t)$ , 两边内积  $\vec{\gamma}(t)$ ,

$$\vec{r}'''(t) \cdot \vec{\gamma}(t) = |\vec{r}'(t)|^3 \kappa(t) \tau(t)$$

代入  $\vec{\gamma}(t)$  和  $\kappa(t)$  的表达式, 有

$$\tau(t) = \frac{(\vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \vec{r}'''(t))}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|^2}$$

也可以直接根据 Frenet 标架的运动公式, 对  $\vec{\alpha}(t)$  和  $\vec{\gamma}(t)$  直接求导数来求曲率  $\kappa(t)$  和挠率  $\tau(t)$ , 感兴趣的读者可以自己尝试求解。

## \*2.1.5 Frenet 标架的代数本质

我们已经知道，若曲线非平面曲线，则 Frenet 标架存在，且  $\tau(s) \neq 0$ ，根据挠率计算公式，即  $(\vec{r}'(s), \vec{r}''(s), \vec{r}'''(s)) \neq 0$ ，这说明  $\vec{r}'(s), \vec{r}''(s), \vec{r}'''(s)$  构成了一个仿射坐标系。总结非弧长参数下 Frenet 标架的表达式，有

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \\ \vec{\beta}(t) &= \frac{|\vec{r}'(t)|}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|} \left( \vec{r}''(t) - (\vec{r}''(t) \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}) \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \right) \\ \vec{\gamma}(t) &= \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}\end{aligned}$$

可以看出，标架  $\{\vec{\alpha}(t), \vec{\beta}(t), \vec{\gamma}(t)\}$  即  $\{\vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \vec{r}'''(t)\}$  的 Schmidt 正交化。当然，因为 Frenet 标架必须为右手系，而  $\{\vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \vec{r}'''(t)\}$  的定向可以为左手系；也就是通过 Schmidt 正交化求 Frenet 标架时， $\vec{r}'''(t)$  需要根据定向来决定是否添加一个负号。

这一论断对弧长参数也成立。此时  $\vec{r}'(s)$  就是  $\vec{\alpha}(s)$ ， $\vec{r}''(s)$  和  $\vec{\beta}(s)$  同向，且  $\vec{r}'''(s)$  与  $\vec{\alpha}(s)$ ， $\vec{\beta}(s)$  不共面，此时标架  $\{\vec{r}'(s), \vec{r}''(s), \vec{r}'''(s)\}$  的 Schmidt 正交化相对非弧长参数要简单得多。

## 2.2 曲线的存在唯一性定理

已经知道弧长，曲率，挠率是曲线的不变量，反过来，这三个不变量是否能把所有的正则曲线分类？即我们要回答如下两个问题：

1. 任意给定两个函数  $f(s) \geq 0$ ， $g(s)$ ，能否找到一条曲线恰好以  $f(s) \geq 0$ ， $g(s)$  作为自己的曲率和挠率？
2. 弧长，曲率，挠率是否能完全确定一条曲线的形状？

简而言之，即曲线对于给定曲率和挠率是否存在和唯一。在上一章的最后，我们已经指明如果直接聚焦于曲线自身，则曲线在固定弧长，曲率，挠率的前提下，存在唯一性等价于求解

$$\begin{aligned}|\vec{\alpha}(s)| &= 1 \\ |\vec{\alpha}'(s)| &= \kappa(s) \\ \frac{(\vec{\alpha}(s), \vec{\alpha}'(s), \vec{\alpha}''(s))}{|\vec{\alpha}'(s)|^2} &= \tau(s)\end{aligned}$$

这一方程太过复杂。在这一章里，我们转而考虑 Frenet 标架。如果曲线确定，一般而言 Frenet 标架也确定；更重要的是，反过来看，当 Frenet 标架确定时，曲线也确定。曲线的存在唯一性就转化为了 Frenet 标架的存在唯一性。

Frenet 标架的存在唯一性当然要用到 Frenet 标架的运动公式：

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}'(s) &= \kappa(s)\vec{\beta}(s) \\ \vec{\beta}'(s) &= -\kappa(s)\vec{\alpha}(s) + \tau(s)\vec{\gamma}(s) \\ \vec{\gamma}'(s) &= -\tau(s)\vec{\beta}(s)\end{aligned}$$

本质上，Frenet 公式就是一个齐次线性常微分方程组，而且是  $3 \times 3 = 9$  阶的。Frenet 标架的存在唯一性，某种意义上就是常微分方程组的解的存在唯一性。

一言蔽之：曲线  $\rightarrow$  Frenet 标架  $\rightarrow$  常微分方程组。

## 2.2.1 超定常微分方程组

注意到

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}'(s) &= \kappa(s)\vec{\beta}(s) \\ \vec{\beta}'(s) &= -\kappa(s)\vec{\alpha}(s) + \tau(s)\vec{\gamma}(s) \\ \vec{\gamma}'(s) &= -\tau(s)\vec{\beta}(s)\end{aligned}$$

是线性方程组，由 Picard 存在唯一定理，如果我们在  $s = 0$  点，给定一个正交的标架  $\{\vec{r}(0); \vec{\alpha}(0), \vec{\beta}(0), \vec{\gamma}(0)\}$ ，则方程组有解  $\mathbf{e}_1(s)$ ,  $\mathbf{e}_2(s)$ ,  $\mathbf{e}_3(s)$  且唯一。

但是常微分方程组解的存在唯一性并不等同与曲线的存在唯一性。此时的  $\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s), \mathbf{e}_3(s)$ ，作为常微分方程组的解仅仅是 9 个函数而已，并不一定单位正交。真实几何上的解，还要求它们始终构成右手单位正交标架。也就是说，该方程组还有额外的限制条件，曲线的存在唯一问题是一个超定 (overdetermined) 系统。

对于超定系统，唯一性并不受影响，同时，超定也不意味着方程组一定没有解，存在性需要进一步探讨。

## 2.2.2 Frenet 标架场的存在性和唯一性

证明的基本想法是以常微分方程组的解的存在性为出发点，进而验证额外的限制条件也满足。

**Step1, 常微分方程的解的存在性。** 假定向量函数  $\mathbf{e}_1(s)$ ,  $\mathbf{e}_2(s)$ ,  $\mathbf{e}_3(s)$  (实际上是  $3 \times 3$  个数量函数) 满足 Frenet 公式对应的常微分方程组:

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1(s) \\ \mathbf{e}_2(s) \\ \mathbf{e}_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1(s) \\ \mathbf{e}_2(s) \\ \mathbf{e}_3(s) \end{pmatrix}$$

根据常微分方程理论, 给定任意一组初值,  $\mathbf{e}_1^0$ ,  $\mathbf{e}_2^0$ ,  $\mathbf{e}_3^0$ , 上述方程有唯一一组解  $\mathbf{e}_1(s)$ ,  $\mathbf{e}_2(s)$ ,  $\mathbf{e}_3(s)$  满足初始条件  $\mathbf{e}_i(s) = \mathbf{e}_i^0$ 。

**Step2, 取初值  $\mathbf{e}_1^0$ ,  $\mathbf{e}_2^0$ ,  $\mathbf{e}_3^0$  为一个正交标架, 并验证之前得到的解  $\{\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s), \mathbf{e}_3(s)\}$  确实构成右手单位正交标架。**

先来证明正交性。比如, 我们希望说明  $\mathbf{e}_1(s) \cdot \mathbf{e}_2(s) = 0$ 。自然的想法:

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{e}_1(s) \cdot \mathbf{e}_2(s))}{ds} &= \frac{d\mathbf{e}_1(s)}{ds} \cdot \mathbf{e}_2(s) + \mathbf{e}_1(s) \cdot \frac{d\mathbf{e}_2(s)}{ds} \\ &= \kappa(s)\mathbf{e}_2(s) \cdot \mathbf{e}_2(s) - \kappa(s)\mathbf{e}_1(s) \cdot \mathbf{e}_1(s) + \tau(s)\mathbf{e}_1(s) \cdot \mathbf{e}_3(s) \end{aligned}$$

这里只能得到在  $s = 0$  点的导数值为零。在  $s > 0$  时事先并不知道  $\{\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s), \mathbf{e}_3(s)\}$  是否为单位正交标架, 故也无法判断是否为零, 否则就成了循环论证。

对单个  $\mathbf{e}_1(s) \cdot \mathbf{e}_2(s)$  求导行不通, 我们需要整体地处理, 从更高的视角来证明。为了书写简便, 令

$$A(s) = \begin{pmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) & a_{13}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) & a_{23}(s) \\ a_{31}(s) & a_{32}(s) & a_{33}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

同时将  $\mathbf{e}_i(s)$  写成行向量, 记

$$Q(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1(s) \\ \mathbf{e}_2(s) \\ \mathbf{e}_3(s) \end{pmatrix}$$

是个  $3 \times 3$  的矩阵函数。此时, Frenet 公式变为:

$$\frac{dQ(s)}{ds} = A(s)Q(s) \quad (2.7)$$

要说明  $\{\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s), \mathbf{e}_3(s)\}$  的正交性, 等价于  $Q(s)$  为正交矩阵。即要在  $Q(0)Q^T(0) = \text{Id}$  的前提下, 证明  $Q(s)Q^T(s) \equiv \text{Id}$ 。令  $P(s) = Q(s)Q^T(s)$ , 有  $P(0) = \text{Id}$  且

$$\begin{aligned} \frac{dP(s)}{ds} &= \frac{dQ(s)}{ds}Q^T(s) + Q(s)\frac{dQ^T(s)}{ds} \\ &= A(s)Q(s)Q^T(s) + Q(s)Q^T(s)A^T(s) \\ &= A(s)P(s) - P(s)A(s) \end{aligned}$$

由于矩阵乘法不交换, 并不能直接断言  $A(s)P(s) - P(s)A(s)$  为零。然而, 由于  $A(s)$  已经确定, 上式可以看作一个关于  $P(s)$  的一阶线性常微分方程组

$$\frac{dP(s)}{ds} = A(s)P(s) - P(s)A(s)$$

可以观察出  $P(s) \equiv \text{Id}$  为这个线性常微分方程组的一个解。根据常微分方程解的唯一性, 它只能有这一个唯一的解。故必然有  $P(s) \equiv \text{Id}$ , 正交性得证。

再来证明恒为右手系, 即  $|Q(s)| = 1$ 。注意到我们已经证明了矩阵  $Q(s)$  的正交性, 于是  $|Q(s)|$  只能等于  $\pm 1$ 。但  $|Q(s)|$  是连续的, 而且  $|Q(0)| = 1$ , 故  $|Q(s)| \equiv 1$ 。

实际上, 不需要使用正交性和连续性, 可直接利用求导证明右手性。

$$\frac{d|Q(s)|}{ds} = \begin{vmatrix} q'_{11} & q'_{12} & q'_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{33} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q'_{21} & q'_{22} & q'_{33} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{33} \\ q'_{31} & q'_{32} & q'_{33} \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

此时, 根据方程(2.7), 有

$$\begin{pmatrix} q'_{11} & q'_{12} & q'_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{33} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{pmatrix} q'_{11} & q'_{12} & q'_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{33} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{33} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

进而

$$\begin{vmatrix} q'_{11} & q'_{12} & q'_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{33} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} |Q| = a_{11}|Q|$$

方程(2.8)右端中剩余的两个行列式可以类似地计算, 最终有

$$\frac{d|Q(s)|}{ds} = a_{11}|Q| + a_{22}|Q| + a_{33}|Q| = \text{tr}A|Q|$$

不要忘记矩阵  $A$  是一个非常特殊的矩阵,  $\text{tr}A = 0$ , 从而  $|Q(s)|$  为常数。又  $Q(0) = 1$ , 故  $Q(s) \equiv 1$ , 必为右手标架。

也从几何角度出发证明, 考虑标架三个基向量的混合积的导数, 与行列式求导本质相同。此外, 对于行列式的求导, 有更一般的处理方法, 感兴趣的同学可以参阅附录B。

对超定方程有解的理解:

- 回忆, 习题 2.4, 11 题, 单位正交标架场的方程系数均是反对称的。实际上反过来也成立。
- 对于普通的超定方程, 当然不一定有满足条件的解。可是由于这一方程的系数的矩阵是反对称的, 所以刚好可以保持初始正交标架的定向和正交性<sup>a</sup>。
- 这也是我们为什么选取 Frenet 标架 (对  $\vec{r}'(s), \vec{r}''(s), \vec{r}'''(s)$  做 Schimt 正交化) 的根本原因。因为分析上, 以反对称矩阵为系数的常微分方程会保持正交标架 (而一般的常微分方程并不会“保持”普通的仿射标架)。进而, 保持正交标架又会自动导出曲线自动为弧长参数。

简而言之, 几何中的方程往往都有着内在的对称性, 而这些对称性, 在我们解决问题的过程中会起到关键的作用。

<sup>a</sup>这一点实际可以从李群和李代数的关系严格说明。

唯一性的证明可以完全利用常微分方程中已有的解的唯一性。事实上, 即便完全没有学过常微分方程, 也可以用另外一种方法证明唯一性, 即所谓的**能量方法**。它的使用范围更广, 对非线性常微方程方程以及偏微分方程也适用。感兴趣的同学可以参阅附录E。

目前为止, 我们实际上证明了 Frenet 标架的存在唯一性:

**命题 2.5.** 任意给定两个  $[0, L]$  区间上的连续可微函数  $\kappa(s) \geq 0$ , 连续函数  $\tau(s)$ , 以及正交标架  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , 则存在唯一一组标架场  $\{\vec{\alpha}(s), \vec{\beta}(s), \vec{\gamma}(s)\}$ ,  $s \in [0, L]$ , 使得

1. 标架场在初始点  $s = 0$  处恰为  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ;
2. 标架场满足 Frenet 运动公式, 运动公式中的系数恰为  $\kappa(s)$  和  $\tau(s)$ 。

### 2.2.3 曲线的存在唯一性

这一小节里我们由 Frenet 标架场的存在唯一性来导出曲线的基本定理。除了给出不变量弧长, 曲率, 挠率(目前曲率的要求依然是大于等于零), 此外我们同时给定空间中一点  $\vec{p}$ , 以及  $\vec{p}$  点处的正交标架  $\{\vec{p}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 。根据命题 2.5, 有唯一的标架场  $\{\vec{\alpha}(s), \vec{\beta}(s), \vec{\gamma}(s)\}$ 。考虑  $\vec{r}(s) = \vec{\alpha}(s)$ , 于是得到一条曲线

$$\vec{r}(s) = \vec{p} + \int_0^s \vec{\alpha}(t) dt.$$

这条曲线上的 Frenet 标架, 即是命题 2.5 中给出的标架场  $\{\vec{\alpha}(s), \vec{\beta}(s), \vec{\gamma}(s)\}$ , 自然曲率和挠率也和给定的函数相吻合。

可以想象, 如果给出的是空间中另外一点  $\vec{q}$ , 以及正交标架  $\{\vec{q}; \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ , 那么

$$\vec{r}(s) = \vec{q} + \int_0^s \vec{\alpha}(t) dt$$

曲线的形状仍然是相同的, 但是“位置”和“指向”不同。为了更严格地说明这一事实, 我们需要引入**刚体运动**的概念。记  $T$  是  $E^3$  到  $E^3$  自身的一个线性变换, 任取一个单位正交标架  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , 记  $T\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^3 t_{ij}\mathbf{e}_j$ , 则  $T$  为正交变换的充分必要条件为矩阵  $t_{ij}$  为正交矩阵。

**定义 2.6.** 若  $\sigma(\vec{r}) = T\vec{r} + \vec{p}_0$ , 其中  $T$  是  $E^3$  上的一个正交变换,  $\vec{p}_0$  是一个常向量, 则我们把  $\sigma$  称为  $E^3$  上的全等变换 (congruent transformation)。特别地, 如果正交变换  $T$  满足  $\det T = 1$ , 则称  $\sigma$  为  $E^3$  中的刚体运动。

简单地讲, 刚体运动可以视为一个平移加转动 (保持定向, 不包含镜面反射)。它可以把任何一点处的一个右手单位正交标架, 变换到某点处的某个右手单位正交标架。有了刚体运动的概念, 我们就可以导出**曲线论基本定理**:

**定理 2.7.** 任意给定两个  $[0, a]$  区间上的连续可微函数  $\kappa(s) > 0$ , 连续函数  $\tau(s)$ , 则存在一条正则参数曲线  $\vec{r}_1(s)$ ,  $s \in [0, a]$ , 以  $s$  为弧长参数, 并以  $\kappa(s)$  和  $\tau(s)$  为它的曲率和挠率。更进一步, 如果有另外一条曲线  $\vec{r}_2(s)$  也满足这样的条件, 则曲线  $\vec{r}_1(s)$  和  $\vec{r}_2(s)$  相差一个刚体运动。

我们简述下证明思路。首先取定空间中一点  $\vec{p}$ , 以及  $\vec{p}$  点处的一个单位正交标架  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 。根据命题 2.5, 存在一条从  $\vec{p}$  点出发的曲线  $\vec{r}_1(s)$  满足题设中的曲率和挠率条件, 且在  $\vec{p}$  处的 Frenet 标架就是  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 。

其次,假定有曲线  $\vec{r}_2(s)$  的曲率和挠率也满足条件,不妨设  $\vec{r}_2(0) = \vec{q}$ 。因为曲率恒大于零,曲线  $\vec{r}_2(s)$  的 Frenet 标架是完全确定的,且满足运动公式,记为  $\{\vec{\alpha}_2(s), \vec{\beta}_2(s), \vec{\gamma}_2(s)\}$ 。该标架场在  $\vec{q}$  点一点处的取值不妨记为  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ 。对曲线  $\vec{r}_1(s)$  做刚体运动变换,其中,线性变换  $T$  由  $T\mathbf{e}_i = \mathbf{d}_i$  给出。此时  $T$  在基底  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  下的矩阵为  $t_{ij} = \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_j$  是一个正交矩阵。由于正交变换  $T$  作用在自身空间上,在其他右手单位正交基底下的变换关系也是一样的,与选择的标架  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  无关,故正交变换  $T$  在初始基底  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  下的矩阵也是  $(t_{ij})$ 。另外,再由  $\vec{p}_0 = \vec{q} - \vec{p}$ , 确定刚体运动  $\sigma$ 。进而得到一条新的曲线

$$\tilde{r}_1(s) = \sigma(\vec{r}_1(s)) = T\vec{r}_1(s) + \vec{p}_0$$

最后,由正交变换  $T$  的选取方式,曲线  $\tilde{r}_1(s)$  在  $q$  点处的 Frenet 标架也是  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ , 一方面,由于曲率恒大于零,曲线  $\tilde{r}_1(s)$  上的 Frenet 标架场  $\{\tilde{\alpha}_1(s), \tilde{\beta}_1(s), \tilde{\gamma}_1(s)\}$  是被曲线完全确定下来的,同时必然满足 Frenet 运动方程;另一方面,根据命题2.5中满足运动公式的标架场的唯一性,可知 Frenet 标架场  $\{\tilde{\alpha}_1(s), \tilde{\beta}_1(s), \tilde{\gamma}_1(s)\}, \{\vec{\alpha}_2(s), \vec{\beta}_2(s), \vec{\gamma}_2(s)\}$  完全重合,进而曲线  $\tilde{r}_1(s)$  和  $\vec{r}_2(s)$  自身也完全重合。

**推论 2.8.** 设  $\vec{r}_1(t)$  和  $\vec{r}_2(u)$  是两条正则参数曲线,曲率处处不为零。如果存在三次以上的连续可微函数  $u = \lambda(t)$ ,  $\lambda'(t) \neq 0$ , 使得

$$s_1(t) = s_2(\lambda(t)), \kappa_1(t) = \kappa_2(\lambda(t)), \tau_1(t) = \tau_2(\lambda(t))$$

则有一个刚体运动  $\sigma$ , 使得  $\vec{r}_1(t) = \sigma(\vec{r}_2(\lambda(t)))$ 。

至此我们完成整个曲线基本定理的证明。

### \*2.2.4 曲线基本定理中条件 $\kappa(s) > 0$ 的解读

Frenet 标架的存在唯一性和曲线论基本定理有一个细微的区别: Frenet 标架的存在唯一性的证明中,只需要  $\kappa(s) \geq 0$ , 而曲线论基本定理中  $\kappa(s) > 0$ 。不妨先来看我们之前遇到过的一个例子。

**例 2.9.** 设曲线的参数方程为

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} (e^{-\frac{1}{t^2}}, t, 0) & -0.5 \leq t < 0, \\ (0, 0, 0), & t = 0, \\ (e^{-\frac{1}{t^2}}, t, 0) & 0 < t \leq 0.5. \end{cases}$$

不难计算,这是一条正则参数曲线,曲率为  $\frac{2t^{-6}e^{-\frac{1}{t^2}}(2-t^2)}{(1+4t^{-6}e^{-\frac{2}{t^2}})}$ , 挠率恒为零。考虑另外一条正则参数曲线

$$\tilde{r}(t) = \begin{cases} (e^{-\frac{1}{t^2}}, t, 0) & -0.5 \leq t < 0, \\ (0, 0, 0), & t = 0, \\ (0, t, e^{-\frac{1}{t^2}}) & 0 < t \leq 0.5. \end{cases}$$

这两条参数曲线有着相同的弧长,曲率和挠率,在  $t=0$  处的曲率均为零。但形状并不相同(局部看相同,但是整体并非相差一个刚体运动)。

从例子看,如果没有  $\kappa(s) > 0$  的限制,则曲线的唯一性无法保证;因此定理中的  $\kappa(s) > 0$  这一条件绝对不能减弱为  $\kappa(s) \geq 0$ 。

- 根本原因在于曲线和 Frenet 标架并非严格一一对应:当  $\kappa(s) > 0$  时, Frenet 标架中的  $\vec{\beta}$  确定,进而整个 Frenet 标架唯一确定;当  $\kappa(s) = 0$ ,  $\vec{\beta}$  可以在法平面中任意选取,同一条曲线可以有不同的 Frenet 标架。
- 这也就意味着在  $\kappa(s) = 0$  处曲线可以绕着  $\vec{\alpha}$  “扭动”,“扭动”后仍然是一条连续可微的曲线,与原曲线形状不同,但有着相同的曲率和挠率。
- “扭动”之后的标架场,不满足 Frenet 运动公式(甚至扭动后的 Frenet 标架场可能不连续可微)。
- 我们所证明的 Frenet 标架的存在唯一性,说的是满足 Frenet 运动公式的标架场是唯一存在的;  $\kappa(s) = 0$  时,有其他不满足 Frenet 运动公式的“扭动”后的 Frenet 标架场,可导出同样曲率和挠率的曲线。
- 也就意味着  $\kappa(s) \geq 0$  时曲线的唯一性无法得到保障。

就例子 2.9 而言,如果给定  $t = -0.5$  点处的单位正交标架,同时给定曲率为  $\frac{2t^{-6}e^{-\frac{1}{t^2}}(2-t^2)}{(1+4t^{-6}e^{-\frac{2}{t^2}})}$ , 挠率恒为零,则通过求解 Frenet 运动公式,我们只能得到形为  $\tilde{r}(t)$  的曲线。此时,曲线  $\tilde{r}(t)$  上的 Frenet 标架并不满足 Frenet 运动公式(实际上  $\tilde{r}(t)$  上的 Frenet 标架在  $t=0$  点处不连续),但是这一不连续的 Frenet 标架,依然对应一条连续可微的曲线,且有着和原先相同的曲率和挠率。

## 2.3 平面曲线

平面曲线可以看做是挠率为零的空间曲线。故之前对空间曲线的讨论均适用于平面曲线，特别是如下的 Frenet 公式：

$$\begin{aligned}\vec{r}'(s) &= \vec{\alpha}(s) \\ \vec{\alpha}'(s) &= \kappa(s)\vec{\beta}(s) \\ \vec{\beta}'(s) &= -\kappa(s)\vec{\alpha}(s) + \tau(s)\vec{\gamma}(s) \\ \vec{\gamma}'(s) &= -\tau(s)\vec{\beta}(s)\end{aligned}$$

此时， $\tau(s) \equiv 0$ ，故与  $\vec{\gamma}(s)$  无关，得到平面内的方程组：

$$\begin{aligned}\vec{r}'(s) &= \vec{\alpha}(s) \\ \vec{\alpha}'(s) &= \kappa(s)\vec{\beta}(s) \\ \vec{\beta}'(s) &= -\kappa(s)\vec{\alpha}(s)\end{aligned}$$

然而，由于 Frenet 标架的存在，以及三维空间中曲线的基本定理，都要求  $\kappa(s) > 0$ ，故如果完全照搬空间曲线的理论，我们也只能研究  $\kappa(s) > 0$  的平面曲线。这对平面曲线的限制太大了，同时，平面曲线有它自身的特殊性，可以有更有针对性的研究方式。

### 2.3.1 平面曲线的 Frenet 标架及其运动公式

对于连续可微的平面曲线，我们需要包含两个单位正交向量的标架  $\{\vec{\alpha}(s), \vec{\beta}(s)\}$ 。对  $\vec{r}(s)$  求导即可得到，**是否必须有  $\kappa(s) > 0$  的条件才能得到  $\vec{\beta}(s)$ ?**

**因为是平面曲线，只要将  $\vec{\alpha}(s)$  旋转  $90^\circ$  就能得到  $\vec{\beta}(s)$ 。**同时，我们限定于平面右手标架，故规定逆时针旋转。我们称这样的  $\{\vec{r}(s); \vec{\alpha}(s), \vec{\beta}(s)\}$  为**平面曲线的 Frenet 标架**。

至此，平面曲线 Frenet 标架中的  $\vec{\beta}(s)$  和空间 Frenet 标架中的  $\vec{\beta}(s)$  并不一致，它们共线，但方向可以相同，也可以相反。为了记号简单，我们仍然都用  $\vec{\beta}(s)$  表示。

总而言之，平面曲线的 Frenet 标架不需要  $\kappa(s) > 0$ ，或者不需要对  $\kappa_r(s)$  加任何限制条件，就可以完全确定。

考虑平面曲线 Frenet 标架的运动公式，首先对  $\vec{\alpha}(s)$  求导

$$\vec{\alpha}'(s) = \kappa_r(s)\vec{\beta}(s)$$

其中  $\kappa_r(s)$  称为平面曲线的**相对曲率**。易知,  $\kappa_r(s) = \pm\kappa(s)$ 。

其次, 还需要对  $\vec{\beta}(s)$  求导

$$\vec{\beta}'(s) = \lambda(s)\vec{\alpha}(s) + \mu(s)\vec{\beta}(s)$$

由  $\vec{\beta}$  是单位向量, 有  $\mu(s) = 0$ ;  $\vec{\beta}$  和  $\vec{\alpha}$  垂直,  $\lambda(s) = -\kappa_r(s)$ 。最终得到:

$$\vec{r}'(s) = \vec{\alpha}(s)$$

$$\vec{\alpha}'(s) = \kappa_r(s)\vec{\beta}(s)$$

$$\vec{\beta}'(s) = -\kappa_r(s)\vec{\alpha}(s)$$

可以完全仿照空间曲线的情形, 通过求解线性方程组, 证明平面曲线的存在唯一定理——即给定弧长, 相对曲率, 在相差平面上的刚体运动的意义下, 平面曲线唯一存在。然而, 平面曲线这种非常特殊的几何对象, 其存在唯一定理可以有更简洁直观的证明方法。

### 2.3.2 平面曲线的存在唯一性

我们知道, 在平面上, 除了直角坐标系外, 往往还会用到极坐标。类比来看, 平面上的曲线也可以写成以夹角为参数的形式。具体来看, 用  $\tilde{\theta}(s)$  表示单位切向量  $\vec{\alpha}(s)$  与固定的  $x$  轴的正向所构成的角, 称为**切向辐角**。我们首先将 Frenet 运动公式改写成为关于切向辐角的形式。此时

$$\vec{\alpha}(s) = (\cos \tilde{\theta}(s), \sin \tilde{\theta}(s)), \quad \vec{\beta}(s) = (-\sin \tilde{\theta}(s), \cos \tilde{\theta}(s))$$

而

$$\vec{\alpha}'(s) = (-\sin \tilde{\theta}(s) \cdot \tilde{\theta}'(s), \cos \tilde{\theta}(s) \cdot \tilde{\theta}'(s)) = \tilde{\theta}'(s)\vec{\beta}(s)$$

故  $\kappa_r(s) = \frac{d\tilde{\theta}(s)}{ds}$ 。

回忆: 我们之前介绍过曲线映到单位球面的切线像  $\tilde{s}$ , 有  $\kappa(s) = \left| \frac{d\tilde{s}}{ds} \right|$ 。在平面曲线的特殊情况下, 切线像为  $(\cos \tilde{\theta}(s), \sin \tilde{\theta}(s)) \in S^1$ , 且  $\kappa_r(s) = \frac{d\tilde{\theta}(s)}{ds}$ 。

由于两向量的夹角  $\tilde{\theta}$  一般约定为  $[0, 2\pi)$  之间, 这会导致函数  $\tilde{\theta}(s)$  在曲线切向量穿过  $x$  轴正向时并非连续可微。为了克服这一困难, 我们可以引入一个新的函数

引理 2.10. 存在一个连续函数  $\theta : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ , 使得

$$\tilde{\theta}(s) = \theta(s) \pmod{2\pi}, \quad \forall s \in [0, L]$$

这里  $\pmod{2\pi}$  的意思是可以相差  $2\pi$  的整数倍。

直观上看,  $\theta(s)$  就是每当曲线切向量从下向上穿过  $x$  轴正向时, 由  $\tilde{\theta}(s)$  的值增加  $2\pi$  得到, 反之减少  $2\pi$ 。接下来我们简述严格构造  $\theta(s)$  的过程。

首先, 对任意的  $s \in [0, L]$ , 存在包含  $s$  的小开区间  $I_s$ , 使得  $I_s$  的切线像落在  $S^1$  上的一个  $\frac{2}{3}$  圆弧内。因为  $\{I_s : s \in [0, L]\}$  是闭区间的开覆盖, 根据有限覆盖定理, 存在有限的子覆盖  $I_{s_1}, I_{s_2}, \dots, I_{s_n}$ , 其中  $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ 。

其次, 对于每个  $I_{s_k}$ , 因为它总是不超过  $\frac{2}{3}$  圆弧, 故总可以选取  $x$  轴正向, 或者负向,  $y$  轴正向或者负向作为分割线, 避开  $I_{s_k}$  的切线像。也就是与  $x$  轴正向夹角  $\tilde{\theta}_k$  的范围分别取  $[0, 2\pi)$ ,  $[-\pi, \pi)$ ,  $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ ,  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 。此时, 存在  $m_k$ , 使得

$$\tilde{\theta}_k(s) = \tilde{\theta}_{k+1}(s) + 2m_k\pi, \forall s \in I_{s_k} \cap I_{s_{k+1}}$$

最后, 令

$$\theta_k = \tilde{\theta}_k + 2n_k\pi, \quad k = 1, 2, \dots$$

这里  $n_1 = 0, n_k = \sum_{1 \leq j < k} m_j$ 。不难验证,  $\theta_k(s) = \theta_{k+1}(s), \forall s \in I_{s_k} \cap I_{s_{k+1}}$ 。进而  $\theta_k$  可以拼接为一个整体连续可微函数  $\theta(s)$ , 它继承了  $\tilde{\theta}$  全部的局部性质: 即  $\theta(s)$  是一个连续可微函数, 使得

$$\frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \vec{\alpha}(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)) \quad (2.9)$$

此外, 我们需要注意的是  $\theta(s)$  的选取并不唯一, 依然可以整体相差  $2\pi$  的整数倍。

有了这些准备工作, 我们可以更简洁地来研究平面曲线的存在唯一性。设连续可微的平面曲线  $\vec{r}(s) = (x(s), y(s))$ 。根据  $\kappa_r(s) = \frac{d\theta(s)}{ds}$ , 有

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^t \kappa_r(s) ds$$

而

$$\vec{r}'(s) = \vec{\alpha}(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$$

于是

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \left( \int_{t_0}^t \cos \theta(s) ds, \int_{t_0}^t \sin \theta(s) ds \right)$$

等价于

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t \cos \theta(s) ds \\ y(t) &= y(t_0) + \int_{t_0}^t \sin \theta(s) ds \end{aligned}$$

也就是说, 此时的平面曲线, 完全被弧长和曲率所决定。总结一下: 对于平面曲线而言, Frenet 运动方程可以显式解出:

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \theta(t_0) + \int_{t_0}^t \kappa_r(s) ds \\ x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t \cos \theta(s) ds \\ y(t) &= y(t_0) + \int_{t_0}^t \sin \theta(s) ds\end{aligned}\quad (2.10)$$

这相当于直接得到了平面曲线的曲线论基本定理: 任给一个函数  $\kappa_r(s)$ , 存在唯一 (相差一个平移  $(x(t_0), y(t_0))$  和转动  $\theta(t_0)$ ) 的平面曲线, 以这个函数作为相对曲率。

我们继续深入挖掘平面曲线的性质。依然考虑定义在  $[0, L]$  上的以弧长为参数的连续可微曲线  $C$ , 上述式子中的第一个可以改写为

$$\int_0^L \kappa_r(s) ds = \theta(L) - \theta(0) \quad (2.11)$$

我们把  $\int_0^L \kappa_r(s) ds$  称为曲线  $C$  的**总相对曲率**。那么这个式子意味着曲线的总相对曲率等于切向幅角的改变量。我们将在平面曲线整体性质的研究中对简单闭曲线切向幅角的改变量进一步展开讨论 (见第三部分, 11.1 节)。

最后, 我们稍微提一下, 与空间曲线略有不同, 给定平面定向后, 如果改变平面曲线的定向, 相对曲率会相差一个负号。这是因为在改变曲线定向时, 平面 Frenet 标架中的  $\beta$  的方向会随之旋转  $180^\circ$ , 但曲线本身的曲率向量  $r''(s)$  不变。

### \*2.3.3 相对曲率 $\kappa_r$ 的计算

已经知道, 切向幅角下, 如果取弧长参数  $s$ , 则有  $\kappa_r(s) = \frac{d\theta(s)}{ds}$ 。如果取的是普通的参数  $t$ , 不难得到

$$\kappa_r(t) = \frac{d\theta(t)}{ds} = \frac{d\theta(t)}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\dot{r}(t)|} \frac{d\theta(t)}{dt}$$

我们现在来看右手直角坐标系下  $\kappa_r$  的计算。先来看弧长参数下, 参数曲线可以表示为  $\vec{r}(s) = (x(s), y(s))$ 。此时

$$\vec{\alpha}(s) = (x'(s), y'(s)), \quad \vec{\beta}(s) = (-y'(s), x'(s))$$

根据 Frenet 运动公式  $\vec{\alpha}'(s) = \kappa_r(s)\vec{\beta}(s)$ , 有

$$\kappa_r(s) = \vec{\alpha}'(s) \cdot \vec{\beta}(s) = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s) = \begin{vmatrix} x'(s) & y'(s) \\ x''(s) & y''(s) \end{vmatrix}$$

再来看普通参数下的计算, 设正则参数曲线的形式为  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ 。仍然需要来考虑:

$$\kappa_r(t) = \frac{d\vec{\alpha}(t)}{ds} \cdot \vec{\beta}(t) = \frac{dt}{ds} \vec{\alpha}'(t) \cdot \vec{\beta}(t) = \frac{\vec{\alpha}'(t) \cdot \vec{\beta}(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

此时,

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \left( \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right)$$

$$\vec{\beta}(t) = \left( -\frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right)$$

为了更简便地计算  $\vec{\alpha}'(t) \cdot \vec{\beta}(t)$ , 对  $\vec{r}'(t) = |\vec{r}'(t)|\vec{\alpha}(t)$  两边同时求导, 有

$$\vec{r}''(t) = \frac{d|\vec{r}'(t)|}{dt} \vec{\alpha}(t) + |\vec{r}'(t)| \vec{\alpha}'(t)$$

再和  $\vec{\beta}(t)$  做内积, 有

$$\vec{r}''(t) \cdot \vec{\beta}(t) = |\vec{r}'(t)| \vec{\alpha}'(t) \cdot \vec{\beta}(t)$$

代入之前的表达式, 最终有

$$\kappa_r(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}^3} = \frac{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}^3}$$

考虑绝对值  $|\kappa_r(s)|$  或  $|\kappa_r(t)|$ , 不难发现它们实际上均为  $\kappa(s)$  或  $\kappa(t)$  的特殊情形。

## 2.4 重要的曲线

### \*2.4.1 渐伸线和渐屈线

先引入两个概念

**定义 2.11.** 如果在空间曲线  $C_1$  和  $C_2$  之间存在一个对应, 使得曲线  $C_1$  在任意一点的切线恰好是曲线  $C_2$  在对应点的法线, 则称曲线  $C_2$  为  $C_1$  的**渐伸线**, 同时曲线  $C_1$  是  $C_2$  的**渐屈线**。

显然, 渐伸线和渐屈线可以视为一种形式的对偶。给定曲线, 我们可以具体求出曲线对应的渐屈线。

**命题 2.12.** 设正则参数曲线  $C$  的参数方程为  $\vec{r}(s)$ ,  $s$  为弧长参数, 则  $C$  的渐屈线  $\tilde{C}$  的参数方程为

$$\tilde{r}(s) = \vec{r}(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\vec{\beta}(s) - \frac{1}{\kappa(s)}\left(\tan \int \tau(s)ds\right)\vec{\gamma}(s)$$

其中  $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$  属于曲线  $C$  的 Frenet 标架。

证明. 根据定义, 渐屈线由曲线  $C$  法线族上的点构成, 即渐屈线的参数方程可以写为

$$\tilde{r}(s) = \vec{r}(s) + \lambda(s)\vec{\beta}(s) + \mu(s)\vec{\gamma}(s)$$

再根据定义,  $C$  的法线族  $\lambda(s)\vec{\beta}(s) + \mu(s)\vec{\gamma}(s)$  要与渐屈线相切, 即与  $\tilde{r}(s)$  的切向量平行。而由 Frenet 标架的运动公式,

$$\tilde{r}'(s) = (1 - \lambda(s)\kappa(s))\vec{\alpha}(s) + (\lambda'(s) - \mu(s)\tau(s))\vec{\beta}(s) + (\mu'(s) + \lambda(s)\tau(s))\vec{\gamma}(s)$$

对比系数不难得到

$$\lambda(s)\kappa(s) = 1, \quad \frac{\lambda'(s) - \mu(s)\tau(s)}{\lambda(s)} = \frac{\mu'(s) + \lambda(s)\tau(s)}{\mu(s)}$$

由第一式子可得

$$\lambda(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

再由其中的第二个式子, 可以得到

$$\lambda'(s)\mu(s) - \lambda(s)\mu'(s) = (\lambda^2(s) + \mu^2(s))\tau(s)$$

于是

$$\frac{d}{ds} \arctan \left( \frac{\mu(s)}{\lambda(s)} \right) = -\tau(s)$$

故

$$\arctan \left( \frac{\mu(s)}{\lambda(s)} \right) = - \int \tau(s)ds$$

即

$$\mu(s) = -\frac{1}{\kappa(s)} \tan \int \tau(s) ds$$

□

从这一公式出发, 我们还能得到非常有趣的结论。分情况讨论, 当曲线  $C$  的挠率  $\tau(s)$  不为零时, 其法线族是渐屈线  $\tilde{C}$  的切线族; 由于切线面必然是可展的, 实际上我们证明了如下结论: 挠率不为零的正则参数曲线必有其单参数法线族构成的一个可展曲面, 也就是习题中的第小题。

当然, 对于挠率为零的平面曲线, 可以找平行于平面的法向量法线族, 成为柱面。也就是上述结论可以拓广为: 正则参数曲线必有其单参数法线族构成的一个可展曲面。

同时, 当  $\tau(s)$  恒为零时, 渐屈线方程变为

$$\tilde{r}(s) = \vec{r}(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \vec{\beta}(s) \quad (2.12)$$

我们知道  $\frac{1}{\kappa(s)}$  是曲线的曲率半径, 而  $\vec{\beta}(s)$  为曲线的主法向, 即对给定的  $s$ ,  $\tilde{r}(s)$  代表曲线  $C$  在  $s$  点处的曲率中心。而所谓的平面曲线的渐屈线, 就是平面曲线的曲率中心的轨迹。实际上, 这也是平面上渐屈线更常用的定义, 也是“渐屈”这一名称的由来。

另外需要注意的是, 曲线的渐屈线有可能是退化的。最简单的例子, 平面上单位圆周的渐屈线是自己的圆心, 变成一个点。除了这种退化的情形之外, 曲线的渐屈线是存在的, 且对于平面曲线而言, 它的渐屈线唯一。

最后, 渐屈线的几何意义非常明显, 我们将会在第 7.4.1 小节中提到, 它是曲线的某一个法线族的包络线。

接下来我们再来看渐伸线。为了弄清楚渐伸线的几何含义, 我们需要先把某曲线  $C$  的渐伸线方程求解出来。

**命题 2.13.** 设正则参数曲线  $C$  的参数方程为  $\vec{r}(s)$ ,  $s$  为弧长参数, 则  $C$  的渐伸线  $\tilde{C}$  的参数方程为

$$\tilde{r}(s) = \vec{r}(s) + (c - s)\vec{\alpha}(s)$$

其中  $\vec{\alpha}$  属于曲线  $C$  的 Frenet 标架,  $c$  为任意常数。

证明. 根据定义, 可设渐伸线  $\tilde{C}$  的方程为:

$$\tilde{r}(s) = \vec{r}(s) + \lambda(s)\vec{\alpha}(s)$$

其切向量为

$$\tilde{r}'(s) = (1 + \lambda'(s))\vec{\alpha}(s) + \lambda(s)\kappa(s)\vec{\beta}(s)$$

它要和曲线  $C$  自身的法向量共线，等价于要和  $C$  的切向量垂直，即  $\alpha(s) \cdot \tilde{r}'(s) = 0$ ，代入有

$$1 + \lambda'(s) = 0$$

因此

$$\lambda(s) = c - s$$

□

直观上看，

- 当  $s = c$  时，渐伸线上的点位于曲线  $C$  上，意味着该点到  $\vec{r}(0)$  的弧长为  $c$ ；
- 当  $s = 0$  时，渐伸线上的点位于曲线在  $s = 0$  点处切线上，该点到  $\vec{r}(0)$  的直线段长度为  $c$ ；
- 对于  $0 < s < c$ ，渐伸线上的点位于曲线某点处切线上，且渐伸线上的点到某点的直线段长度，再加上某点到初始点  $\vec{r}(0)$  的曲线弧长，得到的和是固定的常数  $c$ 。

换言之，所谓曲线  $C$  的渐伸线，可以按如下过程来理解

1. 在曲线  $C$  上取固定一点，不妨记做  $q$ ；实际上这里的  $q$  对应  $\vec{r}(c)$ ，当然因为常数  $c$  可以任意取，所以相当于  $q$  点也可以任意取；
2. 在曲线  $C$  上再取一点记做  $p$ ；
3. 把  $pq$  之间的曲线段保持长度不变，但是拉成直线段，同时要求直线段和原曲线  $C$  在  $p$  点相切；
4. 此时，直线段的一段是  $p$  点，另一端是  $q'$  点，换句话说，此时  $q'$  点的位置由  $p$  点决定，我们可以记为  $q'(p)$ ；
5. 让  $p$  点的位置从  $q$  点开始，逐渐前移，得到的  $q'$  点的轨迹。

简单地说，就是把曲线  $C$ ，以  $r(c)$  为端点，慢慢地拉直，端点在空间中划出的轨迹。这也是我们为什么称它为渐伸线（也有文献成为渐开线，总是都是伸展的含义）的原因。更形象地打个比方，大家可以想象一下拉开绕在线圈上的透明胶带的过程。

特别需要注意的是，命题2.12中包含不定积分，命题2.13中也包含常数  $c$ 。选取不同的常数，得到的曲线是不同的。这里不同的意思并不仅仅是参数方程不同，而是曲线本身无法通过刚体运动重合<sup>1</sup>。也就是说，一般而言，一条曲线的渐伸线并不唯一。当然，也有特例，比如平面圆周，空间中的螺旋线，它们的渐伸线在刚体运动的意义下是唯一存在的。

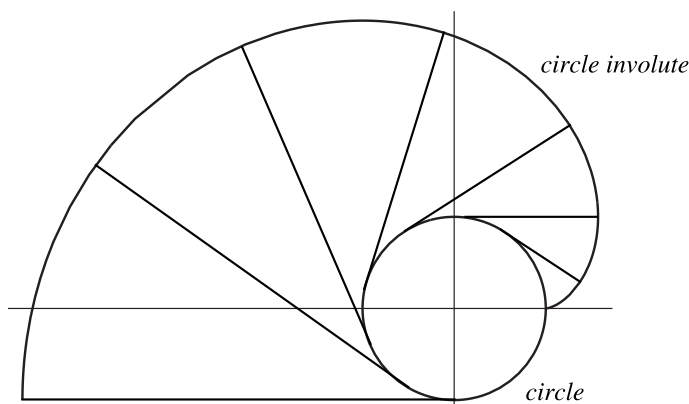


图 2.1: 圆的渐伸线

各种渐伸线中，最为直观的例子，就是平面上圆周的渐伸线。考虑半径为  $a$  的圆周，简单起见，不妨假设其圆心位于原点，此时圆的参数方程为  $(a \cos \frac{s}{a}, a \sin \frac{s}{a})$ ，根据命题2.13，取  $c = 0$ ，可得渐伸线的方程为：

$$(a \cos \frac{s}{a} + s \sin \frac{s}{a}, a \sin \frac{s}{a} - s \cos \frac{s}{a})$$

令  $\varphi = \frac{s}{a}$ ，则有

$$\begin{cases} x = a(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) \\ y = a(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) \end{cases}$$

这里需要注意的是，一般教科书上默认  $\varphi$  的定义域为  $[0, \infty)$ 。其实定义域显然可以扩展到  $(-\infty, \infty)$ 。此时不难观察到

<sup>1</sup>不同常数  $c$  对应的曲线族，实际上构成了所谓的一族平行曲线。<sup>[3]</sup>中给出了平面中平行曲线的概念，空间中平行曲线的概念类似。

- $[0, \infty)$  和  $(-\infty, 0]$  的部分关于  $x$  轴对称;
- 在  $(0, 0)$  点曲线不正则;
- 不考虑自交的部分, 圆周的渐伸线有些类似于心形曲线 (心形曲线是一种特殊的外摆线, 外摆线的定义可以参考<sup>[4]</sup>)。

还有一种理论上更重要的平面曲线, 即所谓的摆线 (Cycloid), 也叫旋轮线。顾名思义, 此时的圆周是滚动的<sup>1</sup>。不妨设有半径为  $a$  的圆周, 沿着  $x$  轴滚动, 考虑圆周上某一点的轨迹。如下图:

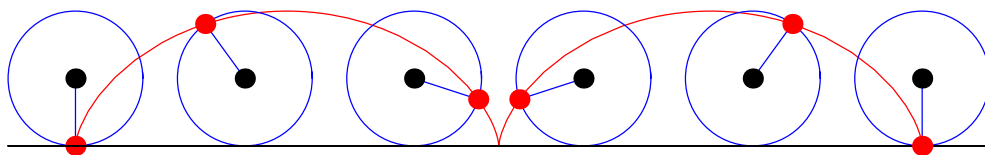


图 2.2: 摆线

不难求出它的参数方程为

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

它的定义域同样为  $(-\infty, +\infty)$ , 但是它是周期的, 所以很多时候我们仅仅限定在一个周期内考虑, 即  $\theta$  的取值范围为  $[0, 2\pi]$ 。

注意, 摆线和圆的渐伸线并非同一种曲线 (可以严格证明, 见习题), 但它们有着比较近的亲缘关系 (参见<sup>[4]</sup>)。摆线有一个非常重要的性质, 就是摆线是自身的渐屈 (渐伸) 线。因为渐伸线不唯一, 所以我们只要来看摆线的渐屈线。根据(2.12)式, 不需要化成弧长参数, 只要求出主法向量  $\vec{\beta}$  和曲率  $\kappa$  即可。不难求出

$$\vec{\alpha}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos\theta}}(1 - \cos\theta, \sin\theta)$$

$$\vec{\beta}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos\theta}}(\sin\theta, \cos\theta - 1)$$

<sup>1</sup>和圆周的渐伸线形成的物理过程恰恰相反因为圆周的渐伸线可以视为一根动直线上固定一点, 随着直线无滑动地绕着圆周转动的轨迹。

而

$$\kappa(\theta) = -\frac{a^2 \begin{vmatrix} 1 - \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}}{a^3(\sqrt{2 - 2 \cos \theta})^3} = \frac{1 - \cos \theta}{a(\sqrt{2 - 2 \cos \theta})^3} = \frac{1}{2a\sqrt{2 - 2 \cos \theta}}$$

于是渐屈线的方程为

$$\tilde{r}(\theta) = (a(\theta - \sin \theta), a(1 - \cos \theta)) + 2a(\sin \theta, \cos \theta - 1) = a(\theta + \sin \theta, \cos \theta - 1)$$

是将原有摆线向下平移  $2a$ ，向左（右）平移  $\pi$  得到的，如图2.4.1

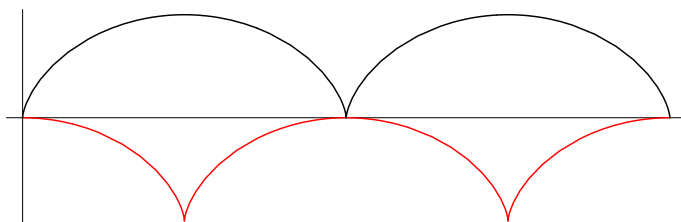


图 2.3: 摆线及其渐屈线

从物理角度看，倒置的摆线还有一个非常重要的性质，即所谓的等时性。Huygens 根据这一性质构想出理想的等时单摆钟。此外，最速降线是倒置摆线的一部分。这些有关摆线的深入内容，从初等几何角度探讨，可以参考<sup>[4]</sup>；从微分几何角度探讨，可以参考本讲义附录C。

渐伸线和渐屈线在机械制造、光学、引力透镜效应等领域有广泛且关键的应用（例如制造耦合的齿轮），更多关于平面中渐伸线和渐屈线的内容，可以参考<sup>[3]</sup>的第4章；同时，平面渐屈线还有空间曲面下的推广，即所谓的焦曲面（focal surface）。焦面不但和后续内容中的包络曲面有关，也和我们后续要遇到的保角映射也有密切的关系，感兴趣的同学可以参考<sup>[3]</sup>的第20章。

## 本章注记

这一章的内容的难度并不算高，对于很多初学微分几何的同学，却成了很难逾越的大山，随之丧失了继续学习的兴趣和勇气。

我们已经清楚，这一章的主线在于将先曲线的存在唯一性，转化为满足 Frenet 运动公式的标架场的存在唯一性，再转化为线性方程组解的存在唯一性。但是，难点在于这三者并非是完全等价的。

首先，线性方程组的解存在唯一，但是理论上，解只是三个向量函数，我们要额外论证它们一直保持单位正交，才能得到标架场的存在性。

其次，标架场的唯一性，指的是初始点处标架给定，满足 Frenet 运动公式的标架场唯一。然而，若有曲率  $\kappa$  为零，则不满足 Frenet 运动公式的标架场，仍然可以导出连续可微，且曲率和挠率为给定函数的曲线。因此，为了保证曲线在给定初始点和初始标架后的唯一性，需要将条件加强为  $\kappa > 0$ 。

最后，由于初始的点和标架可以有不同的选取，导致曲线会差一个刚体运动，因而在差刚体运动的意义下，曲线唯一。

在理解曲线基本定理证明的主线基础上，注意到各个环节之间的间隙，并设法把这些间隙“抹平”，才算是真正掌握了这一章内容。

## Chapter 3

# 曲面的第一和第二基本形式

整个第一部分和第二部分中所谓的曲面，严格地讲，都应该称之为“曲面片”，也就是完整曲面中的一部分，和  $\mathbb{R}^2$  中开单位圆盘同胚的一个二维点集。换句话说，曲面片即曲面的局部。恰如我们这份讲义的结构，先研究曲面的局部性质。具体来说，在这一章中，我们引入曲面的第一和第二基本形式，它们都是曲面的不变量。我们会在下一章中说明这些不变量在满足相容性条件的情况下，可以完全决定曲面的形状。同时，学习第三、四章的过程中，一定要和曲线的内容进行比较，因为首先两者的基本框架一致，其次我们的主要手段就是利用曲线来研究曲面。同时也要做好心里准备，曲面远比曲线要复杂，使用工具的难度也更高。在分析工具的应用上，曲线主要用单变量微积分，常微分方程；曲面主要用多变量微积分，偏微分方程。在几何工具的应用上，曲线主要使用右手正交标架；曲面主要使用仿射标架。此外，研究曲面还需要用到二次型，二次型对应的对称变换这些代数工具。

### 3.1 正则参数曲面

#### 3.1.1 参数曲面

定义 3.1. 参数曲面是指一个连续映射  $S: D \rightarrow E^3$ ，其中  $D$  为  $E^2$  中的一个二维区域。

在  $E^3$  和  $E^2$  上分别建立坐标系, 以  $(x, y, z)$  和  $(u, v)$  为坐标, 则

$$S: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in D$$

或

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

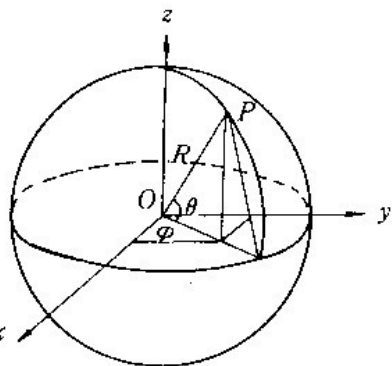
简而言之, 所谓参数曲面, 本质上就是二元的向量函数。

我们希望能够将研究曲面转化为研究曲线。令  $u = u_0$ , 让参数  $v$  变化,  $\vec{r}(u_0, v)$  称为  $v$ -曲线; 令  $v = v_0$ , 让参数  $u$  变化,  $\vec{r}(u, v_0)$  称为  $u$ -曲线; 两者合称为参数曲线网。参数  $(u, v)$  也称为曲面  $S$  的曲纹坐标。

但是曲纹坐标并不一定能够和表面上的点一一对应, 也就是并非真正的坐标。

例 3.2. 单位球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , 可写成参数形式

$$\begin{cases} x = \cos \theta \cos \phi \\ y = \cos \theta \sin \phi \\ z = \sin \theta \end{cases}$$



也就是  $(\theta, \phi)$  可以视为单位球面的曲纹坐标。但在南北极点处, 参数  $(\theta, \phi)$  和点并非一一对应关系。

### 3.1.2 曲面的切向量、切平面、正则性和容许参数变换

我们自然希望能选取出曲面较好的参数, 成为曲面上真正的局部坐标。为此, 我们先引入一些概念。

定义 3.3. 曲面  $S$  上经过点  $p$  的任意一条连续可微曲线在该点的切向量称为曲面  $S$  在点  $p$  的切向量。

来看切向量的具体形式。参数曲面  $S: \vec{r}(u, v)$  上任意一条连续可微曲线可以表示为:  $\vec{r}(u(t), v(t))$ , 其中  $u(t), v(t)$  是  $t$  的连续可微函数。考虑过  $p = \vec{r}(u(0), v(0))$  的曲线在  $p$

点处的切向量。

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{r}(u(t), v(t))}{dt} \right|_{t=0} &= \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \frac{du(t)}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \frac{dv(t)}{dt} \right) \Big|_{t=0} \\ &= \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=0} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} + \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0} \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \end{aligned}$$

为了记号简单, 我们把  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$  记作  $\vec{r}_u$ ,  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$  记作  $\vec{r}_v$ 。即任何一个切向量均可以写为  $a\vec{r}_u + b\vec{r}_v$  的形式。

反之, 考虑形如  $a\vec{r}_u + b\vec{r}_v$  的线性组合, 我们可以构造一条曲线:  $u(t) = u_0 + at$ ,  $v(t) = v_0 + bt$ 。对于曲线  $\vec{r}(t) = \vec{r}(u_0 + at, v_0 + bt)$ , 显然有

$$\left. \frac{d\vec{r}(u(t), v(t))}{dt} \right|_{t=0} = a\vec{r}_u + b\vec{r}_v$$

于是, 有如上形式的全体切向量也构成了一个向量空间。当  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  线性无关时, 这个向量空间的维数为 2。

**定义 3.4.** 若  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  线性无关, 则称曲面  $S$  在该点处是正则的。

在正则点处,  $\vec{r}(u_0, v_0) + \lambda\vec{r}_u(u_0, v_0) + \mu\vec{r}_v(u_0, v_0)$  为切平面的方程。需要注意的是, 在非正则点, 不一定没有切平面, 只是该切平面无法由  $u-, v-$  曲线的切向量张成。比如例3.2中球面的南北极点。

不难注意到  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  线性无关, 有如下的等价条件:

1. 形如  $\vec{r}(u_0 + at, v_0 + bt)$  的曲线, 其中  $a, b$  不全为零, 均为正则曲线。
2.  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ 。

进而可以引入

**定义 3.5.** 正则点处,  $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$  称为曲面在该点处的法向量。

**定义 3.6.** 3 次以上连续可微, 且点点正则的参数曲面, 称为正则参数曲面。

**定义 3.7.** 若变量替换  $\begin{cases} u = u(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ v = v(\tilde{u}, \tilde{v}) \end{cases}$  有

1.  $u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})$  均 3 次以上连续可微;

$$2. \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{vmatrix} \neq 0$$

则称为曲面的容许参数变换。

可以验证容许参数变换将正则参数曲面变为正则参数曲面。具体来看

$$\vec{r}(u, v) = \vec{r}(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})) = \tilde{r}(\tilde{u}, \tilde{v})$$

根据链式法则有

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{\tilde{u}} &= \vec{r}_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \vec{r}_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \tilde{r}_{\tilde{v}} &= \vec{r}_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \vec{r}_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{aligned}$$

于是

$$\tilde{r}_{\tilde{u}} \times \tilde{r}_{\tilde{v}} = \left( \vec{r}_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \vec{r}_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \right) \times \left( \vec{r}_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \vec{r}_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \right) = \left( \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} - \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \right) \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{vmatrix} \vec{r}_u \times \vec{r}_v$$

于是  $\tilde{r}_{\tilde{u}}, \tilde{r}_{\tilde{v}}$  不共线等价于  $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{vmatrix} \neq 0$ 。

我们还可以引入曲面的定向,不太严格地讲,指定曲面的法向量的方向(外或者内)就相当于给出了曲面的定向。如不加专门声明,一般约定  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$  所指的一侧为正则参数曲面的正向。在这样的约定下,容许参数变换保持曲面定向不变的充分必要条件是  $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{vmatrix} > 0$ 。同曲线的情形一致,如果不明确指明的话,一般默认所做的参数变换都是保持定向的。

最后我们提一下一个非常重要的概念。从更深入的观点看,曲面  $S$  在点  $p$  处的切向量和曲面  $S$  自身的参数方程选取无关,且全体切向量构成了一个向量空间,称为曲面  $S$  在点  $p$  处的切空间,记作  $T_p S$ ,它是三维欧氏空间  $\mathbb{R}^3$  的子空间。连续可微曲面某点处的切空间的维数可以是 2, 1, 甚至  $0^1$ 。一般情况下,给定曲面的某一个参数方程  $\vec{r}(u, v)$ ,由  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  张成的线性空间是切空间的子空间;当参数方程正则时,必然张成曲面在该点处的切空间,且切空间维数为 2。换言之,限制在我们所关心的正则参数曲面范畴内,我们可以简单地把切空间,等同于  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  张成的线性空间。

为了和空间曲线的情形区别开来,我们一般用大写英文字母  $Y, X, Z$  来表示曲面上某点处的切向量<sup>2</sup>。

<sup>1</sup>比如  $(u^3, u^2, v)$  在原点处的切空间维数为 1,  $(u^3, v^3, u^2 + v^2)$  在原点处的切空间维数为 0。

<sup>2</sup>后续也会用这些字母表示整体的切向量场

### 3.1.3 正则参数曲面的性质

回到我们最开始提出的问题，正则性和曲纹坐标是否能成为真正的坐标有着密切的关系。直观上看，在正则点附近，当参数  $u, v$  变化时， $\vec{r}(u, v)$  的值也随之变化， $(u, v)$  应该和曲面上的点一一对应。实际上也确实如此。注意到：

$$\begin{aligned}\vec{r}_u \times \vec{r}_v &= \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \times \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &= \left( \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right)\end{aligned}$$

不妨设  $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ ，根据反函数定理，局部上  $\begin{cases} x(u, v) \\ y(u, v) \end{cases}$  可逆，从而局部上不同的曲纹坐标  $(u, v)$  对应不同的点  $(x, y, z)$ ，故可以当作真正的坐标。

进一步，不妨假设  $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$  的反函数为  $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ 。可以验证，这也是一个容许参数变换。此时，

$$\begin{aligned}\vec{r}(u, v) &= \vec{r}(u(x, y), v(x, y)) \\ &= (x(u(x, y), v(x, y)), y(u(x, y), v(x, y)), z(u(x, y), v(x, y))) \\ &= (x, y, \tilde{z}(x, y))\end{aligned}$$

我们把形如  $(x, y, f(x, y))$  的参数方程称为曲面的 **Monge 形式**。不难看出：

- 任何一个正则参数曲面都可以局部地改写成 Monge 形式；
- Monge 形式所表示的曲面必然是正则的。

例 3.8. 设  $f(x, y, z)$  是定义在  $E^3$  上的连续可微函数。考虑  $f$  的等值面  $f(x, y, z) = c$ 。证明：当

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \neq \vec{0}$$

时，等值面可以写成一个正则参数曲面；并求其切平面。

证明. 先来说明等值面的正则性。由  $\nabla f \neq \vec{0}$ ，不妨假定  $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ 。根据隐函数定理，存在函数  $g(x, y)$ ，使得  $f(x, y, g(x, y)) = c$ 。也就是局部上，等值面可以写成参数方程

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, g(x, y))$$

这是 Monge 形式, 自然正则。 □

解. 如果直接通过 Monge 形式  $(x, y, g(x, y))$  来求  $\vec{r}_x, \vec{r}_y$ , 这里  $g(x, y)$  一般是无法直接求解出来的, 会遇到求隐函数  $g(x, y)$  导数的问题。为了简化求解, 我们回到切空间最初始的定义, 求曲面上曲线的切向量。

不妨设曲面上过某点的曲线为  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 。由于曲线落在曲面上, 自然有

$$f(x(t), y(t), z(t)) = c$$

根据复合函数的链式求导法则, 有

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0$$

即

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = 0$$

由于  $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$  可以表示曲面的任何一个切向量, 故  $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$  对应曲面切平面的法向量。从而, 某点  $(x_0, y_0, z_0)$  处的切平面方程为

$$((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = 0$$

□

小节的最后, 我们可以将正则参数曲面和正则参数曲线作比较:

1. 参数曲线也有切空间, 正则点处曲线的切空间的维数为 1, 而曲面正则点切空间的维数为 2。
2. 曲线和曲面都可以进行容许参数变换 (保定向的容许参数变换)。分别要求  $t'(u) \neq 0$  ( $t'(u) > 0$ ) 和  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \neq 0$  ( $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} > 0$ )。

这里  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$  是  $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{vmatrix}$  的简记。

## 3.2 第一基本形式

在研究曲线时, 我们最先考虑的是曲线的弧长。对于曲面, 我们也希望能够首先弄清楚曲面上的各种度量关系。

### 3.2.1 双线性函数与二次型

为了后续阐述方便,我们首先解释一些概念,也就是:对称双线性函数和二次型。简单起见,先考虑欧氏空间,我们知道所谓二次型是一个二次齐次多项式  $XAX^T$ , 其中  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $A$  是一个  $n$  阶实对称矩阵。注意,此时矩阵左乘和右乘的向量都是  $X$ ,自然可以放宽限制,两边乘不同的  $n$  维向量,即  $XAY^T$ , 其中  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ 。显然,这一运算关于  $X$  和  $Y$  分别都是线性的,且  $XAY^T = YAX^T$ 。

基于这一观察,可以引出比二次型更广泛的一个定义

**定义 3.9.** 设  $V$  是一个  $n$  维线性空间,  $g$  是从  $V \times V$  到  $\mathbb{R}$  的一个映射,即对任意  $v, w \in V$ ,  $g(v, w) \in \mathbb{R}$ 。如果  $g$  关于两个变量分别都是线性的,则称  $g$  是  $V$  上的双线性函数。特别的,如果额外满足  $g(v, w) = g(w, v)$  对任意的  $v, w \in V$  都成立,我们则称  $g$  是  $V$  上的对称双线性函数。

如果我们取  $V$  的一组基底  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}^1$ , 此时  $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_n e_n$ ,  $w = y_1e_1 + y_2e_2 + \dots + y_n e_n$ 。令矩阵  $A = (a_{ij})$ , 其中  $a_{ij} = g(e_i, e_j)$ , 根据双线性,有

$$g(v, w) = \sum_{i,j=1}^n x_i g(e_i, e_j) y_j = XAY^T = YAX^T$$

也就是给定基底,双线性函数可以用  $n$  阶实矩阵表示。反过来,给定一个  $n$  阶实矩阵,以及  $V$  上的一组基底,也可以构造出一个  $V$  上的双线性函数。此外,双线性函数  $g$  的对称性,等价于对应矩阵的对称性。

接下来我们定义  $V$  上的二次型  $f$  为  $f(v) = g(v, v)$ , 其中  $g$  是一个对称双线性函数。显然,当对称双线性函数  $g$  确定时,二次型  $f$  取定。其实反过来对称双线性函数  $g$  也可以被二次型  $f$  确定,这是因为,根据对称性和双线性,有所谓的极化公式

$$2g(v, w) = f(v + w, v + w) - f(v, v) - f(w, w)$$

也就是说这两者本质上等价。所以,我们不会刻意区分对称双线性函数和二次型。或者说我们这份讲义后续内容中,如果出现对称双线性函数,那么它就单单指代对称双线性

---

<sup>1</sup>抽象线性空间中的向量,我们一般不再标记向量符号,一方面因为此时上下文非常清晰,不会有误解;另一方面之后的讨论中,我们还需要对抽象线性空间中的向量取共轭,如果再叠加向量符号表达式就会显得非常混乱。

函数；如果出现二次型这一名称，那它根据上下文，可以指代真正的二次型，也可以指代对称双线性函数<sup>1</sup>。

欧氏空间上的标准内积，就是特殊的对称双线性函数，它在基底下的矩阵是正定的。内积相应的二次型就是模长。而我们知道，内积和模长有极化公式，两者相互决定。

### 3.2.2 内积空间与度量矩阵

之前我们构造了正则参数曲面  $S$  在  $p$  点处的切空间  $T_pS$ ，是一个线性空间，同时也是  $\mathbb{R}^3$  的子空间。 $\mathbb{R}^3$  上有一个自然的内积  $\cdot$ ，根据线性代数知识，这一内积限制在子空间  $T_pS$  上，可以得到  $T_pS$  上的内积，不妨记做  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{T_pS}$ ，即对  $T_pS$  上的切向量  $X, Y$ ，有  $\langle X, Y \rangle_{T_pS} = X \cdot Y$ 。在上下文清楚的情况下，我们可以省略下标  $T_pS$ 。此外，本讲义遵循如下记号：如果强调的是三维欧氏空间中的内积，则使用  $\cdot$  来表示内积；如果强调的是限制在切空间  $T_sS$  上的内积，则用  $\langle \cdot \rangle$  表示。当然，这两者在很多情况下是等价的，不严格区分也没有任何影响。

此时， $T_pS$  成为一个内积空间。要研究一个抽象的内积空间，最直接的办法是考虑内积在基底下的度量矩阵<sup>2</sup>，取仿射基底  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ ，有：

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

其中  $E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u, F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v, G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$ 。

**定义 3.10.** 我们把  $E(u, v), F(u, v), G(u, v)$  称为曲面  $S$  的**第一类基本量**。

注意各个第一类基本量均是曲面上的函数。所谓第一类基本量，实际上就是指代曲面上各点处切空间上的内积。

大多数情况下我们并不使用单独的第一类基本量，而是把度量矩阵  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$  作为一个整体使用。利用矩阵乘法，我们可以重新改写度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_u & \vec{r}_v \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup>这样的操作是为了兼顾初学者理解的方便，以及和其他几何教科书相容。因为大多数几何教材不区分对称双线性函数和二次型，但很多初学者容易在这个不起眼的地方产生困惑。

<sup>2</sup>高等代数中我们知道，每一个正定二次型在基底下均对应一个正定矩阵。

于是, 任意两个向量做内积可以用矩阵形式来表达:

$$\begin{aligned} & (x_1\vec{r}_u + y_1\vec{r}_v) \cdot (x_2\vec{r}_u + y_2\vec{r}_v) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_u & \vec{r}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1, y_1) \left( \begin{pmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_u & \vec{r}_v \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1, y_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

换言之, 甚至不需要知道曲面的参数方程, 只要知道了曲面一点处的度量矩阵 (第一类基本量), 那么该点处向量的长度, 夹角, 面积元等几何量都可以计算得到。

接下来我们考察不同参数化下度量矩阵的变化规律。假定有容许参数变换:  $\tilde{r}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \vec{r}(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v}))$ , 采用矩阵写法

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_u & \vec{r}_v \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{r}_{\tilde{u}} \\ \tilde{r}_{\tilde{v}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{r}_{\tilde{u}} & \tilde{r}_{\tilde{v}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

根据链式法则

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{\tilde{u}} &= \vec{r}_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \vec{r}_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \tilde{r}_{\tilde{v}} &= \vec{r}_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \vec{r}_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{aligned}$$

可记为矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} \tilde{r}_{\tilde{u}} \\ \tilde{r}_{\tilde{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{r}_{\tilde{u}} \\ \tilde{r}_{\tilde{v}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{r}_{\tilde{u}} & \tilde{r}_{\tilde{v}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_u & \vec{r}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

为了以后方便讨论, 我们总是记  $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}$  为参数变换的 Jacobi 矩阵。从而

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J^T$$

即两个度量矩阵关于参数变换的 Jacobi 矩阵合同。从更高观点来看, 这两个矩阵是同一个正定二次型在不同基底下的矩阵, 必然关于基底的过度矩阵合同。

### 3.2.3 曲面上曲线长度的计算

假定正则参数曲面  $S: \vec{r}(u, v)$  上的一条光滑曲线  $C$  的参数表示为  $u = u(t), v = v(t)$ , 先前已经计算过曲线的切向量为:

$$\frac{d\vec{r}(u(t), v(t))}{dt} = \vec{r}_u \frac{du(t)}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv(t)}{dt}$$

故

$$\left| \frac{d\vec{r}(u(t), v(t))}{dt} \right| = \sqrt{\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u \left( \frac{du(t)}{dt} \right)^2 + 2\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \frac{du(t)}{dt} \frac{dv(t)}{dt} + \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v \left( \frac{dv(t)}{dt} \right)^2}$$

于是曲线  $C$  的弧长元素为

$$ds = \sqrt{E \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left( \frac{dv}{dt} \right)^2} dt$$

考虑曲面  $S$  的容许参数变换,  $\tilde{r}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \vec{r}(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v}))$ 。此时的光滑曲线  $C$  表示为  $\tilde{u} = \tilde{u}(t), \tilde{v} = \tilde{v}(t)$ 。它的弧长元素为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\tilde{E} \left( \frac{d\tilde{u}}{dt} \right)^2 + 2\tilde{F} \frac{d\tilde{u}}{dt} \frac{d\tilde{v}}{dt} + \tilde{G} \left( \frac{d\tilde{v}}{dt} \right)^2} dt \\ &= \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{d\tilde{u}}{dt} & \frac{d\tilde{v}}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\tilde{u}}{dt} \\ \frac{d\tilde{v}}{dt} \end{pmatrix}} dt \\ &= \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{d\tilde{u}}{dt} & \frac{d\tilde{v}}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{d\tilde{u}}{dt} \\ \frac{d\tilde{v}}{dt} \end{pmatrix}} dt \\ &= \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} & \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix}} dt \\ &= \sqrt{E \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left( \frac{dv}{dt} \right)^2} dt \end{aligned}$$

可见弧长元素与曲面的参数方程选取无关。

### 3.2.4 第一基本形式的引入

同时，我们知道，曲线自身的参数也可以有不同的选择，不妨设保定向的容许参数变换为  $t = t(\tilde{t})$ ，此时  $(u(t), v(t)) = (u(t(\tilde{t})), v(t(\tilde{t}))) = (u(\tilde{t}), v(\tilde{t}))^1$ ，弧长元素的表达式为

$$\begin{aligned} d\tilde{s} &= \sqrt{E\left(\frac{du}{d\tilde{t}}\right)^2 + 2F\frac{du}{d\tilde{t}}\frac{dv}{d\tilde{t}} + G\left(\frac{dv}{d\tilde{t}}\right)^2} d\tilde{t} \\ &= \sqrt{\left(E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right) \left(\frac{dt}{d\tilde{t}}\right)^2} d\tilde{t} \\ &= \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt = ds \end{aligned}$$

可见弧长元素和曲线不同的参数化也无关，只和曲线本身，也就是  $u, v$  的内在对应关系有关。为了去除曲线不同参数化对弧长元素表达式的影响，我们考虑

$$\begin{aligned} ds^2|_C &= (ds)^2|_C = \left(E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right)(dt)^2 \\ &= E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2 \end{aligned}$$

这一式子表面上看，好像是把分母和分子中的  $dt$  约掉，实际上指的是把曲面  $S$  上的内积（严格地讲，点点赋予一个内积，是一个张量场，即得到所谓的度量）进一步限制在曲线  $C$  上，就会得到一维空间上的内积  $ds^2|_C$ 。显然  $ds^2|_C$  这一内积和曲线是如何参数化的无关。注意，在曲线的弧长元素  $ds^2|_C$  中的两个参数  $u, v$  并非是相互独立的参数。它衡量的曲线  $C$  的切方向上向量的模长。

现在我们拓宽一下视角，不局限于某条具体的曲线，让上式中的参数  $u, v$  可以相互独立地自由变化。相当于引入如下定义：

**定义 3.11.** 我们把  $I = ds^2 = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$  称为曲面  $S$  的**第一基本形式**。

很多时候，我们也把第一基本形式写成矩阵乘积的形式：

$$I = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup>为了不引入额外的记号，我们依然把复合后的函数记为  $u, v$

直观上看, 在  $u, v$  相互独立变化时, 相当于可以用  $ds^2$  测量曲面  $S$  任何一个方向上切向量的模长。而我们早就知道内积和模长有所谓的极化公式, 即

$$2\langle X, Y \rangle = \langle X + Y, X + Y \rangle - \langle X, X \rangle - \langle Y, Y \rangle = |X + Y|^2 - |X|^2 - |Y|^2$$

也就是说知道了所有切向量的模长, 自然也可以知道这些切向量之间的内积。换言之, 所谓第一基本形式, 实际上就是曲面上内积的另外一种表达。

### 3.2.5 方向导数, 和以切向量为自变量的第一基本形式

接着上一节内容, 我们来说明所谓第一基本形式, 本质上就是所谓的度量, 即曲面每点的切空间上都赋予一个内积。为了更好地解释这一点, 我们首先引入切向量的方向导数的概念。假定  $X$  是  $p$  点处的切向量, 我们之前已经知道, 存在一条曲面上的曲线  $C: \vec{r}(u(t), v(t))$ , 使得  $\left. \frac{d\vec{r}(u(t), v(t))}{dt} \right|_{t=0} = X$ 。对曲面上的任何一个函数  $f(u, v)$ , 可以限制在曲线  $C$  上得到一个关于  $t$  的函数  $f(u(t), v(t))$ , 进而规定在  $p$  点, 曲面上的函数  $f$  在  $X$  方向的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \left. \frac{df(u(t), v(t))}{dt} \right|_{t=0} \quad (3.1)$$

这里我们需要注意的是经过切向量  $X$  的曲线并不唯一, 但是不难说明, 方向导数  $\frac{\partial f}{\partial X}$  的值与曲线的选取无关; 还可以进一步说明, 求方向导数是一个线性运算, 即对于  $p$  点处的两个切向量  $X, Y$ , 有

$$\frac{\partial f}{\partial(aX + bY)} = a \frac{\partial f}{\partial X} + b \frac{\partial f}{\partial Y}$$

具体细节可以参考<sup>[5]</sup>。这意味着我们可以约定

$$df(X) = \frac{\partial f}{\partial X}$$

即将微分  $df$  视为一个由  $T_p S$  到  $\mathbb{R}$  的线性映射。

考虑函数  $f$  在特殊的切向量  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  下的方向导数。曲面上经过切向量  $\vec{r}_u$  的曲线最简单的选择就是  $u$ -曲线, 经过切向量  $\vec{r}_v$  的曲线最简单的选择就是  $v$ -曲线, 于是根据方向导数的定义式(3.1), 有

$$df(\vec{r}_u) = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad df(\vec{r}_v) = \frac{\partial f}{\partial v}$$

现在,  $u, v$  无非也是曲面上特殊的函数, 因此  $du$  和  $dv$  都可以视为由  $T_p S$  到  $\mathbb{R}$  的线性映射:

$$du(X) = \frac{\partial u}{\partial X}, \quad dv(X) = \frac{\partial v}{\partial X}$$

这里  $\frac{\partial u}{\partial X}, \frac{\partial v}{\partial X}$  是函数  $u, v$  关于向量  $X$  的方向导数。特殊地, 考虑

$$du(\vec{r}_u) = \frac{\partial u}{\partial u} = 1, du(\vec{r}_v) = \frac{\partial u}{\partial v} = 0, dv(\vec{r}_u) = \frac{\partial v}{\partial u} = 0, dv(\vec{r}_v) = \frac{\partial v}{\partial v} = 1$$

这一个式子的含义是  $du, dv$  是  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  的对偶基。再回到一般情形, 假设切向量  $X = a\vec{r}_u + b\vec{r}_v$ , 则有

$$du(X) = a, \quad dv(X) = b \quad (3.2)$$

现在来看第一基本形式  $I = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$ , 首先将它改写为

$$I = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

注意到  $du, dv$  都是切空间上的线性函数, 我们约定第一基本形式  $I$  在切向量  $X, Y$  上的取值为

$$I(X, Y) = \begin{pmatrix} du(X) & dv(X) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du(Y) \\ dv(Y) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

这样第一基本形式  $I$  就成为了切空间上的双线性函数。再来看第一基本形式  $I$  在切空间  $T_pS$  的基底  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ , 这两个特殊的切向量上的取值:

$$I(\vec{r}_u, \vec{r}_v) = \begin{pmatrix} du(\vec{r}_u) & dv(\vec{r}_u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du(\vec{r}_v) \\ dv(\vec{r}_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = F$$

类似,  $I(\vec{r}_u, \vec{r}_u) = E, I(\vec{r}_v, \vec{r}_v) = G$ 。而我们早就知道度量  $\langle, \rangle_{T_pS}$  在基底  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  上的取值, 就是最初的第一类基本量  $\langle \vec{r}_u, \vec{r}_u \rangle = E, \langle \vec{r}_u, \vec{r}_v \rangle = F, \langle \vec{r}_v, \vec{r}_v \rangle = G$ 。这说明度量  $\langle, \rangle_{T_pS}$  和第一基本形式  $I$  在基底上的取值是一样的。最后, 因为度量和第一基本形式都是双线性的, 于是它们在任何切向量上的取值也都是相同的, 两者没有区别。

这时, 很多同学可能会不解, 既然已经有了度量, 为什么还有引入和度量完全等价的第一基本形式?

根本上讲, 这是因为第一基本形式是将抽象的度量表达为一个具体的**二阶对称张量**。而具体化的张量表达式, 相比抽象的点点定义的内积, 会给我们的计算带来非常大的简便。比如, 一旦知道曲线的参数方程  $(u(t), v(t))$ , 代入第一基本形式后开根号, 就直接得到了曲线的弧长元素。远比求出曲线切向量后再计算切向量的模长要简便的多。

还需要注意的是, 曲面的第一基本形式虽然是由曲面上曲线的弧长元素导出的, 但第一基本形式并不完全等同于弧长元素的平方; 最根本的区别在于第一基本形式中的  $du, dv$  是可以独立变化的。或者严格地讲, 第一基本形式是个**二阶对称张量**。

张量本身是个比较复杂的概念，我们这里不需要，也没有能力展开严格地讲解；但是在下一小节中，我们借助大家熟悉的全微分来浅显地解释张量的概念。

最后，我们可以很容易地把对函数的方向导数推广到向量函数上。设  $\vec{a}(u, v) = (a_1(u, v), a_2(u, v), a_3(u, v))$  是定义在曲面  $S$  上的一个连续可微向量函数，则

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial X} \triangleq \left( \frac{\partial a_1}{\partial X}, \frac{\partial a_2}{\partial X}, \frac{\partial a_3}{\partial X} \right)$$

不难验证，假定  $X$  是  $p$  点处的一个切向量，存在曲面上过  $p$  点的曲线  $C: (u(t), v(t))$ ，以  $X$  为曲线在  $p$  点处的切向量，则在  $p$  点处

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial X} = \left. \frac{d\vec{a}(u(t), v(t))}{dt} \right|_{t=0}$$

且和过  $X$  的曲线选取无关。

### 3.2.6 张量视角下的第一基本形式，及其在参数变换下的不变性

回忆：二元函数  $f(u, v), g(u, v)$  的全微分分别为： $df = f_u du + f_v dv$ ,  $dg = g_u du + g_v dv$ 。二者的“乘积”（实为对称化的张量积）

$$df dg = f_u g_u (du)^2 + (f_u g_v + g_u f_v) du dv + f_v g_v (dv)^2$$

就是一个对称张量。

对于向量值的二元函数  $\vec{r}(u, v)$ ，全微分为  $d\vec{r}(u, v) = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ 。此时考虑

$$\begin{aligned} d\vec{r} \cdot d\vec{r} &= (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) \cdot (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) \\ &= \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u (du)^2 + 2\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v du dv + \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v (dv)^2 \\ &= E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2 \end{aligned}$$

恰好得到第一基本形式，也是一个对称张量。

**第一基本形式的等价定义：** 我们把  $I = d\vec{r}(u, v) \cdot d\vec{r}(u, v)$  也称为曲面  $S$  的**第一基本形式**。

利用全微分的不变性,我们很容易说明张量的不变性。假设有容许参数变换: 
$$\begin{cases} u(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ v(\tilde{u}, \tilde{v}) \end{cases},$$

则

$$\tilde{r}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \vec{r}(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v}))$$

于是

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv \\ &= \vec{r}_u \left( \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} d\tilde{u} + \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} d\tilde{v} \right) + \vec{r}_v \left( \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} d\tilde{u} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} d\tilde{v} \right) \\ &= \left( \vec{r}_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \vec{r}_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \right) d\tilde{u} + \left( \vec{r}_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \vec{r}_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \right) d\tilde{v} \\ &= \tilde{r}_{\tilde{u}} d\tilde{u} + \tilde{r}_{\tilde{v}} d\tilde{v} \\ &= d\tilde{r} \end{aligned}$$

进而有  $d\vec{r} \cdot d\vec{r} = d\tilde{r} \cdot d\tilde{r}$ 。即得到了第一基本形式在参数变换下的不变性。

我们也可以将上述验证第一基本形式不变性的过程改写为矩阵形式,更加简洁。已经计算过

$$(du, dv) = (d\tilde{u}, d\tilde{v}) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}$$

即

$$(d\tilde{u}, d\tilde{v}) = (du, dv) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}^{-1}$$

于是

$$\begin{aligned} d\tilde{r} &= (d\tilde{u}, d\tilde{v}) \begin{pmatrix} \tilde{r}_{\tilde{u}} \\ \tilde{r}_{\tilde{v}} \end{pmatrix} = (du, dv) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{pmatrix} \\ &= (du, dv) \begin{pmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{pmatrix} = d\vec{r} \end{aligned}$$

从矩阵形式,我们更容易看出第一基本形式能够保持不变的原因:微分与切向量两部分在不同参数下的变化规律相反,正好抵消。

接下来,我们希望直接从  $I = d\vec{r}(u, v) \cdot d\vec{r}(u, v)$  这一形式出发,说明第一基本形式就是度量。为此,首先把方向导数的运算推广到向量函数上。约定

$$d\vec{r}(X) = \vec{r}_u du(X) + \vec{r}_v dv(X)$$

或等价的, 当  $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  时

$$d\vec{r}(X) = d(x(u, v), y(u, v), z(u, v))(X) = \left( \frac{\partial x}{\partial X}, \frac{\partial y}{\partial X}, \frac{\partial z}{\partial X} \right) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial X}$$

即向量函数在一点处的方向导数还是向量。

然而, 根据方向导数的定义, 我们所选取的过  $X$  的曲线  $(u(t), v(t))$  有如下性质:  
 $\left. \frac{d\vec{r}(u(t), v(t))}{dt} \right|_{t=0} = X$ , 即

$$\left( \left. \frac{dx(u(t), v(t))}{dt}, \frac{dy(u(t), v(t))}{dt}, \frac{dz(u(t), v(t))}{dt} \right) \right|_{t=0} = X$$

而由定义(3.1)式, 这无非是说

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial X} = \left( \frac{\partial x}{\partial X}, \frac{\partial y}{\partial X}, \frac{\partial z}{\partial X} \right) = X \quad (3.4)$$

进而对任意的曲面  $S: \vec{r}(u, v)$  上的切向量  $X$ , 有

$$d\vec{r}(X) = X$$

最后, 如果我们约定第一基本形式  $I = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$  作用在切向量  $X, Y$  上的方式为

$$I(X, Y) \triangleq d\vec{r}(X) \cdot d\vec{r}(Y)$$

则有

$$I(X, Y) = X \cdot Y$$

即第一基本形式就是曲面切空间上内积  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{T_p S}$ 。换言之,  $E(du)^2 + 2Fdu dv + G(dv)^2$  只不过是内积  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{T_p S}$  的张量记法。既然是切空间上已经确定好的内积, 那么第一基本形式自然和参数的选取无关, 是曲面的不变量。

最后, 我们解释下曲面  $S$  的第一类基本量和第一基本形式之间的关系。显然, 这两者可以相互决定, **那么为何要把第一基本形式放在更重要的地位?** 这是因为, 在前面两小节的分析中我们已经可以看到, 第一基本形式作为一个整体, 与曲面、曲线的参数选取均无关, 有更好的性质。也就是把第一基本形式看作一个有机的整体, 会给我们的讨论带来很大的方便。

例 3.12. 平面  $S_1$  的方程为

$$\vec{r}_1(u, v) = (u, v, 0),$$

圆柱面  $S_2$  的方程为

$$\vec{r}_2(u, v) = (\cos u, \sin u, v),$$

求两个曲面的第一基本形式。

很容易计算出两者有相同的第一基本形式，然而却是完全不同的曲面。也就是说，只有第一基本形式显然无法确定曲面形状。需要找到其他描述曲面弯曲程度的不变量。

在下一节中，我们先类比曲线的曲率，引入曲面上曲线的法曲率；再把法曲率拓广为曲面上的第二基本形式；最后把曲面的第二基本形式这一二次型，改写为经典的表达式。

### 3.2.7 计算曲面的面积

知道了第一类基本量（第一基本形式），不但可以计算曲线的长度以及夹角，也可以计算曲面的面积。曲面  $S$  的面积元素为<sup>1</sup>

$$d\sigma = |(\vec{r}_u du) \times (\vec{r}_v dv)| = \sqrt{EG - F^2} du dv$$

从而曲面  $S$  的面积为

$$A = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv$$

现在我们希望说明面积与参数变换无关。考虑容许参数变换  $\tilde{r}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{r}(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v}))$ ，我们之前证明过：

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J^T$$

即

$$\begin{vmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{vmatrix} = |J| \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} |J^T|$$

由二重积分中的换元法，

$$\sqrt{EG - F^2} du dv = \sqrt{EG - F^2} |J| d\tilde{u} d\tilde{v} = \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} d\tilde{u} d\tilde{v}$$

可知面积元素以及面积都是不变量。

回忆：我们在数学分析中计算过 Monge 形式曲面  $(x, y, z(x, y))$  的面积：

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

实际上就是上述面积公式的特例。

<sup>1</sup>实际上，根据解析几何和高等代数知识，我们知道， $n$  维空间中由  $m$  个向量  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$  所张成的平行体，其“体积”为  $\sqrt{|B|}$ ，其中矩阵  $B$  中的  $(i, j)$  元素为  $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j$ 。特别的，若有  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  构成基底，则矩阵  $B$  则是这组基底对应的度量矩阵。

### 3.3 法曲率和第二基本形式

已经知道第一基本形式引入的初衷是为了计算曲面上和度量有关的长度, 角度以及面积。单单凭借第一基本形式这一不变量, 是无法确定曲面在空间中的形状的。自然还需要引入其他的不变量来描述曲面。

最自然的想法是类比研究曲线弯曲程度的方法: 曲面的弯曲程度应该是曲面切平面转动的快慢, 即曲面单位法向量  $\vec{n}$  转动的快慢。

曲线时只要关于弧长参数对单位切向量求导即可, 但曲面有两个参数  $u, v$ , 如何处理? 可以对  $\vec{n}(u, v)$  求全微分, 得

$$d\vec{n} = \vec{n}_u du + \vec{n}_v dv$$

再来计算它的模长。然而这样会非常复杂<sup>1</sup>。

我们换个角度来看, 利用曲线研究曲面是曲面论的核心主旨之一。要研究曲面的弯曲程度, 不妨先来看曲面上曲线的弯曲程度。回到曲线的曲率, 除了  $\kappa(s) = \left| \frac{d\vec{\alpha}}{ds} \right|$  这一定义式外, 曲线曲率还可以表示为

$$\kappa(s) = \frac{d\vec{\alpha}}{ds} \cdot \vec{\beta} = -\vec{\alpha} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{ds}$$

直观上来看, 第一个表达式  $\frac{d\vec{\alpha}}{ds} \cdot \vec{\beta}$  可以看作曲率向量, 也就是单位切向量的变化率, 在曲线主法向量上的分量; 第二个表达式中的  $\vec{\alpha} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{ds}$  可以看作曲线主法向量的变化率, 在曲线切方向的分量。

#### 3.3.1 曲面上曲线的法曲率与法截线

现在我们把曲线曲率的这一表达式推广到曲面上。考虑曲面上的曲线  $C$  (取弧长参数  $s$ ), 单位切向量仍然记作  $\vec{\alpha}$ , 记  $\vec{n}(s)$  为曲面  $S$  的单位法向量在曲线  $C$  上的限制。由于此时  $\vec{\alpha}$  和  $\vec{n}$  依然相互垂直, 我们可以用  $\vec{n}(s)$  替换曲线曲率表达式中的  $\vec{\beta}$ , 有

**定义 3.13.** 我们称  $\kappa_n = \frac{d\vec{\alpha}}{ds} \cdot \vec{n} = -\vec{\alpha} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds}$  为曲线  $C$  的法曲率。

法曲率的两种表达式显然是等价的, 而且这两种表达式对我们都非常重要, 可以从不同的角度来理解法曲率是如何反映曲面弯曲程度的。直观上来看, 曲面上的单

<sup>1</sup>参考附录D

位法向量  $\vec{n}$  本来有两个自变量，它的变化快慢反映了曲面的弯曲程度；我们现在简化为只考虑单一一条曲线上  $\vec{n}$  的变化快慢。

比较曲线曲率的表达式  $|\frac{d\vec{\alpha}}{ds}| = \frac{d\vec{\alpha}}{ds} \cdot \vec{\beta}$  和曲线法曲率的表达式  $\frac{d\vec{\alpha}}{ds} \cdot \vec{n}$ ，不难看到区别仅在于一个是曲率向量和  $\vec{\beta}$  (曲率向量自身的方向) 内积，一个是和  $\vec{n}$  内积。换言之，法曲率即曲线的曲率向量在法向量上的分量，即  $\kappa_n = \cos \theta \kappa$ ，其中  $\cos \theta = \vec{\beta} \cdot \vec{n}$ 。

对于非弧长参数  $t$ ，记曲面上曲线  $C$  的方程为  $\vec{r}(t)$ ，法曲率可以表示为

$$\kappa_n = \left( \frac{d}{ds} \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \right) \cdot \vec{n} = \left( \frac{d}{ds} \frac{1}{|\vec{r}'(t)|} \right) \vec{r}'(t) \cdot \vec{n} + \frac{1}{|\vec{r}'(t)|} \left( \frac{d}{ds} \vec{r}'(t) \right) \cdot \vec{n} = \frac{\vec{r}''(t) \cdot \vec{n}}{|\vec{r}'(t)|^2}$$

或者

$$\kappa_n = -\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|^2} \cdot \frac{d\vec{n}(t)}{dt}$$

而根据之前非弧长参数下空间曲线 Frenet 标架的计算

$$\vec{r}''(t) = \frac{d|\vec{r}'(t)|}{dt} \vec{\alpha}(t) + |\vec{r}'(t)|^2 \kappa(t) \vec{\beta}(t)$$

可以计算空间曲线的曲率为  $\kappa = \frac{\vec{r}''(t) \cdot \vec{\beta}}{|\vec{r}'(t)|^2}$ ，或直接按 Frenet 运动公式，有  $\kappa = -\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|^2} \cdot \frac{d\vec{\beta}(t)}{dt}$ 。可见在非弧长参数下法曲率和曲率依然有很强的相似性。

我们继续来研究曲线法曲率的具体表达式，设曲面  $S$  的参数方程为  $\vec{r}(u, v)$ ，它上面的曲线  $C$  可以用参数方程  $\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$  来表示。现在，我们从法曲率的表达式  $\kappa_n = \frac{\vec{r}''(t) \cdot \vec{n}}{|\vec{r}'(t)|^2}$  出发，把曲线法曲率和曲线所在的曲面关联起来。此时曲线的切向量为

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \frac{du(t)}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv(t)}{dt}$$

于是

$$\begin{aligned} \vec{r}''(t) = & \vec{r}_{uu} \left( \frac{du(t)}{dt} \right)^2 + 2\vec{r}_{uv} \frac{du(t)}{dt} \frac{dv(t)}{dt} + \vec{r}_{vv} \left( \frac{dv(t)}{dt} \right)^2 \\ & + \vec{r}_u \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \vec{r}_v \frac{d^2v(t)}{dt^2} \end{aligned}$$

两边同时和曲面的法向量  $\vec{n}$  做内积，有

$$\vec{r}''(t) \cdot \vec{n} = L \left( \frac{du(t)}{dt} \right)^2 + 2M \frac{du(t)}{dt} \frac{dv(t)}{dt} + N \left( \frac{dv(t)}{dt} \right)^2 \quad (3.5)$$

其中，

$$L = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{n}, \quad M = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{n}, \quad N = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{n},$$

称为曲面的**第二类基本量**。

注意到  $|\vec{r}'(t)|^2 = E(\frac{du(t)}{dt})^2 + 2F\frac{du(t)}{dt}\frac{dv(t)}{dt} + G(\frac{dv(t)}{dt})^2$ , 从而有

$$\kappa_n(t) = \frac{L(\frac{du(t)}{dt})^2 + 2M\frac{du(t)}{dt}\frac{dv(t)}{dt} + N(\frac{dv(t)}{dt})^2}{E(\frac{du(t)}{dt})^2 + 2F\frac{du(t)}{dt}\frac{dv(t)}{dt} + G(\frac{dv(t)}{dt})^2} \quad (3.6)$$

特别地, 如果为弧长参数  $s$ , 则  $|\vec{r}'(s)| = 1$ , 即

$$E(\frac{du(s)}{ds})^2 + 2F\frac{du(s)}{ds}\frac{dv(s)}{ds} + G(\frac{dv(s)}{ds})^2 = 1$$

则

$$\kappa_n(s) = L(\frac{du(s)}{ds})^2 + 2M\frac{du(s)}{ds}\frac{dv(s)}{ds} + N(\frac{dv(s)}{ds})^2$$

特别需要注意的是:

- $\kappa_n$  的表达式与参数  $t$  的选取无关, 即做参数变换  $t(\tilde{t})$ , 则有

$$\kappa_n = \frac{L(\frac{du}{dt})^2 + 2M\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + N(\frac{dv}{dt})^2}{E(\frac{du}{dt})^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G(\frac{dv}{dt})^2} = \frac{L(\frac{du}{d\tilde{t}})^2 + 2M\frac{du}{d\tilde{t}}\frac{dv}{d\tilde{t}} + N(\frac{dv}{d\tilde{t}})^2}{E(\frac{du}{d\tilde{t}})^2 + 2F\frac{du}{d\tilde{t}}\frac{dv}{d\tilde{t}} + G(\frac{dv}{d\tilde{t}})^2}$$

- 只与曲线的切向量 (一阶导) 有关, 而与曲线的具体方程  $((u(t), v(t)))$  无关。

由于所有相切的曲线在一点有相同的法曲率, 故可以考虑其中最特殊的一条: 由切方向  $(du, dv)$  (即切向量  $\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ ) 和法向量  $\vec{n}(u, v)$  决定了一个平面, 称为**法截面**。法截面与曲面  $S$  相交得到一条平面曲线, 称为**法截线**<sup>1</sup>。

对于法截线而言, 作为一条空间曲线, 有  $\vec{\beta} = \pm\vec{n}$ 。从而有

$$|\kappa_n| = \kappa$$

进一步, 由于法截线  $C$  落在法截面中, 是一条平面曲线。可以使用平面曲线的 Frenet 标架。为了和刚才法截线作为空间曲线的讨论区别开来, 我们把平面 Frenet 标架中和单位切向量  $\vec{\alpha}$  相垂直的单位向量记为  $\vec{\beta}_r$ 。此时有

$$\frac{d\vec{\alpha}(s)}{ds} = \kappa_r \vec{\beta}_r(s)$$

两边同时和曲面法向量  $\vec{n}$  做内积有

$$\kappa_n = \kappa \vec{\beta}_r \cdot \vec{n}$$

我们可以人为规定法截面的正向为  $(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) \times \vec{n}$ , 则有  $\vec{\beta}_r = \vec{n}$ , 从而  $\kappa_r = \kappa_n$ , 即

<sup>1</sup>法截线并非是曲面上与法截线相切的曲线在法截面上的投影曲线

**定理 3.14.** 法截线在点  $(u, v)$  处的法曲率, 抑或曲面  $S$  在点  $(u, v)$  处沿且方向  $(du, dv)$  的法曲率  $\kappa_n$ , 和法截线作为指定定向下的法截面内的平面曲线在点  $(u, v)$  处的相对曲率  $\kappa_r$  相等。

### 3.3.2 曲面的法曲率

我们从曲线  $C$  的法曲率的表达式(3.6)中已经看到, 法曲率应当看做是切向量  $\vec{r}_u \frac{du(t)}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv(t)}{dt}$  的函数 (上下文清楚的话, 也可以简单认为是  $(\frac{du(t)}{dt}, \frac{dv(t)}{dt})$  的函数), 与曲线的具体形式无关; 同时曲线的法曲率实际上是反映了曲面的弯曲程度。也就是说, 所谓的曲线的法曲率, 严格地讲, 称为曲面的法曲率更为合适, 是描述曲面本身的弯曲程度的。因此, 对任意曲面上的切向量  $X = a\vec{r}_u + b\vec{r}_v$ , 定义曲面上  $X$  方向上的法曲率为

$$\kappa_n(X) = \frac{La^2 + 2Mab + Nb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}$$

借助于法截线这一概念, 我们可以从几何的角度更好地理解曲线的法曲率和曲面弯曲程度的关联:

- 曲面上曲线的弯曲程度可以分解为随着曲面的弯曲, 和在曲面内部的弯曲。即曲率向量  $\frac{d\vec{\alpha}(s)}{ds}$  有关于法向量  $\vec{n}$  的内射影和外射影。
- 法方向上内射影的分量即法曲率, 相当于单独把曲线随曲面的弯曲分离出来。
- 而法截线可以看作在该点处完全只随着曲面弯曲, 自己“不弯曲”的曲线, 也就是可以完全地反映曲面的弯曲程度。
- 其他曲线, 除了随着曲面在法截面内弯曲, 还有自己在“曲面的切平面”内的弯曲, 也就是关于法向量  $\vec{n}$  的外射影方向的弯曲。
- 反过来看, 固定点处某个切方向上的法截线, 是曲面上所有过这一方向的曲线中, 曲率最小的, 因为该方向上任何曲线的弯曲程度都要比曲面的弯曲程度要大。这一点也可由公式  $\kappa_n = \cos \theta \kappa$  得出。

**例 3.15.** 单位球面上相切的大圆和小圆。大圆是法截线, 大圆的曲率自然要比其他的小圆要小。

### 3.3.3 第二基本形式

注意到当对于切向量  $X = a\vec{r}_u + b\vec{r}_v$ , 法曲率表达式为

$$\kappa_n(X) = \frac{La^2 + 2Mab + Nb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}$$

其中的分母  $Ea^2 + 2Fab + Gb^2$  就是  $|X|^2$ 。换个视角, 根据(3.3)式和(3.2)式  $I(X, X)$  还可以理解为

$$\begin{aligned} & (E(\mathbf{d}u)^2 + 2F\mathbf{d}u\mathbf{d}v + G(\mathbf{d}v)^2)(X, X) \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{d}u(X) & \mathbf{d}v(X) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}u(X) \\ \mathbf{d}v(X) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = Ea^2 + 2Fab + Gb^2 \end{aligned}$$

也就是曲面的法曲率可以写做

$$\kappa_n(X) = \frac{La^2 + 2Mab + Nb^2}{I(X, X)}$$

进一步, 为了形式对称, 我们把分子  $La^2 + 2Mab + Nb^2$  也视为一个二次型在切向量  $X$  上的取值:

$$\begin{aligned} & (L(\mathbf{d}u)^2 + 2M\mathbf{d}u\mathbf{d}v + N(\mathbf{d}v)^2)(X, X) \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{d}u(X) & \mathbf{d}v(X) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}u(X) \\ \mathbf{d}v(X) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = La^2 + 2Mab + Nb^2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

我们把

$$II = L(\mathbf{d}u)^2 + 2M\mathbf{d}u\mathbf{d}v + N(\mathbf{d}v)^2$$

称为曲面的第二基本形式。第二基本形式和第一基本形式一样, 都是作用在切向量上的对称双线性函数。进而

$$\kappa_n(X) = \frac{II(X, X)}{I(X, X)}$$

当然, 也可写为  $\frac{II(X, X)}{\langle X, X \rangle}$ , 或  $\frac{II(X, X)}{|X|^2}$ 。就是说曲面在一个方向上的法曲率, 为第二和第一基本形式在这个方向上取值的比。

作为(3.7)式的特例, 有

$$II(\vec{r}_u, \vec{r}_u) = L, \quad II(\vec{r}_u, \vec{r}_v) = II(\vec{r}_v, \vec{r}_u) = M, \quad II(\vec{r}_v, \vec{r}_v) = N.$$

可见, 所谓第二类基本量, 就是二次型  $II$  在基底  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  下的系数。注意到  $\vec{r}_u \cdot \vec{n} = 0$  和  $\vec{r}_v \cdot \vec{n} = 0$ , 分别关于  $v$  和  $u$  求偏导,

$$\vec{r}_{uu} \cdot \vec{n} + \vec{r}_u \cdot \vec{n}_u = 0$$

$$\vec{r}_{uv} \cdot \vec{n} + \vec{r}_u \cdot \vec{n}_v = 0$$

$$\vec{r}_{vu} \cdot \vec{n} + \vec{r}_v \cdot \vec{n}_u = 0$$

$$\vec{r}_{vv} \cdot \vec{n} + \vec{r}_v \cdot \vec{n}_v = 0$$

于是第二类基本量还有等价的表达式

$$L = -\vec{r}_u \cdot \vec{n}_u, \quad M = -\vec{r}_u \cdot \vec{n}_v = -\vec{r}_v \cdot \vec{n}_u, \quad N = -\vec{r}_v \cdot \vec{n}_v$$

和第一基本形式类似, 我们也可以换一种更简洁的方式来书写第二基本形式。已经知道

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$$

规定

$$d^2\vec{r} = d(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) = \vec{r}_{uu}(du)^2 + (\vec{r}_{uv} + \vec{r}_{vu})dudv + \vec{r}_{vv}(dv)^2$$

则第二基本形式可以写成

$$II = d^2\vec{r} \cdot \vec{n} = L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2$$

另外一个视角, 由于

$$d\vec{n} = \vec{n}_u du + \vec{n}_v dv$$

于是第二基本形式还可以写成

$$II = -d\vec{r} \cdot d\vec{n} = L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2$$

上述第二基本形式的两种表达式等价有非常直观的解释: 根据  $d\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$ , 进而

$$0 = d(d\vec{r} \cdot \vec{n}) = d^2\vec{r} \cdot \vec{n} + d\vec{r} \cdot d\vec{n}$$

注意到第二基本形式和第一基本形式一样都可以写成张量形式，显然和曲面的参数变换无关，是曲面的不变量。而第二类基本量是会随着参数变化而变化的，其规律和第一类基本量的变化规律完全相同，我们这里就不再赘述了。正因如此，我们大部分情况下都倾向于使用不变的第二基本形式，而非第二类基本量。

最后我们需要注意的是第一和第二基本形式两者都是曲面切空间上的对称双线性函数，但它们有个显著的区别：第一基本形式必然是正定的，第二基本形式不一定正定。

例 3.16. 平面  $S_1$  的方程为

$$\vec{r}_1(u, v) = (u, v, 0),$$

圆柱面  $S_2$  的方程为

$$\vec{r}_2(u, v) = (\cos u, \sin u, v),$$

求两个曲面的第二基本形式。

解. 平面的单位法向量为常向量，第二基本形式自然为零。我们重点来看圆柱面的第二基本形式。

无论如何，首先都需要求出单位法向量。

$$\vec{r}_u = (-\sin u, \cos u, 0), \quad \vec{r}_v = (0, 0, 1)$$

$$\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = (\cos u, \sin u, 0)$$

需要注意的是，曲面的法向量都需要单位化。只是在这里恰好是一个单位向量，故省略了这一步骤。

接下来直接计算所谓的第二类基本量：

$$L = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{n} = -1$$

$$M = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{n} = 0$$

$$N = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{n} = 0$$

从而， $S_2$  的第二基本形式可以具体写为：

$$II = -(\mathrm{d}u)^2$$

可见，弯曲程度不同的平面和圆柱面，也有着不同的第二基本形式。 □

## 3.3.4 曲面第二基本形式的几何意义

已经知道, 第二基本形式

$$II = d^2\vec{r} \cdot \vec{n} = -d\vec{r} \cdot d\vec{n} = L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2$$

可以和弧长参数下的法曲率的表达式相比较

$$\kappa_n(s) = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \cdot \vec{n} = -\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds}$$

不难发现, 法曲率是描述曲面沿某个方向弯曲的程度, 而第二基本形式描述的是曲面各个方向弯曲的程度。

粗略地看, 不论是法曲率, 还是第二基本形式, 都可以视为表征弯曲的二阶导数在曲面法方向上的投影。我们沿着这一思路进一步细化, 挖掘第二基本形式的几何意义。第二基本形式本身包含了二阶导数, 注意到对于一阶导数有  $d\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$  恒成立, 似乎接下来应该考虑  $\vec{r} \cdot \vec{n}$  相关的表达式。

为了计算简洁明细, 我们实际上考虑的并非函数  $\vec{r} \cdot \vec{n}$ , 而是它的一个局部近似  $\delta = (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n}_0$ 。直观上, 曲面  $S$  在某点处的弯曲程度可以用该点附近的点到其切平面  $\Pi$  的有向距离  $\delta$  来刻画。设  $(u_0, v_0)$  的邻近点是  $(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$ ,

$$\delta(\Delta u, \Delta v) = (\vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0)) \cdot \vec{n}_0$$

根据 Taylor 展开我们有

$$\begin{aligned} & \vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0) \\ &= (\vec{r}_u \Delta u + \vec{r}_v \Delta v) + \frac{1}{2}(\vec{r}_{uu}(\Delta u)^2 + (\vec{r}_{uv} + \vec{r}_{vu})\Delta u \Delta v + \vec{r}_{vv}(\Delta v)^2) \\ & \quad + \mathbf{o}((\Delta u)^2 + (\Delta v)^2) \end{aligned}$$

从而

$$\delta(\Delta u, \Delta v) = \frac{1}{2}(L(\Delta u)^2 + 2M\Delta u \Delta v + N(\Delta v)^2) + \mathbf{o}((\Delta u)^2 + (\Delta v)^2)$$

其主要部分即二次微分式  $II = L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2$ 。

可见, 第二基本形式  $II = d^2\vec{r} \cdot \vec{n} = -d\vec{r} \cdot d\vec{n}$  的几何意义同样十分明显。不仅如此, 从下列的两个定理中, 不难看出第二基本形式确实可以很好地描述曲面的弯曲程度。

**定理 3.17.** 一块正则曲面是平面的一部分, 当且仅当它的第二基本形式恒等于零。

证明. 必要性显然。来看充分性。从平面的几何特性来看, 要想说明一张曲面是平面, 自然是首先要说明曲面的单位法向量为常向量。

第二基本形式为零, 第二类基本量也为零。又由于我们的目标为说明  $\vec{n}$  为常向量, 所以采用包含  $\vec{n}_u, \vec{n}_v$  的表达式

$$\begin{aligned}\vec{r}_u \cdot \vec{n}_u &= -L = 0, \\ \vec{r}_v \cdot \vec{n}_u &= \vec{r}_u \cdot \vec{n}_v = -M = 0, \\ \vec{r}_v \cdot \vec{n}_v &= -N\end{aligned}$$

先来看  $\vec{n}_u$  满足的关系: 除了  $\vec{n}_u \cdot \vec{r}_u = \vec{n}_u \cdot \vec{r}_v = 0$  外, 注意到  $\vec{n}$  本身是一个单位向量,  $\vec{n}_u \cdot \vec{n} = 0$ 。而  $\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n}$  构成了空间中的仿射基底, 向量  $\vec{n}_u$  和三个基底的內积均为零,  $\vec{n}_u$  只能为零向量。同理,  $\vec{n}_v = \vec{0}$ , 从而  $\vec{n}$  为常向量。

我们接下来, 从  $\vec{n}$  为常向量出发, 导出曲面所满足的方程。结合第二基本形式的几何意义, 考虑函数  $\vec{r} \cdot \vec{n}$ 。有

$$d(\vec{r} \cdot \vec{n}) = (d\vec{r}) \cdot \vec{n} + \vec{r} \cdot (d\vec{n}) \equiv 0$$

从而

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{r}_0 \cdot \vec{n}_0$$

这里  $\vec{r}_0$  和  $\vec{n}_0$  代表曲面上固定的一点以及该点处的法向量。于是

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n}_0 = 0$$

即曲面满足平面的点法式方程。 □

**定理 3.18.** 一块正则曲面是球面的一部分, 当且仅当在曲面上每一点处, 曲面的第二基本形式都是第一基本形式的非零倍数 (作为题设条件, 该倍数可以点点不同), 即  $\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}$ , 或者曲面上任意点各个方向上的法曲率均相等。

先来看必要性, 不妨假定球面的参数方程为:

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cos \theta \cos \phi \\ y = y_0 + R \cos \theta \sin \phi \\ z = z_0 + R \sin \theta \end{cases}$$

不难计算此时的

$$I = R^2((d\theta)^2 + \cos^2 \theta (d\phi)^2)$$

$$II = -R((d\theta)^2 + \cos^2 \theta (d\phi)^2)$$

此时第二基本形式确实是第一基本形式的倍数。同时，第一和第二基本形式均是不变量，和坐标系以及参数方程的选取无关，故任何球面的第一和第二基本形式都满足这样的规律。

通过具体参数方程计算，再利用第二基本形式为曲面不变量的性质来证明，想法很简单直接，但是计算会相对繁琐。我们也可以通过不变形式来证明必要性。不妨设球面上的点满足

$$|\vec{r} - \vec{r}_0|^2 = R^2$$

两边同时求微分，有

$$d\vec{r} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

再微分一次

$$d^2\vec{r} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) + d\vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$$

注意到对于球面， $\vec{r} - \vec{r}_0 = R\vec{n}$ ，于是

$$Rd^2\vec{r} \cdot \vec{n} + d\vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$$

即

$$II = -\frac{1}{R}I$$

接下来我们来证明充分性。假定有

$$II = c(u, v)I$$

即

$$-d\vec{r} \cdot d\vec{n} = c(u, v)d\vec{r} \cdot d\vec{r}$$

于是

$$d\vec{r} \cdot (d\vec{n} + c(u, v)d\vec{r}) = 0$$

即

$$(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) \cdot ((\vec{n}_u + c(u, v)\vec{r}_u)du + (\vec{n}_v + c(u, v)\vec{r}_v)dv)$$

不妨记  $\vec{n}_u + c(u, v)\vec{r}_u = \vec{a}$ ,  $\vec{n}_v + c(u, v)\vec{r}_v = \vec{b}$ , 于是有

$$\vec{r}_u \cdot \vec{a}(\mathrm{d}u)^2 + (\vec{r}_u \cdot \vec{b} + \vec{r}_v \cdot \vec{a})\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \vec{r}_v \cdot \vec{b}(\mathrm{d}v)^2 = 0$$

从而

$$\begin{aligned}\vec{r}_u \cdot \vec{a} &= 0 \\ \vec{r}_u \cdot \vec{b} + \vec{r}_v \cdot \vec{a} &= 0 \\ \vec{r}_v \cdot \vec{b} &= 0\end{aligned}$$

重点来看第二个等式。由于

$$\vec{r}_u \cdot \vec{b} = \vec{r}_u \cdot \vec{n}_v + c(u, v)\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = \vec{r}_v \cdot \vec{n}_u + c(u, v)\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = \vec{r}_v \cdot \vec{a}$$

故

$$\vec{r}_u \cdot \vec{b} = \vec{r}_v \cdot \vec{a} = 0$$

由

$$\begin{aligned}\vec{r}_u \cdot \vec{a} &= 0 \\ \vec{r}_v \cdot \vec{a} &= 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{a} &= 0\end{aligned}$$

可知  $\vec{a} = \vec{0}$ , 同理  $\vec{b} = \vec{0}$ 。于是

$$\begin{aligned}\vec{n}_u + c(u, v)\vec{r}_u &= \vec{0} \\ \vec{n}_v + c(u, v)\vec{r}_v &= \vec{0}\end{aligned}$$

我们希望能从上式出发说明  $c(u, v)$  是一个常数。两式分别对  $v$  和  $u$  求偏导, 有

$$\begin{aligned}\vec{n}_{uv} + c_v\vec{r}_u + c(u, v)\vec{r}_{uv} &= \vec{0} \\ \vec{n}_{vu} + c_u\vec{r}_v + c(u, v)\vec{r}_{vu} &= \vec{0}\end{aligned}$$

于是

$$c_v\vec{r}_u - c_u\vec{r}_v = \vec{0}$$

从而必有  $c_u = c_v = 0$ , 即  $c(u, v)$  是一个常数。进而

$$\mathrm{d}\vec{n} + c\mathrm{d}\vec{r} = \vec{0}$$

故有

$$\vec{n} + c(\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{0}$$

最后，由于  $\vec{n}$  是一个单位向量，

$$|\vec{r} - \vec{r}_0| = \frac{1}{c}$$

定理得证。

从以上的例子和定理可以看出，第二基本形式确实可以描述曲面的弯曲程度。那么第一和第二基本形式合在一起，能否完全确定曲面的形状呢？我们将在第四章中回答这一问题。

此外，在两道例题的证明中，有一个共通的关键之处，就是使用了  $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n}\}$  作为  $E^3$  的标架。这一标架在今后对参数曲面的研究之中非常的重要，我们称之为**曲面的自然标架**。

总而言之，引入第二基本形式考察曲面弯曲程度，这一部分的主线非常清晰：

空间曲线的曲率  $\rightarrow$  曲面上曲线的法曲率  $\rightarrow$  曲面的法曲率  $\rightarrow$  曲面的第二基本形式

其中的关键在于认识到曲线的法曲率实际上和曲线本身无关，只和切向量有关。实际上，这一点可以直接从法曲率的定义式观察出来，并快捷地引出第二基本形式。当然，代价就是要做一些准备工作，引入法向量场，以及法向量场沿切向量的方向导数这些相对抽象的概念。对这些内容感兴趣的同学可以阅读下一节。

### \*3.3.5 通过对法向量场求方向导数引入第二基本形式

我们在3.2.5小节中引入了曲面上函数和向量函数关于切向量的方向导数的定义，现在我们来考虑曲面上两类特殊的向量函数。

首先， $\vec{n}$  可以视为曲面  $S$  上的一个连续可微的**法向量场**。于此相对，我们引入切向量场的概念：

**定义 3.19.** 对正则参数曲面  $S$  上任意一点  $p$ ，都指定一个切向量  $X_p$ ，则称为一个切向量场，记为  $X^1$ 。

假设曲面  $S$  的参数方程为  $\vec{r}(u, v)$ ，则切向量场

$$X(u, v) = a(u, v)\vec{r}_u + b(u, v)\vec{r}_v$$

<sup>1</sup>有时，教科书上也会把切向量记为  $X$ ，切向量场记为  $\mathcal{X}$ 。事实上，我们不是一直遵守这样的约定，在上下文清晰的情况下，为了记号简单，比如切向量场是由切向量  $X_p$  延拓而成的时候，我们既用  $X$  表示切向量，也用  $X$  表示延拓后的切向量场。

如果其中  $a(u, v)$ ,  $b(u, v)$  均是连续可微的函数, 则称向量场  $X$  是连续可微的。

现在我们考虑这两类特殊向量场在某点的方向导数。假定  $Y$  是  $p$  点处的一个切向量, 存在曲面上过  $p$  点的曲线  $C: (u(t), v(t))$ , 以  $Y$  为曲线在  $p$  点处的切向量。根据3.2.5小节中一般向量函数的方向导数的定义, 我们有

$$\frac{\partial X}{\partial Y} = \frac{dX(u(t), v(t))}{dt}, \quad \frac{\partial \vec{n}}{\partial Y} = \frac{d\vec{n}(u(t), v(t))}{dt}$$

且和过  $Y$  的曲线选取无关。进一步, 如果  $Y$  为单位向量, 则  $t$  可以取为弧长参数  $s$ , 即

$$\frac{\partial X}{\partial Y} = \frac{dX(u(s), v(s))}{ds}, \quad \frac{\partial \vec{n}}{\partial X} = \frac{d\vec{n}(u(s), v(s))}{ds}$$

有了这些准备工作, 我们重新来审视曲线法曲率的一个表达式  $\kappa_n = -\vec{\alpha} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds}$ 。令  $X = \vec{\alpha}(p)$ , 注意到此时  $\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{\partial \vec{n}}{\partial X}$ , 于是

$$\kappa_n|_p = -X \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial X}$$

这样的表达式显然只和切向量相关, 摆脱了曲线的限制。我们不妨将曲线法曲率的定义修改为曲面法曲率

定义 3.20. 若  $X$  为曲面  $S$  在点  $p$  处的单位切向量, 我们称

$$\kappa_n(X) = -X \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial X}$$

为曲面  $p$  点处在方向  $X$  上的法曲率。若  $X$  不是单位向量, 则

$$\kappa_n(X) = -\frac{X \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial X}}{|X|^2} \quad (3.8)$$

来看分子  $-X \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial X}$ , 不难看出整个式子关于前后两个位置的  $X$  都是线性的, 是一个二次型, 于是我们将这一二次型极化, 得到切空间上的双线性函数  $-X \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial Y}$ 。由于  $X$  和  $\vec{n}$  始终垂直, 根据向量函数求导的性质可以说明这样定义的双线性函数是对称的:

$$X \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial Y} = \frac{\partial(X \cdot \vec{n})}{\partial Y} - \frac{\partial X}{\partial Y} \cdot \vec{n} = -\frac{\partial X}{\partial Y} \cdot \vec{n} = -\frac{\partial Y}{\partial X} \cdot \vec{n} = Y \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial X} \quad (3.9)$$

需要注意的是, 上述对称性的证明省略了很多细节: 首先, 需要将切向量  $X$  和  $Y$  延拓为曲面  $S$  上的切向量场, 考虑切向量场的方向导数, 并说明取值和延拓无关; 其次,  $\frac{\partial X}{\partial Y}$  和  $\frac{\partial Y}{\partial X}$  本身并不相等, 实际上有  $\frac{\partial Y}{\partial X} - \frac{\partial X}{\partial Y} = [X, Y]$ , 这里  $[X, Y]$  是  $X, Y$  两个切向量场的

李括号积, 一般不为零, 但是仍然是一个切向量场, 自然有  $[X, Y] \cdot \vec{n} = 0$ 。对这些细节感兴趣的同学可以参考<sup>[6]</sup>。

我们之前得到了  $\kappa_n(X) = \frac{II(X, X)}{I(X, X)}$ , 和(3.8)式对比, 可知第二基本形式在  $X$  上的取值  $II(X, X)$  和  $-X \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial X}$  是等价的, 进而得到了第二基本形式的等价定义:

定义 3.21.  $X, Y$  均为曲面  $S$  上  $p$  点处的切向量, 则

$$II(X, Y) = -X \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial Y}.$$

需要强调的是, 第二基本形式定义式中, 对法向量场  $\vec{n}$  的方向导数运算  $\frac{\partial \vec{n}}{\partial Y}$  这一部分非常重要, 我们将会在下节中的 Weingarten 映射中再一次遇到它。

此外, 由(3.4)式, 有  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial X} = X$ 。再根据(3.9)式, 第二基本形式还可以写为

$$II(X, Y) = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial Y \partial X} \cdot \vec{n} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial X \partial Y} \cdot \vec{n}$$

大家可以和之前第二基本形式的表达式  $-d\vec{r} \cdot d\vec{n}$  和  $d^2\vec{r} \cdot \vec{n}$  做对比。

最后我们关于第二基本形式做一些总结。现在, 我们有第二基本形式的两种表达式, 一种是较为具体的经典张量表达

$$II = d^2\vec{r} \cdot \vec{n} = -d\vec{r} \cdot d\vec{n} = L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2.$$

另外一种相对抽象些的对称双线性函数表达式

$$II(X, Y) = -X \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial Y}.$$

两者本质上没有任何区别。但是由于经典形式下的第二基本形式是通过坐标以及系数具体给出的, 同时在参数变换下依然保持不变, 在大多数涉及到具体计算的问题中, 使用起来要远远比抽象的对称双线性函数更方便<sup>1</sup>。

### 3.4 主曲率和 Weingarten 映射

目前我们已经引入了曲面的第一, 和第二基本形式这两个不变量, 然而我们对它们的性质了解的并不充分。在接下来的一节中, 我们主要探讨第一基本形式和第二基本形式的关系: 即两者可以通过 Weingarten 映射关联起来。

<sup>1</sup>抽象的对称双线性函数形式的第二基本形式, 优点在于可以很容易地推广到高维高余维的子流形上, 感兴趣的同学可以参考<sup>[6]</sup>。

### 3.4.1 主曲率

已经知道法曲率  $\kappa_n$  是方向  $(x\vec{r}_u + y\vec{r}_v)$  (下文中简记为方向  $(x, y)$ ) 的函数, 自然想知道, 法曲率的值什么时候达到最大, 什么时候达到最小<sup>1</sup>。

定义 3.22. 我们把法曲率的最大值和最小值称为主曲率。

通过对表达式

$$\kappa_n(x, y) = \frac{Lx^2 + 2Mxy + Ny^2}{Ex^2 + 2Fxy + Gy^2}$$

求导求极值的话, 计算非常复杂, 且看不出几何意义。为了更快地求出主曲率, 更好地理解主曲率背后的代数意义, 我们需要引入 Weingarten 映射这一概念。而在引入 Weingarten 映射之前, 有必要先介绍更一般的代数对象, 即二次型所对应的线性变换。

### 3.4.2 二次型对应的自伴随 (对称) 线性变换

注意到第二基本形式是个二次型, 此外还预先就有第一基本形式, 这是一个正定的二次型, 可以看作是曲面切空间上的内积。为了更好地描述第一基本形式和第二基本形式这两个二次型之间的关联, 我们回忆一下大家在高等代数中所熟知的内容:

- 欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  中, 有一个  $n$  元实二次型  $f$ , 则存在一个实对称矩阵  $A$ , 使得  $f = XAX^T$ , 其中  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ; 反之也成立, 即对于实对称矩阵  $A$ ,  $XAX^T$  也是一个二次型。
- 欧氏空间中天然有一个内积, 记为  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , 利用内积, 二次型可以写为  $\langle XA, X \rangle$ 。
- 实对称矩阵  $A$  的特征值均是实数, 而且不同特征值的特征向量相互垂直; 有  $n$  个线性无关的特征向量。
- 取  $n$  个线性无关特征向量作为新的基底, 则二次型可以化简为  $f = Y \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) Y^T = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ 。

<sup>1</sup>注意到法曲率是仅仅是切方向的函数, 也就是可以看作是单位圆周上的函数, 从而紧致闭集上一定可以取到最大值和最小值。

现在, 我们把这一事实从欧式空间推广到一般的内积空间。我们的目的是研究  $V$  上任何一个二次型  $g$  的极值问题了。当然, 不能是一个孤立的二次型, 需要有额外一个内积<sup>1</sup>, 不妨记为  $f$ , 用来衡量向量  $v \in V$  的大小。即考察  $\frac{g(v,v)}{f(v,v)}$  的极值, 以及取极值的方向。

想法是把二次型  $g$  的形式化简, 化简之后  $\frac{g(v,v)}{f(v,v)}$  的极值就容易求出。化简二次型  $g$  的关键在于把二次型  $g$  转化为一个  $V$  上的对称映射  $\mathcal{A}$ , 然后利用  $\mathcal{A}$  的特征向量“对角化”二次型  $g$ , 得到  $g$  的简化形式。简而言之: 利用对称映射研究二次型的极值。这部分内容实际上完全全属于高等代数的范畴, 在任何一本高等代数教材都可以找得到。只不过这些内容往往散落在不同章节, 非常不容易整合起来。所以为了读者方便, 我们把主要的过程书写下来, 分为四个步骤。

### 二次型相应的对称映射的存在性

**定理 3.23.** 如果  $f, g$  都是二次型 (对称的双线性函数), 且  $f$  是正定的, 不妨视为内积, 记作  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 。则存在一个自伴随线性映射  $\mathcal{A}$ , 使得  $g = \langle \mathcal{A}, \cdot \rangle$ 。这里自伴随的意思是  $\langle \mathcal{A}v, w \rangle = \langle v, \mathcal{A}w \rangle$  的。反之也成立。

很多情况下自伴随也称为对称, 两者含义完全相同。如果对对偶空间的语言非常熟悉, 定理的证明是非常简单的。这是因为双线性函数  $f$  和  $g$  都可以看作是从  $V$  到  $V^*$  的线性映射, 分别记作  $\hat{f}, \hat{g}$ 。同时,  $f$  是对称正定的, 意味着  $\hat{f}$  是个非退化的线性映射, 因此有逆映射  $\hat{f}^{-1}$ , 从而  $\mathcal{A}v = \hat{g} \circ \hat{f}^{-1}$  即是所求的  $V$  上的线性变换 (这种风格的详细论证可以参考<sup>[7]</sup>)。

但是这样的证明太抽象了, 我们用更直观的写法来直接写出线性映射的形式。不妨设我们可以给  $V$  取一组基底  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , 在这组基底下, 向量  $v$  和  $w$  分别可以表示为坐标  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 。

此时,  $f(v, w) = XBY^T$ ,  $g(v, w) = XCY^T$ , 其中矩阵  $B = (b_{ij})$ ,  $b_{ij} = f(e_i, e_j)$ , 矩阵  $C = (c_{ij})$ ,  $c_{ij} = g(e_i, e_j)$ 。且容易看出  $B$  为正定矩阵。由此  $B$  必然可逆, 故

$$g(v, w) = XCB^{-1}BY^T = (XCB^{-1})BY^T$$

可令  $A = CB^{-1}$ , 从而矩阵  $A$  诱导出线性空间  $V$  上的线性变换

$$\mathcal{A}v = XA(e_1, e_2, \dots, e_n)^T \tag{3.10}$$

<sup>1</sup>这样的内积在一般情况下都是自然存在的

即线性变换  $\mathcal{A}$  在基底  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  下的矩阵为  $A$ 。于是有  $g(v, w) = f(\mathcal{A}v, w) = \langle \mathcal{A}v, w \rangle$ 。

接下来说明线性映射  $\mathcal{A}$  对称性<sup>1</sup>，即  $f(\mathcal{A}v, w) = f(v, \mathcal{A}w)$ 。

$$f(\mathcal{A}v, w) = XABY^T = XCB^{-1}BY^T = XCY^T$$

$$f(v, \mathcal{A}w) = XB(YA)^T = XBA^TY^T = XB(B^{-1})^TC^TY^T$$

但是  $B$  和  $C$  均为对称矩阵，从而

$$f(\mathcal{A}v, w) = f(v, \mathcal{A}w)$$

也就是说，对于事先已经给定了一个内积  $f$  (正定二次型)，

- 再给定一个二次型  $g(v, w)$ ，则必然存在自伴随映射  $\mathcal{A}$ ，使得  $g = f(\mathcal{A}v, w)$ ；
- 反过来，给定一个自伴随映射  $\mathcal{A}$ ，则  $f(\mathcal{A}v, w)$  也是一个二次型。

换成更直白的表达：在内积  $f$  确定的前提下，二次型  $g$  和自伴随映射  $\mathcal{A}$  可以相互确定，是等价的研究对象。

### 证明对称映射的特征值为实数，特征向量相互垂直

我们说明对称映射  $\mathcal{A}$  的特征值都是实数，这和说明实对称矩阵的特征值均为实数没有任何区别。具体来看，首先将线性变换  $\mathcal{A}$  和二次型  $f$  扩展到  $V$  的复化空间中去。假定有  $\mathcal{A}v = \lambda v$ ，则有  $\overline{\mathcal{A}v} = \bar{\lambda} \bar{v}$ 。但此时  $\mathcal{A}$  是一个实的线性变换，于是有

$$\mathcal{A}\bar{v} = \bar{\lambda} \bar{v}$$

考虑  $f(\mathcal{A}v, \bar{v})$ ，有两种不同的计算途径：

$$f(\mathcal{A}v, \bar{v}) = f(\lambda v, \bar{v}) = \lambda f(v, \bar{v})$$

$$f(\mathcal{A}v, \bar{v}) = f(v, \mathcal{A}\bar{v}) = f(v, \overline{\mathcal{A}v}) = f(v, \bar{\lambda} \bar{v}) = \bar{\lambda} f(v, \bar{v})$$

故  $\lambda = \bar{\lambda}$ ，得证。

进一步，实矩阵相应于实特征值的特征向量一定可以取为实特征向量。证明归属于不同特征值的特征向量关于内积  $f$  相互垂直，并且一定有  $n$  个线性无关的特征向量，也是和证明实对称阵的情形没有任何区别，我们这里不再赘述了。

<sup>1</sup>映射的对称性并不等同与基底下矩阵的对称性，只有在内积的单位正交基下才是。

## 利用对称映射的特征向量化二次型为标准形

之前我们取定基底  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , 可以得到二次型  $f, g$  对应的矩阵表达式。我们现在取  $V$  特殊的基底, 使得二次型  $f, g$  的表达式简单。

**取什么样的基底呢?** 取  $\mathcal{A}$  的特征向量即可。设  $n$  个线性无关的单位长度的特征向量为  $v_1, v_2, \dots, v_n$ 。又因为  $v_i$  之间两两垂直,

$$f(v_i, v_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

也就是说, 若  $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)(v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ , 则有

$$f(v, v) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

同时

$$g(v, v) = f(\mathcal{A}v, v) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \quad (3.11)$$

这是参考教材<sup>[8]</sup>中关于二次型耦的更一般结论的特例, 当然, 也是实二次型化标准形的推广。

## 利用二次型的标准形求极值

可以通过拉格朗日乘数法证明

$$\frac{\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

的极值在  $(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1)$  上取到, 即特征向量  $v_1, v_2, \dots, v_n$  的方向, 极值为相应的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。

当然, 特别的, 不妨假定  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  由小到大排列, 则可以更容易地说明  $\frac{g(v,v)}{f(v,v)}$  最大值在  $v_n$  处取到, 恰为  $\lambda_n$ , 最小值在  $v_1$  处取到, 恰为  $\lambda_1$ 。

最终我们说明了, 向量  $v$  是  $\frac{g(v,v)}{f(v,v)}$  取极值的方向的充分必要条件为  $v$  是线性变换  $\mathcal{A}$  的特征向量; 极值就是特征向量  $v$  对应的特征值。这实际上就是关于 Rayleigh 商最值的 Rayleigh 定理, 我们给出了具体的证明过程。

### 3.4.3 Weingarten 映射

我们现在可以把上一小节得到的一般结论应用到曲面的切空间这一特殊情形。第一基本形式  $I$  和第二基本形式  $II$  都是切空间  $T_pS$  上的二次型。

当取定基底  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  后, 第一基本形式在该基底下的矩阵即为度量矩阵  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ , 这是一个非退化的正定矩阵。为了符号统一, 我们把第一基本形式对应的双线性函数用  $I(X, Y)$  来表示。第二基本形式在该基底下的矩阵为  $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ 。

首先, 根据我们之前的讨论, 存在一个  $T_pS$  上的对称线性映射, 不妨记作  $\mathcal{W}$ , 使得  $II(X, Y) = \langle \mathcal{W}(X), Y \rangle$ 。

定义 3.24. 我们把相应于  $II$  的线性映射  $\mathcal{W}$  称为曲面在该点处的 Weingarten 映射<sup>1</sup>。

- 回忆定义 3.21,  $II(X, Y) = -\langle X, \frac{\partial \vec{n}}{\partial Y} \rangle = -\langle \frac{\partial \vec{n}}{\partial X}, Y \rangle$ , 这意味着  $\mathcal{W}(X) = -\frac{\partial \vec{n}}{\partial X}$ ; 我们还会在 6.2.1 中进一步解释 Weingarten 映射的几何意义。

- 由 (3.10) 式, 线性映射  $\mathcal{W}$  在基底  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  下的矩阵一般记作  $W$ , 具体写出为  $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$

其次, 我们可以由 Weingarten 映射导出主曲率和主方向的性质。因为  $I(X, Y) = \langle X, Y \rangle$ ,  $II(X, Y) = \langle \mathcal{W}(X), Y \rangle$ , 从而

$$\kappa_n(X) = \frac{\langle \mathcal{W}(X), X \rangle}{\langle X, X \rangle}$$

根据已有的二次型和对称映射的一般结论, 不难得到

- 曲面一点处的主曲率为 Weingarten 映射的特征值, 主方向为 Weingarten 映射的特征方向;
- 两个主曲率不相等时, 主方向必然是相互垂直的;
- 两个主曲率相等时, 任何一个方向都是主方向; 也可以选取相互垂直的主方向。

<sup>1</sup>有时也称为形状算子 (shape operator)。

我们重点来看第三种情况, 此时  $\kappa_1 = \kappa_2$ , 主方向不确定, 我们把这样的点称为曲面的**脐点**。此时

$$\kappa_n = \frac{L(\mathrm{d}u)^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N(\mathrm{d}v)^2}{E(\mathrm{d}u)^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G(\mathrm{d}v)^2}$$

为常数, 与切方向  $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$  无关, 即

$$(L - \kappa_n E)(\mathrm{d}u)^2 + 2(M - \kappa_n F)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + (N - \kappa_n G)(\mathrm{d}v)^2 = 0$$

所以在该点有

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}$$

即脐点是第一基本量和第二基本量成比例的点。也可以直接从 Weingarten 映射的矩阵为数量矩阵看出。

如果这个比值为零, 则称该脐点为**平点**; 如果这个比值不为零, 则称该脐点为**圆点**。根据定理3.17和定理3.18, 直接有

**推论 3.25.** 曲面  $S$  是平面当且仅当  $S$  上的点都是平点; 曲面  $S$  是球面当且仅当  $S$  上的点都是圆点。

最后, 利用 Weingarten 映射的性质, 我们证明有关法曲率和主曲率更精细的关系。因为法曲率只和方向有关, 不妨限定所有切向量均为单位向量。设  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  分别为主曲率  $\kappa_1, \kappa_2$  所对应的相互垂直的主方向。我们自然想知道, 除了主方向外, 其他方向上的法曲率应该是多少。

任意其他单位向量可表示为  $\vec{e} = \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2$ , 记该方向上的法曲率为  $\kappa_n(\theta)$ , 于是

$$\begin{aligned} \kappa_n(\theta) &= \mathcal{W}(\vec{e}) \cdot \vec{e} = \mathcal{W}(\cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2) \cdot (\cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2) \\ &= (\kappa_1 \cos \theta \vec{e}_1 + \kappa_2 \sin \theta \vec{e}_2) \cdot (\cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2) \\ &= \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta \\ &= \kappa_1 - (\kappa_1 - \kappa_2) \sin^2 \theta = \kappa_2 + (\kappa_1 - \kappa_2) \cos^2 \theta \end{aligned} \tag{3.12}$$

得到了法曲率的**Euler 公式**。它的几何意义非常明确: 曲面在一点处的两个主曲率完全决定了该点处各个方向上的法曲率, 进而确定了曲面在该点处的弯曲程度。

Euler 公式实际上是二次型标准形的特例, 根据(3.11)式, 在单位特征向量构成的基底, 若  $X = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$ , 则有

$$II(X, X) = \mathcal{W}(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2) \cdot (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2) = \kappa_1 x_1^2 + \kappa_2 x_2^2$$

虽然主曲率蕴含了曲面全部的弯曲信息，但特征值的求解往往比较复杂，于是我们引入更容易计算，同时几何意义也更加明显的不变量，也就是 Gauss 曲率和平均曲率。

### 3.4.4 Gauss 曲率和平均曲率

假设曲面在一点处的主曲率为  $\kappa_1, \kappa_2$ 。

定义 3.26. 我们记  $K = \kappa_1 \kappa_2$ ，称它为曲面在一点处的 Gauss 曲率。

定义 3.27. 我们记  $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ ，称它为曲面在一点处的平均曲率。

已经知道主曲率是矩阵  $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$  的特征值，于是

$$K = \frac{\begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}$$

简单计算有

$$\mathbf{W} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} LG - MF & -LF + ME \\ MG - NF & -MF + NE \end{pmatrix}$$

于是

$$2H = \text{Tr}\mathbf{W} = \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}$$

根据 Euler 公式，

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa_n(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta) d\theta = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = H$$

这也是为何称为“平均”的原因。

在后续的学习中，我们将会发现 Gauss 曲率和平均曲率，特别是 Gauss 曲率，是描述曲面弯曲程度更有效的不变量。

### \*3.4.5 预定曲率曲面和 Monge-Ampère 方程

我们已经知道，若  $\vec{r}(x, y) = (x, y, u(x, y))$  表示三维欧氏空间中的曲面，即所谓的曲面的 Monge 形式。此时曲面的第一和第二基本形式为

$$I = (1 + u_x^2)(dx)^2 + 2u_x u_y dx dy + (1 + u_y^2)(dy)^2$$

$$II = \frac{u_{xx}(\mathbf{d}x)^2 + 2u_{xy}\mathbf{d}x\mathbf{d}y + u_{yy}(\mathbf{d}y)^2}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}$$

进而曲面的 Gauss 曲率为

$$K = \frac{u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^2}$$

平均曲率为

$$2H = \frac{u_{xx}(1 + u_y^2) - 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}(1 + u_x^2)}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.13)$$

我们这里重点考察 Gauss 曲率。由于任意曲面局部都可以写成 Monge 形式，事先给定函数  $K$ ，寻找一个曲率恰好为  $K$  的曲面，就相当于求解方程

$$u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 = K(1 + u_x^2 + u_y^2)^2 \quad (3.14)$$

该方程也称为预定 Gauss 曲率方程。注意到方程(3.14)是一个非线性偏微分方程，其求解远远比线性偏微分方程要复杂。同时，这种类型的偏微分方程不仅仅在微分几何中有重要的应用，也可以用在研究最优运输等问题中，非常的重要，我们有必要提前熟悉它。简单起见，令  $u$  为  $\mathbb{R}^2$  上三次以上连续可微的函数，函数  $u$  的 Hessian 矩阵为  $\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix}$ ，一般简记为  $Hess(u)$ (很多文献中也记为  $D^2u$  或者  $\nabla^2u$ ，但是大家千万要注意，这样的记法仅仅只是欧氏空间中的习惯；严格地讲，在非平坦的空间中， $D^2u$  或者  $\nabla^2u$  是  $(2,0)$  型张量，并非数值的矩阵，我们在第十章中会遇到，大家注意区分)。形如

$$\det Hess(u) = f(x, y, u_x, u_y)$$

的方程称为 Monge-Ampère 方程。 $n$  个变量的 Monge-Ampère 方程可以类似地定义。预定曲率曲面满足的方程(3.14)就是一种 Monge-Ampère 方程。

特别的，如果预定的 Gauss 曲率为零，曲面方程中的  $K$  恒为零，即

$$\det Hess(u) = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0$$

它称为退化齐次 Monge-Ampère 方程。在第六章中，我们将利用这样的方程来研究 Gauss 曲率为零的曲面何时会成为可展曲面。

再来简单看下平均曲率，实际上，如果记  $\nabla u$  为函数  $u$  的梯度， $\operatorname{div}$  为欧氏空间中向量场的散度，则(3.13)式可以改写为

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 2H$$

该方程成为预定平均曲率方程。它的求解更为复杂，我们在第十章中会从另外的角度来研究  $H$  为零或者常数的情形。

### 3.5 旋转面中的特殊曲面

现在我们不急于从理论上考察一般的曲面，而是希望能从具体曲面的例子来获得直观感受。我们希望寻找  $K$  为常数，或者  $H = 0$  的曲面。直接由定义寻找，需要求解非线性的偏微分方程，非常复杂。于是我们在较为简单的一类曲面中寻找这两类特殊曲面。

#### 3.5.1 旋转面的参数方程

简单起见，假定旋转面的对称轴为  $z$  轴，来求旋转面的参数方程。最容易想到利用解析几何中已有的知识。若  $xOz$  平面中的曲线隐式方程为  $h(x, z) = 0$ ，则旋转面方程为：

$$h(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

倘若通过  $h(x, z) = 0$  可以反解出  $z = f(x)$ ，则此时的旋转面方程为

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

换言之，我们得到了曲面的 Monge 形式：

$$(x, y, f(\sqrt{x^2 + y^2}))$$

但是这样的参数方程不适合旋转面的计算，故改为极坐标

$$(r \cos \theta, r \sin \theta, f(r))$$

为了和我们之前的记号相吻合，改为

$$(u \cos v, u \sin v, f(u))$$

我们需要注意以下几点

- 可以直接从旋转面的几何意义出发写出参数方程。曲线  $z = f(x)$  对应  $z = f(r)$ 。

- 如果通过  $h(x, z) = 0$  反解出  $x = g(z)$ , 则会得到旋转面方程  $r = g(z)$ , 进而得到参数方程

$$(g(z) \cos \theta, g(z) \sin \theta, z)$$

抑或

$$(g(u) \cos v, g(u) \sin v, u)$$

- 有些时候对于隐式方程  $h(x, z) = 0$ ,  $x$  既无法写成  $z$  的函数,  $z$  也无法写成  $x$  的函数, 我们需要把平面曲线  $h(x, z) = 0$  改写为参数方程  $(g(u), f(u))$ , 这样就得到了旋转面更一般的参数方程

$$(g(u) \cos v, g(u) \sin v, f(u))$$

- 最常用的旋转面的参数方程还是  $(u \cos v, u \sin v, f(u))$ , 这里的参数  $u$  具有实际的几何意义, 代表半径  $r$ , 所以  $u$  的取值均是非负的。

不论是 Gauss 曲率, 还是平均曲率, 都会同时涉及到第一和第二类基本量。故首先计算旋转面  $(u \cos v, u \sin v, f(u))$  的第一和第二基本形式。

$$I = (1 + f'^2(u))(du)^2 + u^2(dv)^2$$

$$II = \frac{f''(u)}{\sqrt{1 + f'^2(u)}}(du)^2 + \frac{uf'(u)}{\sqrt{1 + f'^2(u)}}(dv)^2$$

于是

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{f'(u)f''(u)}{u(1 + f'^2(u))^2}$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{f''(u)}{(\sqrt{1 + f'^2(u)})^3} + \frac{f'(u)}{u\sqrt{1 + f'^2(u)}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{uf''(u) + f'(u)(1 + f'^2(u))}{u(\sqrt{1 + f'^2(u)})^3} \end{aligned}$$

### 3.5.2 常曲率旋转面

定义 3.28. Gauss 曲率为常数的曲面称为常曲率曲面。

注意, 所谓常曲率, 特指 Gauss 曲率为常数。如果曲面的平均曲率为常数, 则不能省略定语, 必须用常平均曲率曲面来称呼。

根据 Gauss 曲率表达式, 有

$$\frac{f'(u)f''(u)}{u(1+f'^2(u))^2} = K$$

即

$$f'(u)f''(u) = Ku(1+f'^2(u))^2$$

当  $K$  为一个给定的常数时, 这是一个关于函数  $f(u)$  非线性的常微分方程, 需要化简。注意到左端  $f'(u)f''(u) = \frac{1}{2}(f'^2(u))'$ , 此时方程中不直接出现函数  $f(u)$ , 故令  $h(u) = f'^2(u)$ , 于是方程变为

$$\frac{1}{2}h'(u) = Ku(1+h(u))^2$$

分离变量求解, 有

$$\frac{dh}{(1+h)^2} = 2Kudu$$

两边积分, 得到

$$-\frac{1}{1+h} + c = Ku^2$$

即

$$h = \frac{1-c+Ku^2}{c-Ku^2}$$

从而

$$f'(u) = \pm \sqrt{\frac{1-c+Ku^2}{c-Ku^2}}.$$

对  $f'(u)$  积分出现的常数相当于曲面沿  $z$  轴整体平移, 故可以默认该常数为零。于是

$$f(u) = \pm \int \sqrt{\frac{1-c+Ku^2}{c-Ku^2}} du.$$

在具体计算积分之前, 我们还需要注意到一个简单事实。假若曲面  $\tilde{r}(u, v)$  的第一和第二基本形式分别为

$$E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2, \quad L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2.$$

则按比例放缩后新的曲面  $\tilde{r}(u, v) = c\tilde{r}(u, v)$ , 其第一和第二基本形式分别为

$$c^2E(du)^2 + 2c^2Fdudv + c^2G(dv)^2, \quad cL(du)^2 + 2cMdudv + cN(dv)^2.$$

从而  $\tilde{K} = \frac{1}{c^2}K$ ,  $\tilde{H} = \frac{1}{c}H$ 。故  $K$  为常数的曲面我们只需要考虑三种情况。

1.  $K = 0$
2.  $K = 1$
3.  $K = -1$

$K = 0$  的情形。此时

$$f(u) = \pm \int \sqrt{\frac{1-c}{c}} du = \pm au,$$

这里  $a = \sqrt{\frac{1-c}{c}}$  是常数。意味着母线为直线  $z = \pm ar$ 。

- $a = 0$  时，旋转面为平面；
- $a \neq 0$  时，旋转面为圆锥面。

然而，大家需要注意的是，平面和圆锥面并非是仅有的两种 Gauss 曲率为零的旋转面。我们曾经计算过标准圆柱面的第二基本形式，其第二类基本量为  $L = 1, M = 0, N = 0$ ，从而 Gauss 曲率也为零。那么为什么圆柱面没有从旋转面所满足的方程中求解出来呢？

原因很简单，因为我们一开始假定旋转面的方程形如  $(u \cos v, u \sin v, f(u))$ ，也就是母线  $(r, f(r))$  中  $z$  坐标必须是  $r$  的函数，这自然就已经排除了母线为平行于  $z$  轴直线的情形。换言之，要想能够求解出圆柱面，我们需要一开始就假设旋转面的方程为  $(g(u) \cos v, g(u) \sin v, u)$ ，感兴趣的同学可以从这一方程出发，求得 Gauss 曲率的表达式并求解方程。

$K = 1$  的情形。此时

$$f(u) = \pm \int \sqrt{\frac{1-c+u^2}{c-u^2}} du,$$

先考虑最简单的情形， $c = 1$ 。于是有

$$f(u) = \pm \int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} du = \mp \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} d(1-u^2) = \mp \sqrt{1-u^2},$$

这说明  $xOz$  坐标平面的母线方程为

$$z = \mp \sqrt{1-x^2}, \quad x \geq 0$$

即

$$x^2 + z^2 = 1, \quad x \geq 0$$

也就是旋转面是一个单位球面。

当  $0 < c < 1$  或  $c > 1$  时无法得到积分的显式表达式。注意到这两种  $c$  的取值情况, 为了让  $\sqrt{\frac{1-c+u^2}{c-u^2}}$  有意义,  $u^2$  都不能取零, 或者说最小值为一个正数。也就是说这时的旋转面并非闭合的, 相当于要把球面的北极和南极挖开, 并进行形变后得到。

$K = -1$  的情形。我们一般把 Gauss 曲率为负常数的曲面叫做伪球面。此时

$$f(u) = \pm \int \sqrt{\frac{1-c-u^2}{u^2+c}} du,$$

先考虑最简单的情形,  $c = 0$ 。于是有

$$\begin{aligned} f(u) &= \pm \int \frac{\sqrt{1-u^2}}{u} du \stackrel{u=\cos t}{=} \pm \int -\frac{\sin^2 t}{\cos t} dt = \mp \int \frac{1-\cos^2 t}{\cos t} dt \\ &= \pm \int \left( \cos t - \frac{1}{\cos t} \right) dt = \pm (\sin t - \log(\sec t + \tan t)). \end{aligned}$$

简单起见, 只考虑正号的表达式。用  $u = \cos t$  反解出现的三角函数, 注意到  $u \geq 0$ , 有

$$\pm f(u) = \sqrt{1-u^2} - \log\left(\frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u}\right) = \sqrt{1-u^2} + \log\left(\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u}\right)$$

限制在  $xOz$  平面中的母线  $\sqrt{1-x^2} - \log\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$  叫做曳物线。此时对应的旋转面方程为

$$(u \cos v, u \sin v, \sqrt{1-u^2} - \log\left(\frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u}\right)).$$

将参数  $u$  换回  $\cos t$ ,  $v$  换回  $\theta$ , 则新的参数方程变为

$$(\cos t \cos \theta, \cos t \sin \theta, \sin t - \log(\sec t + \tan t)).$$

由于 Gauss 曲率恒为  $-1$ , 这样的曲面也叫做伪球面。不难看出, 如果把  $\theta$  视为经度,  $t$  视为纬度, 则伪球面和通常球面的参数方程只相差一项。

此外,  $c < 0$  和  $0 < c < 1$  的情形没有办法显式积出。

### 3.5.3 旋转面中的极小曲面

定义 3.29.  $H = 0$  的曲面称为极小曲面。

现在我们来求解旋转面中的极小曲面方程。根据平均曲率的表达式，有

$$uf''(u) + f'(u)(1 + f'^2(u)) = 0.$$

先令  $h(u) = f'(u)$ ，有

$$uh'(u) + h(u)(1 + h^2(u)) = 0.$$

在分离变量求解方程之前，需要注意到  $h(u) \equiv 0$  也是方程的解，此时对应的  $f(u)$  为常数，是平面。当  $h(u) \neq 0$  时，分离变量得

$$\frac{dh}{h(1+h^2)} = -\frac{1}{u}du.$$

左端积分有

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{h(1+h^2)} dh &= \int \left( \frac{1}{h} - \frac{h}{1+h^2} \right) dh = \int \frac{1}{h} dh - \int \frac{h}{1+h^2} dh \\ &= \log h - \frac{1}{2} \log(1+h^2) = \log \frac{h}{\sqrt{1+h^2}}. \end{aligned}$$

右端积分有

$$\int -\frac{1}{u} du = -\log u + c.$$

于是

$$\log \frac{uh}{\sqrt{1+h^2}} = c$$

反解  $h$  得到

$$h(u) = \sqrt{\frac{e^{2c}}{u^2 - e^{2c}}}.$$

令  $a = e^c$ ，有

$$f'(u) = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{u}{a}\right)^2 - 1}},$$

对上式积分

$$\begin{aligned} f(u) &= \int \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{u}{a}\right)^2 - 1}} du \stackrel{\frac{u}{a} = \sec t}{=} a \int \frac{1}{\sqrt{\sec^2 t - 1}} d \sec t = a \int \frac{1}{\tan t} \tan t \sec t dt \\ &= a \int \frac{1}{\cos t} dt = a \log(\sec t + \tan t) \stackrel{\cos t = \frac{a}{u}}{=} a \log \left( \frac{u}{a} + \sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2 - 1} \right). \end{aligned}$$

简单起见,不妨令  $a = 1$  (其他情形只相差变量替换),此时,旋转面的方程为

$$(u \cos \theta, u \sin \theta, \log(u + \sqrt{u^2 - 1})).$$

但是,函数  $\log(u + \sqrt{u^2 - 1})$  比较复杂,很难画出图像。为了得到曲面方程更简洁的表达式,令  $z = \log(u + \sqrt{u^2 - 1})$ 。注意到  $(u + \sqrt{u^2 - 1})(u - \sqrt{u^2 - 1}) \equiv 1$ , 于是有  $-z = \log(u - \sqrt{u^2 - 1})$ , 于是

$$\begin{cases} u + \sqrt{u^2 - 1} = e^z \\ u - \sqrt{u^2 - 1} = e^{-z} \end{cases}$$

从而  $u = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z$ 。旋转面方程可以改写为

$$(\cosh z \cos \theta, \cosh z \sin \theta, z)$$

该旋转面限制在  $xOz$  平面中的母线方程为  $(\cosh z, z)$ , 称为悬链线。故这样的旋转面也称为悬链面。

注意到,当  $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = 0$  时,自然有  $K = \kappa_1 \kappa_2 \leq 0$ 。直观上,曳物线(面) ( $K = -1$ ) 和悬链线(面) ( $H = 0$ ) 看起来差不多(都是凹进去的)。

最后,我们总结一下这一节的基本思路:

- 利用对称性“降维”,伴随着将偏微分方程转化为常微分方程。
- 选择了适合旋转面的参数方程,使得第一和第二基本形式都没有交叉项<sup>1</sup>,运算简洁。

从这一节的几个例子中可以发现,由于 Gauss 曲率和平均曲率分别是主曲率的乘积以及和,即分别只包含了第二基本形式的部分信息。这就产生了两方面不同的后果:

1. Gauss 曲率和平均曲率确实能够反映曲面的弯曲程度;
2. 单独知道 Gauss 曲率或单独知道平均曲率,并不能将曲面的形状完全确定下来(即便限制在旋转曲面中考虑)。

<sup>1</sup>这样的参数系即为正交曲率线网,我们将在后续章节中专门讨论。

## 本章注记

本章的要点当然在于第一和第二基本形式，它们是曲面的不变量，我们在下一章中也要使用它们来确定曲面的形状。但是，更进一步来看，本章的要点其实在于 Weingarten 映射，它把第一和第二基本形式联系起来。我们也会在后续章节中看到 Weingarten 映射在研究曲面中的重要作用。

本章之中我们还涉及到了三维欧氏空间中旋转对称的极小曲面，常曲率曲面。实际上，三维空间中的极小曲面（包括更广的常平均曲率曲面），常曲率曲面都是微分几何中非常重要的研究对象。我们将在地第十章中系统地研究极小曲面和常平均曲率曲面。



# Chapter 4

## 曲面论基本定理

对于曲面来说，第一基本形式和第二基本形式也是不变量，我们自然会问：**这两个基本形式是否足以确定曲面的形状？ $I, II$  是否构成曲面的完全的不变量系统？**即给定第一第二基本形式后，曲面是否在刚体运动的意义下唯一存在。

直接使用第一、第二基本形式的语言来探讨曲面论的基本定理过于抽象。我们还是先换回到第一、第二类基本量的视角。这相当于给定了函数组  $E(u, v), F(u, v), G(u, v)$  和  $L(u, v), M(u, v), N(u, v)$ , 那么能否找到唯一的正则参数曲面  $\vec{r}(u, v)$  使得它以  $E(u, v), F(u, v), G(u, v)$  作为第一类基本量,  $L(u, v), M(u, v), N(u, v)$  作为第二类基本量? 当然, 我们在这一章的讨论中, 总是默认函数  $E(u, v), F(u, v), G(u, v)$  具有两次以上的连续偏导数,  $L(u, v), M(u, v), N(u, v)$  具有一次以上的连续偏导数, 且实对称矩阵  $\begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix}$  处处正定。同时, 如果我们说某个形式  $k$  次以上连续可微, 指代的也是这个形式的系数函数  $k$  次以上连续可微。

用数学式子来表述这一问题, 即

$$\begin{aligned} \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u &= E(u, v), & \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v &= F(u, v), & \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v &= G(u, v); \\ \vec{r}_{uu} \cdot \vec{n} &= L(u, v), & \vec{r}_{uv} \cdot \vec{n} &= M(u, v), & \vec{r}_{vv} \cdot \vec{n} &= N(u, v). \end{aligned}$$

其中,  $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$ ; 那么能否通过这些式子确定正则参数曲面  $\vec{r}(u, v)$ ? 不难发现这些式子构成了一个关于  $\vec{r}$  的二阶非线性偏微分方程组, 直接求解是非常困难的。

## 4.1 曲面的自然标架及其运动公式

在曲线论中我们利用了曲线附带的 Frenet 标架及其运动公式来刻画曲线。研究曲面自然也要引入曲面上的标架。之前介绍了曲面上的自然标架  $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n}\}$ ，但是注意到，自然标架和 Frenet 标架还是有很大的区别。

- 自然标架的选取与参数选取有关；
- 自然标架不是单位正交标架。

**能不能克服这些弱点？** 比如，取单位正交参数标架  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}\}$ ，其中  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  是主方向上的单位向量，显然这一正交标架与参数选取无关。然而主方向并不容易求出，需要求特征值和特征向量，这样就导致标架随参数变化的规律过于复杂。同时，我们会在后续章节说明，一般的曲面上并不能取参数系  $(u, v)$  使得  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  单位正交。综上，退而求其次，还是老老实实使用自然标架。

对于标架  $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n}\}$ ，要导出运动公式，需要对标架求导数。例如

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}_u}{\partial u} &= a\vec{r}_u + b\vec{r}_v + c\vec{n} \\ \frac{\partial \vec{r}_u}{\partial v} &= d\vec{r}_u + e\vec{r}_v + f\vec{n} \\ \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial u} &= \dots \\ \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial v} &= \dots \\ \frac{\partial \vec{n}}{\partial u} &= \dots \\ \frac{\partial \vec{n}}{\partial v} &= \dots \end{aligned}$$

我们发现书写这些表达式有两个问题：

- 因为要求偏导，共有 6 个式子，式子太多；
- 每个式子右端都有三项做和，因为标架场不是单位正交，三项都不会自动消失。

太繁琐，需要找到一种书写方法来让表达式简单，同时让系数也容易处理。基本想法是

找到一种统一的编号规则。于是将  $u, v$  换成  $u^1, u^2$ ,  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  换成  $\vec{r}_1, \vec{r}_2^1$ , 从而有

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial u^\beta} = \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{r}_\gamma + C_{\alpha\beta} \vec{n} & \alpha = 1, 2; \beta = 1, 2 \\ \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^\beta} = \sum_{\gamma=1}^2 D_\beta^\gamma \vec{r}_\gamma + D_\beta \vec{n} & \beta = 1, 2 \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\quad (4.2)$$

注意, 这里为了书写便利清晰, 除了微分要用上标, 切向量要用下标, 指标位置的安排还需要服从如下的规律:

- 对于两组对象对应相乘再做和的情形, 一组对象用上标编号, 则另外一组用下标编号;
- 对于不参与求和的指标, 在等式左右两边的位置保持一致, 即左端  $\alpha$  是下标, 那么右端的  $\alpha$  也是下标;
- 分母中的上标等效于下标, 同理, 分母中的下标等效于上标。

回到运动方程, 方程中的  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ ,  $C_{\alpha\beta}$ ,  $D_\beta^\gamma$ ,  $D_\beta$  都是待定函数。我们现在通过将方程和基底  $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n}\}$  分别做内积, 来求出这些函数。

从简单的入手, 先求  $\vec{n}$  前的系数。将等式 (4.1) 左右两边同时和  $\vec{n}$  做内积, 得到

$$C_{\alpha\beta} = \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial u^\beta} \cdot \vec{n} = \vec{r}_{\alpha\beta} \cdot \vec{n} = b_{\alpha\beta}$$

这里  $b_{\alpha\beta}$  就是第二类基本量, 即  $b_{11} = L$ ,  $b_{12} = b_{21} = M$ ,  $b_{22} = N$ 。

$b_{\alpha\beta}$  这样的记法称为张量<sup>2</sup>记号, 曲面论开始时所用的  $L, M, N$  等称为 Gauss 记号; 两者仅仅只是书写方式有差异, 本质上是同一个东西。

同样, 将等式 (4.2) 左右两边同时和  $\vec{n}$  做内积, 得到

$$D_\beta = \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^\beta} \cdot \vec{n} = \frac{\partial(\vec{n} \cdot \vec{n})}{2\partial u^\beta} = 0$$

<sup>1</sup>切向量和微分形式在参数变换下的变化规律并不相同, 我们往往把切向量的指标记为下指标, 微分形式的指标记为上指标, 这也会为我们书写和化简带来方便。

<sup>2</sup>狭义的张量, 指的是所谓“空间矩阵”; 具体到微分几何中又略有不同, 微分几何中所谓的张量往往指代张量场, 需要有切丛以及余切丛的概念才能定义, 感兴趣的同学可以参考<sup>[9]</sup>, 本书不做展开讨论。

再来看系数  $D_\beta^\gamma$ , 等式 (4.2) 两边内积切向量  $\vec{r}_\xi$ , 有

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial u^\beta} \cdot \vec{r}_\xi = \sum_{\gamma=1}^2 D_\beta^\gamma \vec{r}_\gamma \cdot \vec{r}_\xi$$

记  $g_{\gamma\xi} = \vec{r}_\gamma \cdot \vec{r}_\xi$ , 也就是  $g_{\gamma\xi}$  为曲面的第一类基本量  $E, F, G$  的张量记法。又因为  $\frac{\partial \vec{n}}{\partial u^\beta} \cdot \vec{r}_\xi = -b_{\beta\xi}$ , 故

$$\sum_{\gamma=1}^2 D_\beta^\gamma g_{\gamma\xi} = -b_{\beta\xi} \quad (4.3)$$

$g_{\gamma\xi}$ ,  $b_{\beta\xi}$  均已知, 如何求出  $D_\beta^\gamma$ ? 最基本的观点是, 这是一个包含 4 个方程, 4 个未知数 (暂不考虑对称性) 的线性方程组, 可以通过求解方程组得到  $D_\beta^\gamma$ 。然而, 毕竟求解 4 阶线性方程组是比较繁琐的。我们需要找到更高效的求解方式。观察上式, 左端和矩阵乘法的运算规律完全一致, 将  $(g_{\gamma\xi})$  看作一个对称矩阵, 它的逆矩阵不妨记为  $(g^{\gamma\xi})$ 。于是

$$\sum_{\xi=1}^2 g^{\gamma\xi} g_{\xi\alpha} = \sum_{\xi=1}^2 g_{\xi\alpha} g^{\gamma\xi} = \delta_\alpha^\gamma = \begin{cases} 1, & \alpha = \gamma \\ 0, & \alpha \neq \gamma \end{cases}$$

现在我们有两种观点来求出  $D_\beta^\gamma$ :

1. 直接将  $(D_\beta^\gamma)$ ,  $(b_{\beta\xi})$  也看成矩阵, 则 (4.3) 式可以写为

$$(D_\beta^\gamma)(g_{\gamma\xi}) = -(b_{\beta\xi})$$

于是

$$(D_\beta^\gamma) = -(b_{\beta\xi})(g^{\gamma\xi})$$

写回元素形式  $D_\beta^\gamma = -\sum_{\xi=1}^2 b_{\beta\xi} g^{\gamma\xi} = -\sum_{\xi=1}^2 b_{\beta\xi} g^{\xi\gamma}$ 。

2. 但是这种视为矩阵的方法只在一些很特殊的情况下才适用。我们采用更先进的张量的观点, 应用范围更广: (4.3) 式中的每个方程和  $g^{\xi\alpha}$  相乘后再做和

$$\sum_{\xi=1}^2 \left( \sum_{\gamma=1}^2 D_\beta^\gamma g_{\gamma\xi} \right) g^{\xi\alpha} = - \sum_{\xi=1}^2 b_{\beta\xi} g^{\xi\alpha}$$

而左端可改写为

$$\sum_{\gamma=1}^2 D_\beta^\gamma \left( \sum_{\xi=1}^2 g_{\gamma\xi} g^{\xi\alpha} \right) = \sum_{\gamma=1}^2 D_\beta^\gamma \delta_\gamma^\alpha = D_\beta^\alpha$$

故  $D_\beta^\alpha = -\sum_{\xi=1}^2 b_{\beta\xi} g^{\xi\alpha}$ , 等价于  $D_\beta^\gamma = -\sum_{\xi=1}^2 b_{\beta\xi} g^{\xi\gamma}$ 。

我们一般把  $b_{\beta\xi}g^{\xi\gamma}$  记作  $b_{\beta}^{\gamma}$ , 即把  $b_{\beta}^{\gamma}$  视为  $b_{\beta\xi}$  的指标  $\xi$  借助矩阵  $(g^{\xi\gamma})$  上升的结果。反之,  $b_{\beta\xi}$  也可以视为  $b_{\beta}^{\gamma}$  的指标  $\gamma$  借助矩阵  $(g_{\xi\gamma})$  下降的结果。这一过程是可逆的。最终有

$$D_{\beta}^{\alpha} = -b_{\beta}^{\alpha}$$

系数  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$  称为曲面的 **Christoffel 记号**。确定自然标架运动公式过程中最为关键的就是求系数  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$  的表达式。对 (4.1) 式两边内积  $\vec{r}_{\xi}$ , 有

$$\vec{r}_{\alpha\beta} \cdot \vec{r}_{\xi} = \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \vec{r}_{\gamma} \cdot \vec{r}_{\xi} = \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} g_{\gamma\xi}$$

而等式左端

$$\vec{r}_{\alpha\beta} \cdot \vec{r}_{\xi} = \frac{\partial(\vec{r}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\xi})}{\partial u^{\beta}} - \vec{r}_{\xi\beta} \cdot \vec{r}_{\alpha} = \frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^{\beta}} - \left( \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\xi\beta}^{\gamma} \vec{r}_{\gamma} \right) \cdot \vec{r}_{\alpha} = \frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^{\beta}} - \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\xi\beta}^{\gamma} g_{\gamma\alpha}$$

故

$$\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^{\beta}} = \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} g_{\gamma\xi} + \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\xi\beta}^{\gamma} g_{\gamma\alpha}, \quad \alpha, \beta, \xi = 1, 2 \quad (4.4)$$

这个 8 阶的线性方程组就无法直接视为矩阵相乘来求解, 直接求解线性方程组又过于复杂。为了方便地求解这个方程组, 一方面我们默认  $\alpha, \beta, \xi$  在 1, 2 中选取所有的可能, 不再单独标记; 另一方面, 记

$$\sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} g_{\gamma\xi} = \Gamma_{\xi\alpha\beta}.$$

换言之, 即  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$  的指标  $\gamma$  借助  $g_{\gamma\xi}$  指标下降, 且有

$$\vec{r}_{\alpha\beta} \cdot \vec{r}_{\xi} = \Gamma_{\xi\alpha\beta}.$$

于是方程组 (4.4) 改写为

$$\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^{\beta}} = \Gamma_{\xi\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\xi\beta}. \quad (4.5)$$

由于  $\vec{r}_{\alpha\beta} = \vec{r}_{\beta\alpha}$ , 易知  $\Gamma_{\xi\alpha\beta}$  关于  $\alpha, \beta$  对称, 即  $\Gamma_{\xi\alpha\beta} = \Gamma_{\xi\beta\alpha}$  (自然  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$  也关于  $\alpha, \beta$  对称)。这意味着 (4.5) 是一个非常特殊的方程, 应该有简便的方法能计算出  $\Gamma$ 。为了利用  $\Gamma_{\xi\alpha\beta}$  中  $\alpha, \beta$  的对称性, 互换整个 (4.5) 式中  $\alpha, \beta$  的位置, 得到完全同解的方程组

$$\frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^{\alpha}} = \Gamma_{\xi\beta\alpha} + \Gamma_{\beta\xi\alpha}.$$

再注意到  $g_{\alpha\xi} = g_{\xi\alpha}$ , 故也可以互换 (4.5) 式中  $\xi$  和  $\beta$  的位置, 有

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\xi} = \Gamma_{\beta\alpha\xi} + \Gamma_{\alpha\beta\xi}.$$

将三个式子联立, 依然同解, 有

$$\begin{cases} \frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\beta} = \Gamma_{\xi\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\xi\beta} \\ \frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^\alpha} = \Gamma_{\xi\beta\alpha} + \Gamma_{\beta\xi\alpha} \\ \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\xi} = \Gamma_{\beta\alpha\xi} + \Gamma_{\alpha\beta\xi}. \end{cases}$$

前两个式子相加后再减去第三个, 可解得

$$\Gamma_{\xi\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\xi} \right).$$

指标提升后即可得到 Christoffel 记号的表达式

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \sum_{\xi=1}^2 g^{\gamma\xi} \Gamma_{\xi\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{\xi=1}^2 g^{\gamma\xi} \left( \frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\xi} \right)$$

可以看出  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  完全由第一类基本量及其偏导数决定。最终, 由

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\alpha} = \vec{r}_\alpha$$

以及

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial u^\beta} = \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{r}_\gamma + b_{\alpha\beta} \vec{n} \\ \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^\beta} = - \sum_{\gamma=1}^2 b_{\beta}^\gamma \vec{r}_\gamma \end{cases}$$

组成了曲面上自然标架  $\{\vec{r}; \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n}\}$  的**运动公式**。后一个方程中, 第一式称为**曲面的 Gauss 公式**, 第二式称为**曲面的 Weingarten 公式**。运动公式中所有的系数, 均由第一类基本量和第二类基本量完全决定。

这一节中我们主要引入了张量 (虽然并未严格定义) 来简化方程。**如何来理解“张量”这样一个非常抽象的新概念?**

- 任何新的概念，都会有它的“原型”。张量可以看成是更高“维度”上的矩阵，也就是不仅有行，列，还有“高”；即所谓的空间矩阵。
- 利用张量上下标进行求和运算，一定程度上就是模仿了矩阵之间的乘法。
- 实际上，对于张量的运算，我们还可以进一步简化记号。对于用相同字母上下标标记的张量，已经清晰地表明了是需要进行求和运算，可以省略求和符号  $\sum$ ，这就是所谓的 Einstein 求和符号<sup>a</sup>。

<sup>a</sup>Einstein 求和规则的详细解释，可以参考<sup>[10]</sup>。本讲义为了方便初学者，并不使用 Einstein 求和符号来简化记号。

## 4.2 一阶线性偏微分方程组的解的存在性与唯一性

有了前一部分的准备，现在我们来回答最根本的问题：**给定第一、第二基本形式，曲面是否唯一存在？** 来看自然标架的运动公式：

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial u^\beta} = \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{r}_\gamma + b_{\alpha\beta} \vec{n} \\ \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^\beta} = - \sum_{\gamma=1}^2 b_{\beta}^\gamma \vec{r}_\gamma \end{cases}$$

当第一、第二基本形式给定后，所有系数均是确定的。回答曲面是否唯一存在，等价于求解上述线性偏微分方程组。和曲线论中的常微分方程组相比，偏微分方程解的存在唯一性是一个非常复杂的问题。但是局限于曲面论中所涉及到的一阶线性偏微分方程组，解决起来相对还是相对容易的。

为了能更系统的研究曲面的运动方程，我们需要对一阶线性偏微分方程组有一个整体的认知。先来考察最简单的情形， $f$  是平面上的一个具有两次以上连续偏导数的二元函数，满足如下偏微分方程组：

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u^1} = P_1(u^1, u^2) \\ \frac{\partial f}{\partial u^2} = P_2(u^1, u^2) \end{cases}$$

其中  $P_1, P_2$  都是已知的连续可微函数；给定  $f$  在  $(u_0^1, u_0^2)$  处的值  $f(u_0^1, u_0^2)$ ，考察方程在该初值条件下解的存在性和唯一性。

先来看方程组有解的必要条件。因为  $f$  具有两次以上的连续偏导数，故二阶偏导数与求导的次序无关，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2 \partial u^1} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^1 \partial u^2}$$

即

$$\frac{\partial P_1}{\partial u^2} = \frac{\partial P_2}{\partial u^1} \quad (4.6)$$

事实上，当限制在平面上的单连通区域<sup>1</sup>上，这一条件也是解存在的充分条件。具体来看，可以构造

$$f(u^1, u^2) = f(u_0^1, u_0^2) + \int_{u_0^1}^{u^1} P_1(s, u_0^2) ds + \int_{u_0^2}^{u^2} P_2(u^1, t) dt$$

此时，一方面

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u^1} &= P_1(u^1, u_0^2) + \int_{u_0^2}^{u^2} \frac{\partial P_2(u^1, t)}{\partial u^1} dt \\ &= P_1(u^1, u_0^2) + \int_{u_0^2}^{u^2} \frac{\partial P_1(u^1, t)}{\partial t} dt \\ &= P_1(u^1, u_0^2) + P_1(u^1, t) \Big|_{u_0^2}^{u^2} = P_1(u^1, u^2) \end{aligned}$$

其中，第二个等号用到了 (4.6) 式。另一方面

$$\frac{\partial f}{\partial u^2} = P_2(u^1, u^2)$$

于是可得充分性。为了表达更清晰、简洁，我们一般把关系 (4.6) 称为方程组的相容性条件。

更本质，更几何的看法是：相容性条件 (4.6) 保证了积分与路径无关。因此我们可取另一路径构造：

$$f(u^1, u^2) = f(u_0^1, u_0^2) + \int_{u_0^2}^{u^2} P_2(u_0^1, t) dt + \int_{u_0^1}^{u^1} P_1(s, u^2) ds$$

特别需要注意的是：这一部分对一阶偏微分方程组的解的存在性的讨论，都是限制在单连通区域上考虑的。否则，有下面的反例。

<sup>1</sup>所谓单连通，简单起见，在曲面论的范畴内，可以认为是整个  $\mathbb{R}^2$  或是  $\mathbb{R}^2$  上的一个圆盘。单连通的严格定义可以参考<sup>[1]</sup>。

例 4.1. 考虑  $\mathbb{R}^2 - (0,0)$  上的方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} = P(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} = Q(x,y) \end{cases}$$

不难验证,  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 即  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 。但是在单位圆周上进行路径积分, 有

$$\oint_{S^1} \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = 2\pi$$

也就是积分和路径有关 (和路径“局部”无关, 但和路径“整体”有关, 不能跨越无定义的原点<sup>1</sup>)。在区域  $\mathbb{R}^2 - (0,0)$  上,  $f$  是没有单值的解的。

利用常微分方程解的唯一性, 可以推得一阶线性偏微分方程组, 给定  $f$  在  $(u_0^1, u_0^2)$  处的值  $f(u_0^1, u_0^2)$  后, 解是唯一的。我们后续在曲面自然标架运动方程的唯一性中一并展开探讨, 这里先略过。

## 4.3 曲面论基本方程的相容性条件

首先忽略几何意义, 从偏微分方程角度研究来研究运动方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial u^\beta} = \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{r}_\gamma + b_{\alpha\beta} \vec{n} \\ \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^\beta} = - \sum_{\gamma=1}^2 b_\beta^\gamma \vec{r}_\gamma \end{cases} \quad (4.7)$$

### 4.3.1 解存在的必要性

先看有解的必要条件。类似前一节中的讨论, 已经假定正则曲面  $\vec{r}$  具有三次以上的连续偏导数, 于是  $\vec{r}_\alpha, \vec{n}$  具有两次以上的连续偏导数<sup>2</sup>, 从而其二阶偏导数与求导的次序无关, 即

$$\frac{\partial^2 \vec{r}_\alpha}{\partial u^\beta \partial u^\gamma} = \frac{\partial^2 \vec{r}_\alpha}{\partial u^\gamma \partial u^\beta}, \quad \frac{\partial^2 \vec{n}}{\partial u^\beta \partial u^\gamma} = \frac{\partial^2 \vec{n}}{\partial u^\gamma \partial u^\beta}$$

<sup>1</sup>微分拓扑中要依此利用微分形式来研究拓扑。

<sup>2</sup>这也是我们要求正则参数曲面具有三次以上的连续偏导数的根本原因

将运动公式 (4.7) 代入上式<sup>1</sup>, 有

$$\frac{\partial}{\partial u^\gamma} \left( \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \vec{r}_\eta + b_{\alpha\beta} \vec{n} \right) = \frac{\partial}{\partial u^\beta} \left( \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \vec{r}_\eta + b_{\alpha\gamma} \vec{n} \right) \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial u^\gamma} \left( \sum_{\eta=1}^2 b_\beta^\eta \vec{r}_\eta \right) = \frac{\partial}{\partial u^\beta} \left( \sum_{\eta=1}^2 b_\gamma^\eta \vec{r}_\eta \right) \quad (4.9)$$

将 (4.8) 展开, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{\eta=1}^2 \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\eta}{\partial u^\gamma} \vec{r}_\eta + \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} \vec{n} + b_{\alpha\beta} \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^\gamma} \\ &= \sum_{\eta=1}^2 \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta}{\partial u^\beta} \vec{r}_\eta + \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial u^\beta} + \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} \vec{n} + b_{\alpha\gamma} \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^\beta} \end{aligned}$$

再根据运动公式可得

$$\begin{aligned} & \sum_{\eta=1}^2 \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\eta}{\partial u^\gamma} \vec{r}_\eta + \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \left( \sum_{\delta=1}^2 \Gamma_{\eta\gamma}^\delta \vec{r}_\delta + b_{\eta\gamma} \vec{n} \right) + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} \vec{n} - b_{\alpha\beta} \sum_{\delta=1}^2 b_\gamma^\delta \vec{r}_\delta \\ &= \sum_{\eta=1}^2 \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta}{\partial u^\beta} \vec{r}_\eta + \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \left( \sum_{\delta=1}^2 \Gamma_{\eta\beta}^\delta \vec{r}_\delta + b_{\eta\beta} \vec{n} \right) + \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} \vec{n} - b_{\alpha\gamma} \sum_{\delta=1}^2 b_\beta^\delta \vec{r}_\delta \end{aligned}$$

因为需要合并同类项化简, 故更换求和式中的指标, 可以重写为

$$\begin{aligned} & \sum_{\delta=1}^2 \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\delta}{\partial u^\gamma} \vec{r}_\delta + \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \left( \sum_{\delta=1}^2 \Gamma_{\eta\gamma}^\delta \vec{r}_\delta + b_{\eta\gamma} \vec{n} \right) + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} \vec{n} - b_{\alpha\beta} \sum_{\delta=1}^2 b_\gamma^\delta \vec{r}_\delta \\ &= \sum_{\delta=1}^2 \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta}{\partial u^\beta} \vec{r}_\delta + \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \left( \sum_{\delta=1}^2 \Gamma_{\eta\beta}^\delta \vec{r}_\delta + b_{\eta\beta} \vec{n} \right) + \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} \vec{n} - b_{\alpha\gamma} \sum_{\delta=1}^2 b_\beta^\delta \vec{r}_\delta \end{aligned}$$

合并同类项有

$$\begin{aligned} & \sum_{\delta=1}^2 \left( \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\delta}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta}{\partial u^\beta} + \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \Gamma_{\eta\gamma}^\delta - \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \Gamma_{\eta\beta}^\delta - b_{\alpha\beta} b_\gamma^\delta + b_{\alpha\gamma} b_\beta^\delta \right) \vec{r}_\delta \\ & + \left( \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\eta b_{\eta\gamma} - \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta b_{\eta\beta} + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} \right) \vec{n} = \vec{0} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>这里需要注意求和的指标的取法, 不要和其他的指标重复, 否则会引发歧义。

由  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n}$  为基底, 有

$$\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\delta}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta}{\partial u^\beta} + \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \Gamma_{\eta\gamma}^\delta - \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \Gamma_{\eta\beta}^\delta = b_{\alpha\beta} b_\gamma^\delta - b_{\alpha\gamma} b_\beta^\delta, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} = \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta b_{\eta\beta} - \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\eta b_{\eta\gamma}$$

注意到第 (4.10) 式左端只由第一类基本量及其不高于二阶的偏导数构成, 可把它记成

$$R_{\alpha\beta\gamma}^\delta = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\delta}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta}{\partial u^\beta} + \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \Gamma_{\eta\gamma}^\delta - \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \Gamma_{\eta\beta}^\delta$$

称为曲面第一类基本量的 **Riemann 记号**。于是有

$$\begin{cases} R_{\alpha\beta\gamma}^\delta = b_{\alpha\beta} b_\gamma^\delta - b_{\alpha\gamma} b_\beta^\delta & (4.11) \\ \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} = \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta b_{\eta\beta} - \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\eta b_{\eta\gamma} & (4.12) \end{cases}$$

等式 (4.11) 称为 **Gauss 方程** (注意和运动公式中的 Gauss 公式的区别); 等式 (4.12) 称为 **Codazzi 方程**。

再来看等式 (4.9), 展开得到:

$$\sum_{\eta=1}^2 \left( \frac{\partial b_\beta^\eta}{\partial u^\gamma} \vec{r}_\eta + b_\beta^\eta \frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial u^\gamma} \right) = \sum_{\eta=1}^2 \left( \frac{\partial b_\gamma^\eta}{\partial u^\beta} \vec{r}_\eta + b_\gamma^\eta \frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial u^\beta} \right)$$

代入运动公式, 有

$$\sum_{\eta=1}^2 \frac{\partial b_\beta^\eta}{\partial u^\gamma} \vec{r}_\eta + \sum_{\eta=1}^2 b_\beta^\eta \left( \sum_{\delta=1}^2 \Gamma_{\eta\gamma}^\delta \vec{r}_\delta + b_{\eta\gamma} \vec{n} \right) = \sum_{\eta=1}^2 \frac{\partial b_\gamma^\eta}{\partial u^\beta} \vec{r}_\eta + \sum_{\eta=1}^2 b_\gamma^\eta \left( \sum_{\delta=1}^2 \Gamma_{\eta\beta}^\delta \vec{r}_\delta + b_{\eta\beta} \vec{n} \right)$$

同样为了方便合并同类项, 改换求和式中的指标

$$\sum_{\delta=1}^2 \frac{\partial b_\beta^\delta}{\partial u^\gamma} \vec{r}_\delta + \sum_{\eta=1}^2 b_\beta^\eta \sum_{\delta=1}^2 \Gamma_{\eta\gamma}^\delta \vec{r}_\delta + \sum_{\eta=1}^2 b_\beta^\eta b_{\eta\gamma} \vec{n} = \sum_{\delta=1}^2 \frac{\partial b_\gamma^\delta}{\partial u^\beta} \vec{r}_\delta + \sum_{\eta=1}^2 b_\gamma^\eta \sum_{\delta=1}^2 \Gamma_{\eta\beta}^\delta \vec{r}_\delta + \sum_{\eta=1}^2 b_\gamma^\eta b_{\eta\beta} \vec{n}$$

于是有

$$\sum_{\delta=1}^2 \left( \frac{\partial b_\beta^\delta}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial b_\gamma^\delta}{\partial u^\beta} + \sum_{\eta=1}^2 b_\beta^\eta \Gamma_{\eta\gamma}^\delta - \sum_{\eta=1}^2 b_\gamma^\eta \Gamma_{\eta\beta}^\delta \right) \vec{r}_\delta + \left( \sum_{\eta=1}^2 b_\beta^\eta b_{\eta\gamma} - \sum_{\eta=1}^2 b_\gamma^\eta b_{\eta\beta} \right) \vec{n} = \vec{0}$$

由于

$$\sum_{\eta=1}^2 b_{\beta}^{\eta} b_{\eta\gamma} = \sum_{\eta=1}^2 \left( \sum_{\xi=1}^2 g^{\eta\xi} b_{\xi\beta} \right) b_{\eta\gamma} = \sum_{\xi=1}^2 \left( \sum_{\eta=1}^2 g^{\eta\xi} b_{\eta\gamma} \right) b_{\xi\beta} = \sum_{\xi=1}^2 b_{\gamma}^{\xi} b_{\xi\beta} = \sum_{\eta=1}^2 b_{\gamma}^{\eta} b_{\eta\beta}$$

恒成立, 故等式 (4.9) 最终等价于

$$\frac{\partial b_{\beta}^{\delta}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial b_{\gamma}^{\delta}}{\partial u^{\beta}} = - \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\eta\gamma}^{\delta} b_{\eta\beta}^{\eta} + \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\eta\beta}^{\delta} b_{\eta\gamma}^{\eta}, \quad \delta = 1, 2 \quad (4.13)$$

我们会发现式 (4.13) 和式 (4.12) 非常的相似, 只差指标上升或下降。为了说明两式等价, 可将 (4.13) 的左端写成

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\sum_{\alpha=1}^2 b_{\alpha\beta} g^{\alpha\delta})}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial(\sum_{\alpha=1}^2 b_{\alpha\gamma} g^{\alpha\delta})}{\partial u^{\beta}} \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 \left( \left( \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}} \right) g^{\alpha\delta} + b_{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\delta}}{\partial u^{\gamma}} - b_{\alpha\gamma} \frac{\partial g^{\alpha\delta}}{\partial u^{\beta}} \right) \end{aligned}$$

将 (4.12) 式代入上式的小括号中, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^2 \left( \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta} b_{\eta\beta} - \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} b_{\eta\gamma} \right) g^{\alpha\delta} + \sum_{\alpha=1}^2 \left( b_{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\delta}}{\partial u^{\gamma}} - b_{\alpha\gamma} \frac{\partial g^{\alpha\delta}}{\partial u^{\beta}} \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 \left( \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta} b_{\eta\beta} - \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} b_{\eta\gamma} \right) g^{\alpha\delta} + \sum_{\eta=1}^2 \left( b_{\eta\beta} \frac{\partial g^{\eta\delta}}{\partial u^{\gamma}} - b_{\eta\gamma} \frac{\partial g^{\eta\delta}}{\partial u^{\beta}} \right) \\ &= \sum_{\eta=1}^2 \left( \left( \sum_{\alpha=1}^2 g^{\alpha\delta} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta} + \frac{\partial g^{\eta\delta}}{\partial u^{\gamma}} \right) b_{\eta\beta} - \left( \sum_{\alpha=1}^2 g^{\alpha\delta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} + \frac{\partial g^{\eta\delta}}{\partial u^{\beta}} \right) b_{\eta\gamma} \right) \end{aligned}$$

注意到等式:  $\sum_{\delta=1}^2 (g^{\alpha\delta} \Gamma_{\delta\gamma}^{\beta} + g^{\beta\delta} \Gamma_{\delta\gamma}^{\alpha}) = -\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}$  (证明作为练习), 于是 (4.13) 式的左端变为

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\eta=1}^2 (-g^{\alpha\eta} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta} b_{\eta\beta} + g^{\alpha\eta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} b_{\eta\gamma}) \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 (-\Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta} \sum_{\eta=1}^2 g^{\alpha\eta} b_{\eta\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} \sum_{\eta=1}^2 g^{\alpha\eta} b_{\eta\gamma}) \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 (-\Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta} b_{\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} b_{\gamma}^{\alpha}) = \sum_{\eta=1}^2 (-\Gamma_{\eta\gamma}^{\delta} b_{\beta}^{\eta} + \Gamma_{\eta\beta}^{\delta} b_{\gamma}^{\eta}) \end{aligned}$$

恒等于 (4.13) 式的右端。即有第 (4.12) 式可推出第 (4.13) 式，类似可以说明反之也成立，故两式等价。也就是说，运动方程导出的相容性条件只有 Gauss-Codazzi 方程。

读者要从上述等价性的推导中领会张量运算的规律，特别是指标在其中的关键作用：

- 说到底，张量的化简就是合并同类项；
- 有时需要合并非哑指标的项，有时需要合并哑指标的项；
- 非求和的指标位置始终“固定”。这里的固定是指：在上方的永远在上方，下方的永远在下方；
- 求和式中的哑指标可以根据合并同类项的需求“随意”地改变；
- 要证等式，有时需要指标同时上升或同时下降。

### 4.3.2 Gauss-Codazzi 方程中的对称性

重新梳理我们的思路，因为运动方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial u^\beta} = \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{r}_\gamma + b_{\alpha\beta} \vec{n} \\ \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^\beta} = - \sum_{\gamma=1}^2 b_{\beta\gamma}^\gamma \vec{r}_\gamma \end{cases}$$

中方程的数目大于未知函数的数目，故我们知道方程有解的话必须满足相容性条件 Gauss-Codazzi 方程

$$\begin{cases} R_{\alpha\beta\gamma}^\delta = b_{\alpha\beta} b_{\gamma}^\delta - b_{\alpha\gamma} b_{\beta}^\delta \\ \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} = \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta b_{\eta\beta} - \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\eta b_{\eta\gamma} \end{cases}$$

然而大家观察下 Gauss-Codazzi 方程中包含有多少个方程？直观上看，Gauss 方程有  $2^4 = 16$  个方程，Codazzi 方程有  $2^3 = 8$  个方程。这个数目已经大于了运动方程本身所包含的方程的数目。这说明 Gauss-Codazzi 方程中大多数等式具有相关性，也就是这些张量有着很大的对称性。

先来看 Gauss 方程 (4.11), 为了更好的研究其对称性, 借助度量矩阵  $(g_{\alpha\beta})$  将方程左右两端的上指标下降:

$$\sum_{\eta=1}^2 g_{\delta\eta} R_{\alpha\beta\gamma}^{\eta} = \sum_{\eta=1}^2 g_{\delta\eta} (b_{\alpha\beta} b_{\gamma}^{\eta} - b_{\alpha\gamma} b_{\beta}^{\eta})$$

我们约定规定左端的  $\sum_{\eta=1}^2 g_{\delta\eta} R_{\alpha\beta\gamma}^{\eta}$  上指标下降时落在下指标左边第二个位置, 即

$$\sum_{\eta=1}^2 g_{\delta\eta} R_{\alpha\beta\gamma}^{\eta} = R_{\alpha\delta\beta\gamma}$$

此时的 Gauss 方程变为:

$$R_{\alpha\delta\beta\gamma} = b_{\alpha\beta} b_{\delta\gamma} - b_{\alpha\gamma} b_{\delta\beta}$$

它与 Gauss 方程等价, 故我们也把它称为 Gauss 方程, 和初始的 Gauss 方程 (4.11) 不做区分。我们希望得到  $R_{\alpha\delta\beta\gamma}$  更具体的表达式。回忆初始 Riemann 记号的表达式

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta}}{\partial u^{\beta}} + \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} \Gamma_{\eta\gamma}^{\delta} - \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta} \Gamma_{\eta\beta}^{\delta}$$

于是有

$$R_{\alpha\delta\beta\gamma} = \sum_{\eta=1}^2 g_{\delta\eta} R_{\alpha\beta\gamma}^{\eta} = \sum_{\eta=1}^2 g_{\delta\eta} \left( \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta}}{\partial u^{\beta}} + \sum_{\xi=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^{\xi} \Gamma_{\xi\gamma}^{\eta} - \sum_{\xi=1}^2 \Gamma_{\alpha\gamma}^{\xi} \Gamma_{\xi\beta}^{\eta} \right)$$

化简的关键在于 Christoffel 记号偏导数的处理, 首先

$$g_{\delta\eta} \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta}}{\partial u^{\gamma}} = \frac{\partial (g_{\delta\eta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta})}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial g_{\delta\eta}}{\partial u^{\gamma}} \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta}, \quad g_{\delta\eta} \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta}}{\partial u^{\beta}} = \frac{\partial (g_{\delta\eta} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta})}{\partial u^{\beta}} - \frac{\partial g_{\delta\eta}}{\partial u^{\beta}} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta}$$

于是

$$\begin{aligned} & \sum_{\eta=1}^2 g_{\delta\eta} \left( \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta}}{\partial u^{\beta}} \right) \\ &= \frac{\partial (\sum_{\eta=1}^2 g_{\delta\eta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta})}{\partial u^{\gamma}} - \sum_{\eta=1}^2 \frac{\partial g_{\delta\eta}}{\partial u^{\gamma}} \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} - \frac{\partial (\sum_{\eta=1}^2 g_{\delta\eta} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta})}{\partial u^{\beta}} + \sum_{\eta=1}^2 \frac{\partial g_{\delta\eta}}{\partial u^{\beta}} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta} \quad (4.14) \\ &= \frac{\partial \Gamma_{\delta\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma_{\delta\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}} - \sum_{\eta=1}^2 \left( \frac{\partial g_{\delta\eta}}{\partial u^{\gamma}} \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} - \frac{\partial g_{\delta\eta}}{\partial u^{\beta}} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta} \right) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma_{\delta\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\delta\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u^\gamma} \left( \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta} \right) - \frac{\partial}{\partial u^\beta} \left( \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\delta} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial u^\gamma \partial u^\beta} + \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial u^\gamma \partial u^\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma \partial u^\delta} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta \partial u^\gamma} - \frac{\partial^2 g_{\gamma\delta}}{\partial u^\beta \partial u^\alpha} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta \partial u^\delta} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial u^\gamma \partial u^\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma \partial u^\delta} - \frac{\partial^2 g_{\gamma\delta}}{\partial u^\beta \partial u^\alpha} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta \partial u^\delta} \right)\end{aligned}$$

而初始  $R_{\alpha\delta\beta\gamma}$  表达式中的

$$\begin{aligned}\sum_{\eta=1}^2 g_{\delta\eta} \left( \sum_{\xi=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\xi \Gamma_{\xi\gamma}^\eta - \sum_{\xi=1}^2 \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi \Gamma_{\xi\beta}^\eta \right) &= \sum_{\xi=1}^2 \left( \Gamma_{\alpha\beta}^\xi \sum_{\eta=1}^2 g_{\delta\eta} \Gamma_{\xi\gamma}^\eta - \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi \sum_{\eta=1}^2 g_{\delta\eta} \Gamma_{\xi\beta}^\eta \right) \\ &= \sum_{\xi=1}^2 \left( \Gamma_{\alpha\beta}^\xi \Gamma_{\delta\xi\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi \Gamma_{\delta\xi\beta} \right)\end{aligned}$$

将上面这部分和(4.14)式中除去 Christoffel 记号的导数项剩下的部分合并得到

$$\begin{aligned}& - \sum_{\eta=1}^2 \left( \frac{\partial g_{\delta\eta}}{\partial u^\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\eta - \frac{\partial g_{\delta\eta}}{\partial u^\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \right) + \sum_{\xi=1}^2 \left( \Gamma_{\alpha\beta}^\xi \Gamma_{\delta\xi\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi \Gamma_{\delta\xi\beta} \right) \\ &= - \sum_{\eta=1}^2 \left( \frac{\partial g_{\delta\eta}}{\partial u^\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\eta - \frac{\partial g_{\delta\eta}}{\partial u^\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \right) + \sum_{\eta=1}^2 \left( \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \Gamma_{\delta\eta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \Gamma_{\delta\eta\beta} \right) \\ &= \sum_{\eta=1}^2 \left( \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \left( \Gamma_{\delta\eta\gamma} - \frac{\partial g_{\delta\eta}}{\partial u^\gamma} \right) - \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \left( \Gamma_{\delta\eta\beta} - \frac{\partial g_{\delta\eta}}{\partial u^\beta} \right) \right) \\ &= \sum_{\eta=1}^2 \left( -\Gamma_{\alpha\beta}^\eta \Gamma_{\eta\gamma\delta} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \Gamma_{\eta\beta\delta} \right)\end{aligned}$$

最终

$$R_{\alpha\delta\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\delta\beta}}{\partial u^\alpha \partial u^\gamma} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\delta \partial u^\beta} - \frac{\partial^2 g_{\delta\gamma}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta \partial u^\gamma} \right) + \sum_{\eta=1}^2 \left( \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \Gamma_{\eta\beta\delta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \Gamma_{\eta\gamma\delta} \right)$$

Riemann 记号的表达式还可以改写为如下更对称的形式

$$\begin{aligned}R_{\alpha\delta\beta\gamma} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\delta\beta}}{\partial u^\alpha \partial u^\gamma} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\delta \partial u^\beta} - \frac{\partial^2 g_{\delta\gamma}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta \partial u^\gamma} \right) \\ &\quad + \sum_{\eta, \xi=1}^2 g_{\eta\xi} \Gamma_{\delta\beta}^\xi \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta - \sum_{\eta, \xi=1}^2 g_{\eta\xi} \Gamma_{\delta\gamma}^\xi \Gamma_{\alpha\beta}^\eta\end{aligned}$$

从这一式子可以看出 Riemann 记号的对称性。由于

$$R_{\beta\gamma\alpha\delta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\gamma\alpha}}{\partial u^\beta \partial u^\delta} + \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial u^\gamma \partial u^\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\gamma\delta}}{\partial u^\beta \partial u^\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\beta\alpha}}{\partial u^\gamma \partial u^\delta} \right) \\ + \sum_{\eta, \xi=1}^2 g_{\eta\xi} \Gamma_{\gamma\alpha}^\xi \Gamma_{\beta\delta}^\eta - \sum_{\eta, \xi=1}^2 g_{\eta\xi} \Gamma_{\gamma\delta}^\xi \Gamma_{\beta\alpha}^\eta$$

以及

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta \partial u^\gamma} + \frac{\partial^2 g_{\delta\gamma}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\delta \partial u^\beta} - \frac{\partial^2 g_{\delta\beta}}{\partial u^\alpha \partial u^\gamma} \right) \\ + \sum_{\eta, \xi=1}^2 g_{\eta\xi} \Gamma_{\alpha\beta}^\xi \Gamma_{\delta\gamma}^\eta - \sum_{\eta, \xi=1}^2 g_{\eta\xi} \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi \Gamma_{\delta\beta}^\eta$$

所以有：

$$R_{\alpha\delta\beta\gamma} = R_{\beta\gamma\alpha\delta} = -R_{\delta\alpha\beta\gamma} = -R_{\alpha\delta\gamma\beta}$$

上述 Riemann 记号的对称性可以描述为：指标分为前后两组，组间整体交换值不变，组内交换变号。于是

$$R_{11\beta\gamma} = 0 = R_{22\beta\gamma} = R_{\alpha\delta 11} = R_{\alpha\delta 22}$$

注意到右端项  $b_{\alpha\beta}b_{\delta\gamma} - b_{\alpha\gamma}b_{\delta\beta}$  具有与  $R_{\alpha\delta\beta\gamma}$  相同的对称性，对应的项也为零。于是 Gauss 方程实质上只包含下述一个方程：

$$R_{1212} = b_{11}b_{22} - (b_{12})^2$$

再来看 Codazzi 方程

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} = \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta b_{\eta\beta} - \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\eta b_{\eta\gamma}$$

交换  $\beta, \gamma$  两边同时差一个负号，同样只能取  $\beta = 1, \gamma = 2$ ，即

$$\frac{\partial b_{\alpha 1}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{\alpha 2}}{\partial u^1} = \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha 2}^\eta b_{\eta 1} - \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\alpha 1}^\eta b_{\eta 2}, \quad \alpha = 1, 2$$

Codazzi 方程实质上只包含两个方程。

最后不难发现，在推导 Gauss-Codazzi 方程的过程中，所有步骤都是可逆的。也就是说，假定曲面存在，也就是二元函数  $\vec{r}(u, v)$  存在且二阶以上连续可微时，Gauss-Codazzi 方程等价于

$$\frac{\partial^2 \vec{r}_\alpha}{\partial u^\beta \partial u^\gamma} = \frac{\partial^2 \vec{r}_\alpha}{\partial u^\gamma \partial u^\beta}, \quad \frac{\partial^2 \vec{n}}{\partial u^\beta \partial u^\gamma} = \frac{\partial^2 \vec{n}}{\partial u^\gamma \partial u^\beta}$$

## 4.3.3 解存在的充分性和解的唯一性

现在我们进入最困难的部分, 说明 Gauss-Codazzi 方程实际上也是有解的充分条件。更精确地说, 就是对于一阶线性偏微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial u^\beta} = \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{r}_\gamma + b_{\alpha\beta} \vec{n} \\ \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^\beta} = - \sum_{\gamma=1}^2 b_\beta^\gamma \vec{r}_\gamma \end{cases} \quad (4.15)$$

假定相容性条件, 也就是 Gauss-Codazzi 方程成立, 那么给定某点  $(u_0^1, u_0^2)$  处的初始值  $\{\vec{r}_1^0, \vec{r}_2^0, \vec{n}^0\}$ , 则可以找到函数  $\vec{r}(u, v)$  满足方程(4.15), 且在点  $(u_0^1, u_0^2)$  处的值为给定的值。

我们来构造偏微分方程组 (4.15) 的解, 基本思路依然是将偏微分方程转化为常微分方程。为了表述清晰, 我们这里将变量  $u^1$  记为  $t$ ,  $u^2$  记为  $s$ 。从  $(u_0^1, u_0^2)$  点出发, 先沿坐标直线  $s = u_0^2$ , 考虑关于  $t$  的常微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}_\alpha(t, u_0^2)}{\partial t} = \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 1}^\gamma \vec{r}_\gamma(t, u_0^2) + b_{\alpha 1} \vec{n}(t, u_0^2) \\ \frac{\partial \vec{n}(t, u_0^2)}{\partial t} = - \sum_{\gamma=1}^2 b_1^\gamma \vec{r}_\gamma(t, u_0^2) \end{cases} \quad (4.16)$$

关于初值  $\{\vec{r}_1^0, \vec{r}_2^0, \vec{n}^0\}$ , 在坐标直线  $s = u_0^2$  上有唯一解  $\{\vec{r}_1(t, u_0^2), \vec{r}_2(t, u_0^2), \vec{n}(t, u_0^2)\}$ 。再在坐标直线族  $t = u^1$  上, 考虑关于  $s$  的一系列常微分方程组 (以  $u^1$  作为参数):

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}_\alpha(u^1, s)}{\partial s} = \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 2}^\gamma \vec{r}_\gamma(u^1, s) + b_{\alpha 2} \vec{n}(u^1, s) \\ \frac{\partial \vec{n}(u^1, s)}{\partial s} = - \sum_{\gamma=1}^2 b_2^\gamma \vec{r}_\gamma(u^1, s) \end{cases} \quad (4.17)$$

关于初值  $\{\vec{r}_1(u^1, u_0^2), \vec{r}_2(u^1, u_0^2), \vec{n}(u^1, u_0^2)\}$ , 在坐标直线上  $t = u^1$  上有唯一解  $\{\vec{r}_1(u^1, s), \vec{r}_2(u^1, s), \vec{n}(u^1, s)\}$ 。

我们断言  $\{\vec{r}_1(t, s), \vec{r}_2(t, s), \vec{n}(t, s)\}$  就是原偏微分方程组(4.15)的解。在任意一点  $(u^1, u^2)$  验证, 根据 (4.17) 式, 对  $s$  (也就是  $u^2$ ) 求偏导自然满足偏微分方程组 (4.7)。难点在于说明  $s \neq u_0^2$  点关于  $t$  (也就是  $u^1$ ) 的偏导也满足方程 (坐标直线  $s = u_0^2$  上显然满足)。我们分步来完成这一证明。

首先, 根据常微分方程解对参数和初值的连续可微性 (参见<sup>[12]</sup>), 因为方程(4.17)的初值  $\{\vec{r}_1(u^1, u_0^2), \vec{r}_2(u^1, u_0^2), \vec{n}(u^1, u_0^2)\}$  是方程(4.16)的解, 自然初值关于  $u^1$  连续可微; 方程(4.17)的系数  $\Gamma_{\alpha 2}^\gamma, b_{\alpha 2}, b_2^\gamma$  关于  $u^1$  也连续可微, 于是方程(4.17)的解  $\vec{r}_1(u^1, s), \vec{r}_2(u^1, s), \vec{n}(u^1, s)$  关于参数  $u^1$  连续可微。这样,  $\vec{r}_\alpha(u^1, u^2), \vec{n}(u^1, u^2)$  关于  $u^1, u^2$  均连续可微。同时, 再回到方程(4.17), 右端关于  $u^1$  连续可微, 这意味着左端也关于  $u^1$  连续可微, 即  $\frac{\partial^2 \vec{r}_\alpha(u^1, u^2)}{\partial u^1 \partial u^2}$  和  $\frac{\partial^2 \vec{n}(u^1, u^2)}{\partial u^1 \partial u^2}$  存在且连续, 根据 Clairaut 定理,  $\frac{\partial^2 \vec{r}_\alpha(u^1, u^2)}{\partial u^2 \partial u^1}, \frac{\partial^2 \vec{n}(u^1, u^2)}{\partial u^2 \partial u^1}$  也存在且连续, 并且值和  $\frac{\partial^2 \vec{r}_\alpha(u^1, u^2)}{\partial u^1 \partial u^2}, \frac{\partial^2 \vec{n}(u^1, u^2)}{\partial u^1 \partial u^2}$  分别相等<sup>1</sup>; 即求导次序可交换。

其次, 由于  $u^1, u^2$  两个方向求偏导的性质差异非常大, 为了表述清晰,  $u^2$  保持不变,  $u^1$  我们用  $t$  来代换。记

$$\vec{f}_\alpha(t, u^2) = \frac{\partial \vec{r}_\alpha(t, u^2)}{\partial t} - \left( \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 1}^\gamma \vec{r}_\gamma(t, u^2) + b_{\alpha 1} \vec{n}(t, u^2) \right)$$

$$\vec{f}(t, u^2) = \frac{\partial \vec{n}(t, u^2)}{\partial t} + \sum_{\gamma=1}^2 b_1^\gamma \vec{r}_\gamma(t, u^2)$$

根据我们的构造, 显然有对任意的  $t, \vec{f}_\alpha(t, u^2)|_{u^2=u_0^2} \equiv \vec{0}, \vec{f}(t, u^2)|_{u^2=u_0^2} \equiv \vec{0}$ 。我们希望说明全平面上都有  $\vec{f}_\alpha(t, u^2) \equiv \vec{f}(t, u^2) \equiv \vec{0}$ 。

为此, 首先考虑

$$\frac{\partial \vec{f}_\alpha(t, u^2)}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \vec{r}_\alpha(t, u^2)}{\partial u^2 \partial t} - \frac{\partial}{\partial u^2} \left( \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 1}^\gamma \vec{r}_\gamma(t, u^2) + b_{\alpha 1} \vec{n}(t, u^2) \right)$$

之前已经证明了求导次序可交换,

$$\frac{\partial^2 \vec{r}_\alpha(t, u^2)}{\partial u^2 \partial t} = \frac{\partial^2 \vec{r}_\alpha(t, u^2)}{\partial t \partial u^2}, \frac{\partial^2 \vec{n}(t, u^2)}{\partial u^2 \partial t} = \frac{\partial^2 \vec{n}(t, u^2)}{\partial t \partial u^2}$$

接下来, 自然想到来比较

$$\frac{\partial}{\partial u^2} \left( \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 1}^\gamma \vec{r}_\gamma(t, u^2) + b_{\alpha 1} \vec{n}(t, u^2) \right)$$

和

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 2}^\gamma \vec{r}_\gamma(t, u^2) + b_{\alpha 2} \vec{n}(t, u^2) \right)$$

<sup>1</sup>通常数学分析中求偏导可交换次序的条件是  $f_{xy}$  和  $f_{yx}$  都存在且连续; 实际上这一条件可以减弱, 只需其中一个存在且连续即可。具体可以参考 <https://unapologetic.wordpress.com/2009/10/15/clairauts-theorem/>

的值<sup>1</sup>。具体来计算

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial u^2} \left( \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 1}^{\gamma} \vec{r}_{\gamma}(t, u^2) + b_{\alpha 1} \vec{n}(t, u^2) \right) \\
&= \sum_{\gamma=1}^2 \left( \frac{\partial \Gamma_{\alpha 1}^{\gamma}}{\partial u^2} \vec{r}_{\gamma}(t, u^2) + \Gamma_{\alpha 1}^{\gamma} \frac{\partial \vec{r}_{\gamma}(t, u^2)}{\partial u^2} \right) + \frac{\partial b_{\alpha 1}}{\partial u^2} \vec{n}(t, u^2) + b_{\alpha 1} \frac{\partial \vec{n}(t, u^2)}{\partial u^2} \\
&= \sum_{\gamma=1}^2 \left( \frac{\partial \Gamma_{\alpha 1}^{\gamma}}{\partial u^2} \vec{r}_{\gamma}(t, u^2) + \Gamma_{\alpha 1}^{\gamma} \left( \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\gamma 2}^{\eta} \vec{r}_{\eta}(t, u^2) + b_{\gamma 2} \vec{n}(t, u^2) \right) \right) + \frac{\partial b_{\alpha 1}}{\partial u^2} \vec{n}(t, u^2) - b_{\alpha 1} \sum_{\eta=1}^2 b_2^{\eta} \vec{r}_{\eta}(t, u^2) \\
&= \sum_{\eta=1}^2 \frac{\partial \Gamma_{\alpha 1}^{\eta}}{\partial u^2} \vec{r}_{\eta}(t, u^2) + \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 1}^{\gamma} \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\gamma 2}^{\eta} \vec{r}_{\eta}(t, u^2) - b_{\alpha 1} \sum_{\eta=1}^2 b_2^{\eta} \vec{r}_{\eta}(t, u^2) + \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 1}^{\gamma} b_{\gamma 2} \vec{n}(t, u^2) + \frac{\partial b_{\alpha 1}}{\partial u^2} \vec{n}(t, u^2) \\
&= \sum_{\eta=1}^2 \left( \frac{\partial \Gamma_{\alpha 1}^{\eta}}{\partial u^2} + \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 1}^{\gamma} \Gamma_{\gamma 2}^{\eta} - b_{\alpha 1} b_2^{\eta} \right) \vec{r}_{\eta}(t, u^2) + \left( \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 1}^{\gamma} b_{\gamma 2} + \frac{\partial b_{\alpha 1}}{\partial u^2} \right) \vec{n}(t, u^2)
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 2}^{\gamma} \vec{r}_{\gamma}(t, u^2) + b_{\alpha 2} \vec{n}(t, u^2) \right) \\
&= \sum_{\gamma=1}^2 \left( \frac{\partial \Gamma_{\alpha 2}^{\gamma}}{\partial u^1} \vec{r}_{\gamma}(t, u^2) + \Gamma_{\alpha 2}^{\gamma} \frac{\partial \vec{r}_{\gamma}(t, u^2)}{\partial t} \right) + \frac{\partial b_{\alpha 2}}{\partial u^1} \vec{n}(t, u^2) + b_{\alpha 2} \frac{\partial \vec{n}(t, u^2)}{\partial t}
\end{aligned}$$

与上一个式子不同，这里的  $\frac{\partial \vec{r}_{\gamma}(t, u^2)}{\partial t}$  和  $\frac{\partial \vec{n}(t, u^2)}{\partial t}$ ，目前并不确定是否满足运动方程（这恰

---

<sup>1</sup>这是因为倘若两者能够相等，则能导出  $\frac{\partial \vec{f}_{\alpha}(t, u^2)}{\partial u^2} = 0$ ，进而  $\vec{f}_{\alpha}(t, u^2)$  恒为零。虽然事实上这一思路行不通。

恰是我们证明的)。所以退而求其次，选择用  $\vec{f}_\alpha(t, u^2), \vec{f}(t, u^2)$  来替换，上式改写为

$$\begin{aligned}
& \sum_{\gamma=1}^2 \left( \frac{\partial \Gamma_{\alpha 2}^\gamma}{\partial u^1} \vec{r}_\gamma(t, u^2) + \Gamma_{\alpha 2}^\gamma (\vec{f}_\gamma(t, u^2) + \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\gamma 1}^\eta \vec{r}_\eta(t, u^2) + b_{\gamma 1} \vec{n}(t, u^2)) \right) \\
& + \frac{\partial b_{\alpha 2}}{\partial u^1} \vec{n}(t, u^2) + b_{\alpha 2} (\vec{f}(t, u^2) - \sum_{\gamma=1}^2 b_1^\gamma \vec{r}_\gamma(t, u^2)) \\
& = \sum_{\eta=1}^2 \frac{\partial \Gamma_{\alpha 2}^\eta}{\partial u^1} \vec{r}_\eta(t, u^2) + \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 2}^\gamma \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{\gamma 1}^\eta \vec{r}_\eta(t, u^2) - b_{\alpha 2} \sum_{\eta=1}^2 b_1^\eta \vec{r}_\eta(t, u^2) + \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 2}^\gamma b_{\gamma 1} \vec{n}(t, u^2) + \frac{\partial b_{\alpha 2}}{\partial u^1} \vec{n}(t, u^2) \\
& + \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 2}^\gamma \vec{f}_\gamma(t, u^2) + b_{\alpha 2} \vec{f}(t, u^2) \\
& = \sum_{\eta=1}^2 \left( \frac{\partial \Gamma_{\alpha 2}^\eta}{\partial u^1} + \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 2}^\gamma \Gamma_{\gamma 1}^\eta - b_{\alpha 2} b_1^\eta \right) \vec{r}_\eta(t, u^2) + \left( \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 2}^\gamma b_{\gamma 1} + \frac{\partial b_{\alpha 2}}{\partial u^1} \right) \vec{n}(t, u^2) \\
& + \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 2}^\gamma \vec{f}_\gamma(t, u^2) + b_{\alpha 2} \vec{f}(t, u^2)
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{f}_\alpha(t, u^2)}{\partial u^2} &= \frac{\partial^2 \vec{r}_\alpha(t, u^2)}{\partial u^2 \partial t} - \frac{\partial}{\partial u^2} \left( \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 1}^\gamma \vec{r}_\gamma(t, u^2) + b_{\alpha 1} \vec{n}(t, u^2) \right) \\
&= \frac{\partial^2 \vec{r}_\alpha(t, u^2)}{\partial t \partial u^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 2}^\gamma \vec{r}_\gamma(t, u^2) + b_{\alpha 2} \vec{n}(t, u^2) \right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 2}^\gamma \vec{r}_\gamma(t, u^2) + b_{\alpha 2} \vec{n}(t, u^2) \right) - \frac{\partial}{\partial u^2} \left( \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 1}^\gamma \vec{r}_\gamma(t, u^2) + b_{\alpha 1} \vec{n}(t, u^2) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{r}_\alpha(t, u^2)}{\partial u^2} - \left( \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 2}^\gamma \vec{r}_\gamma(t, u^2) + b_{\alpha 2} \vec{n}(t, u^2) \right) \right) \tag{4.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \sum_{\eta=1}^2 \left( \frac{\partial \Gamma_{\alpha 2}^\eta}{\partial u^1} + \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 2}^\gamma \Gamma_{\gamma 1}^\eta - b_{\alpha 2} b_1^\eta - \left( \frac{\partial \Gamma_{\alpha 1}^\eta}{\partial u^2} + \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 1}^\gamma \Gamma_{\gamma 2}^\eta - b_{\alpha 1} b_2^\eta \right) \right) \vec{r}_\eta(t, u^2) \tag{4.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \left( \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 2}^\gamma b_{\gamma 1} + \frac{\partial b_{\alpha 2}}{\partial u^1} - \left( \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 1}^\gamma b_{\gamma 2} + \frac{\partial b_{\alpha 1}}{\partial u^2} \right) \right) \vec{n}(t, u^2) \tag{4.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 2}^\gamma \vec{f}_\gamma(t, u^2) + b_{\alpha 2} \vec{f}(t, u^2)
\end{aligned}$$

接下来我们说明(4.18), (4.19), (4.20)三项都是零。(4.18)括号中的项为零, 对  $t$  求导后自然为零。(4.19)中  $\vec{r}_\eta$  前的系数为

$$\frac{\partial \Gamma_{\alpha 2}^\eta}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha 1}^\eta}{\partial u^2} + \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 2}^\gamma \Gamma_{\gamma 1}^\eta - \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 1}^\gamma \Gamma_{\gamma 2}^\eta - (b_{\alpha 2} b_1^\eta - b_{\alpha 1} b_2^\eta) = R_{\alpha 2 1}^\eta - (b_{\alpha 2} b_1^\eta - b_{\alpha 1} b_2^\eta)$$

由 Gauss 方程, 此项也为零。(4.20)中  $\vec{n}$  前的系数为

$$\frac{\partial b_{\alpha 2}}{\partial u^1} - \frac{\partial b_{\alpha 1}}{\partial u^2} - \left( - \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 2}^\gamma b_{\gamma 1} + \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 1}^\gamma b_{\gamma 2} \right)$$

由 Codazzi 方程, 此项也为零。最终, 我们得到

$$\frac{\partial \vec{f}_\alpha(t, u^2)}{\partial u^2} = \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 2}^\gamma \vec{f}_\gamma(t, u^2) + b_{\alpha 2} \vec{f}(t, u^2)$$

类似地, 可以得到

$$\frac{\partial \vec{f}(t, u^2)}{\partial u^2} = - \sum_{\gamma=1}^2 b_2^\gamma \vec{r}_\gamma(t, u^2)$$

感兴趣的同学可以自己去验算, 我们这里不再赘述。此时, 将  $t$  视为参数, 关于  $u^2$  常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{f}_\alpha(t, u^2)}{\partial u^2} = \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 2}^\gamma \vec{f}_\gamma(t, u^2) + b_{\alpha 2} \vec{f}(t, u^2) \\ \frac{\partial \vec{f}(t, u^2)}{\partial u^2} = - \sum_{\gamma=1}^2 b_2^\gamma \vec{r}_\gamma(t, u^2) \end{cases}$$

有初值  $\vec{f}_\alpha(t, u^2)|_{u^2=u_0^2} \equiv \vec{0}$ ,  $\vec{f}(t, u^2)|_{u^2=u_0^2} \equiv \vec{0}$ 。显然此时  $\vec{f}_\alpha(t, u^2) \equiv \vec{f}(t, u^2) \equiv \vec{0}$  是常微分方程组的解。根据常微分方程组解的唯一性, 给定初值后, 它的解存在且唯一, 故必有  $\vec{f}_\alpha(t, u^2) \equiv \vec{f}(t, u^2) \equiv \vec{0}$ 。从而断言得证。这也说明了我们构造出的函数  $\vec{r}_\alpha(t, s)$  确实是偏微分方程(4.15)的解, 解的存在性得证。

这里的逻辑关系大家一定要清晰: 关于  $\vec{r}_\alpha$  求导次序可交换并非是由 Gauss-Codazzi 方程导出的, 而是由常微分方程理论和 Clairaut 定理直接导出的; Gauss-Codazzi 方程的用处是确认这样的函数确实是原方程的解。

如果理解上述证明比较困难的同学, 可以返回去参阅2.2.2小节中曲线上标架场的正交性的证明。两者的过程非常相似: 曲线的标架场中, 矩阵  $A(s)$  和  $P(s)$  不一定交换; 自然标架运动方程解的存在性中,  $\frac{\partial}{\partial u^2}(\sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 1}^\gamma \vec{r}_\gamma(t, u^2) + b_{\alpha 1} \vec{n}(t, u^2))$  和  $\frac{\partial}{\partial t}(\sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha 2}^\gamma \vec{r}_\gamma(t, u^2) + b_{\alpha 2} \vec{n}(t, u^2))$  不一定相等, 都需要转换到常微分方程解的唯一性上来。

线性偏微分方程组 (4.7) 在初值给定情况下解的唯一性, 也可以转化为常微分方程组来解决。其思想和解的存在性证明类似: 如果偏微分方程组有两个满足初值的不同的解, 限制在坐标直线上, 就与常微分方程组的解的唯一相矛盾。我们这里就不展开叙述了。必须要强调的是, 偏微分方程组解的唯一性可以不依赖于解的存在性来使用, 即如果偏微分方程组有解的话, 它的解是唯一的。我们后续会经常遇到这样的情况。

#### 4.4 曲面的存在唯一性定理

现在, 在相容性条件下, 给定初值后, 我们得到向量函数  $\{\vec{r}_1(u^1, u^2), \vec{r}_2(u^1, u^2), \vec{n}(u^1, u^2)\}$  的存在唯一性。我们实际需要的是正则曲面的参数方程  $\vec{r}(u^1, u^2)$ 。这需要继续来求解如下偏微分方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} = \vec{r}_1 \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} = \vec{r}_2 \end{cases} \quad (4.21)$$

注意到运动公式中的 Gauss 公式

$$\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial u^\beta} = \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{r}_\gamma + b_{\alpha\beta} \vec{n}$$

中  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  和  $b_{\alpha\beta}$  都关于  $\alpha, \beta$  对称, 意味着 (4.21) 满足相容性条件, 即

$$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u^2} = \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial u^1}$$

于是, 给定一点  $(u_0^1, u_0^2)$  处的向量函数值  $\vec{r}^0$ , 以及  $(\{\vec{r}_1^0, \vec{r}_2^0, \vec{n}^0\})$ , 存在  $\vec{r}(u^1, u^2)$  满足全部的运动公式。进一步, 不难说明给定初值后解是唯一的。

但这不足以说明几何上的正则参数曲面存在, 因为我们目前还不确定参数方程  $\vec{r}(u^1, u^2)$  是否正则。或者更精确地说, 单纯从偏微分方程求解的过程来看, 得到  $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n}\}$  只是 3 个普通的向量函数, 并不能保证一定能成为自然标架, 即:  $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$  线性无关,  $\vec{n}$  为单位向量, 和前两个向量垂直。

#### 4.4.1 曲面的存在性

根据之前的讨论,  $D \subset E^2$  是  $E^2$  中的一个单连通区域, 给定  $D$  上的两个足够光滑的二次微分形式,

$$\phi = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta, \quad \psi = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$$

其中  $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ ,  $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$ , 且矩阵  $(g_{\alpha\beta})$  正定。如果这两个微分形式满足 Gauss-Codazzi 方程, 则在一点  $(u_0^1, u_0^2)$  给定任意的初值  $\vec{r}^0$ , 以及与第一类基本量  $g_{\alpha\beta}(u_0^1, u_0^2)$  相符的  $\{\vec{r}_1^0, \vec{r}_2^0, \vec{n}^0\}$ , 则可得到运动方程 (4.7) 的唯一解。为了使得方程组的解能成为曲面的自然标架, 且曲面以给定的正定二次微分形式  $\phi$  为第一基本形式, 首先须取初值

$$\begin{cases} \vec{r}_1(u_0^1, u_0^2) = \vec{r}_1^0 \\ \vec{r}_2(u_0^1, u_0^2) = \vec{r}_2^0 \\ \vec{n}(u_0^1, u_0^2) = \vec{n}^0 \end{cases}$$

使得

$$\begin{aligned} \vec{r}_\alpha^0 \cdot \vec{r}_\beta^0 &= g_{\alpha\beta}(u_0^1, u_0^2) \\ \vec{r}_\alpha^0 \cdot \vec{n}^0 &= 0 \\ \vec{n}^0 \cdot \vec{n}^0 &= 1 \end{aligned}$$

接下来, 我们需要说明上述初值下方程组的解  $\{\vec{r}_1(u^1, u^2), \vec{r}_2(u^1, u^2), \vec{n}(u^1, u^2)\}$ , 在  $D$  上的任意一点, 都满足

$$\begin{aligned}\vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\beta &= g_{\alpha\beta}(u^1, u^2) \\ \vec{r}_\alpha \cdot \vec{n} &= 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{n} &= 1\end{aligned}$$

证明的思路和曲线论中证明常微分方程组的解为单位正交标架场类似。注意到我们在曲线论中, 通过对矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1(s) \\ \mathbf{e}_2(s) \\ \mathbf{e}_3(s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1(s) & \mathbf{e}_2(s) & \mathbf{e}_3(s) \end{pmatrix} = QQ^T = P$$

求导, 根据相应的常微分方程解的唯一性来证明标架场是单位正交。理论上, 我们可以照搬这一处理方法, 考虑矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_1 & \vec{r}_2 & \vec{n} \end{pmatrix}$$

同时, 自然标架的运动方程也可以改写为矩阵形式:

$$\frac{\partial}{\partial u} \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 & b_{11} \\ \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{21}^2 & b_{21} \\ -b_1^1 & -b_1^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{n} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial}{\partial v} \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & b_{12} \\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 & b_{22} \\ -b_2^1 & -b_2^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{n} \end{pmatrix}$$

不妨记

$$A_1 = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 & b_{11} \\ \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{21}^2 & b_{21} \\ -b_1^1 & -b_1^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & b_{12} \\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 & b_{22} \\ -b_2^1 & -b_2^2 & 0 \end{pmatrix}$$

此时, 对  $P$  分别关于  $u, v$  求偏导, 有

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial u} = A_1 P + P A_1^T \\ \frac{\partial P}{\partial v} = A_2 P + P A_2^T \end{cases}$$

这是一个线性的偏微分方程组（矩阵值），在给定一点初值的条件下，如果有解，则解唯一。所以接下来，需要将

$$P = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

代入验证等式是否成立，如果成立的话，根据解的唯一性，这就是唯一的解，即  $P$  必然为度量矩阵。

虽然验证本身难度不大，但过程书写十分麻烦。我们换一个角度来看这个问题。虽然写成矩阵形式的偏微分方程看起来非常简洁，但实际上因为有  $3 \times 3$  个元素，即便使用分块矩阵，或是对称性来化简，书写仍然是非常繁琐的。注意到我们现在有张量这一新的工具，完全可以替代矩阵，进行更复杂的运算。具体来看，构造张量形式的函数（有下标）：

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta}(u^1, u^2) &= \vec{r}_\alpha(u^1, u^2) \cdot \vec{r}_\beta(u^1, u^2) - g_{\alpha\beta}(u^1, u^2) \\ f_\alpha(u^1, u^2) &= \vec{r}_\alpha(u^1, u^2) \cdot \vec{n}(u^1, u^2) \\ f(u^1, u^2) &= \vec{n}(u^1, u^2) \cdot \vec{n}(u^1, u^2) - 1 \end{aligned}$$

根据构造过程，这组函数满足初值

$$f_{\alpha\beta}(u_0^1, u_0^2) = f_\alpha(u_0^1, u_0^2) = f(u_0^1, u_0^2) = 0$$

先对  $f_{\alpha\beta}(u^1, u^2)$  求偏导，有

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} &= \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial u^\gamma} \cdot \vec{r}_\beta + \vec{r}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\beta}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} \\ &= \left( \sum_{\delta=1}^2 \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta \vec{r}_\delta + b_{\alpha\gamma} \vec{n} \right) \cdot \vec{r}_\beta + \left( \sum_{\delta=1}^2 \Gamma_{\beta\gamma}^\delta \vec{r}_\delta + b_{\beta\gamma} \vec{n} \right) \cdot \vec{r}_\alpha - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} \\ &= \sum_{\delta=1}^2 \left( \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta (\vec{r}_\delta \cdot \vec{r}_\beta) + \Gamma_{\beta\gamma}^\delta (\vec{r}_\delta \cdot \vec{r}_\alpha) \right) - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} + b_{\alpha\gamma} (\vec{n} \cdot \vec{r}_\beta) + b_{\beta\gamma} (\vec{n} \cdot \vec{r}_\alpha) \\ &= \sum_{\delta=1}^2 \left( \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta (f_{\delta\beta} + g_{\delta\beta}) + \Gamma_{\beta\gamma}^\delta (f_{\delta\alpha} + g_{\delta\alpha}) \right) - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} + b_{\alpha\gamma} f_\beta + b_{\beta\gamma} f_\alpha \\ &= \sum_{\delta=1}^2 \left( \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta f_{\delta\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\delta f_{\delta\alpha} \right) + \sum_{\delta=1}^2 \left( \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta g_{\delta\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\delta g_{\delta\alpha} \right) - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} + b_{\alpha\gamma} f_\beta + b_{\beta\gamma} f_\alpha \\ &= \sum_{\delta=1}^2 \left( \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta f_{\delta\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\delta f_{\delta\alpha} \right) + \Gamma_{\beta\alpha\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} + b_{\alpha\gamma} f_\beta + b_{\beta\gamma} f_\alpha \end{aligned}$$

注意到

$$\Gamma_{\beta\alpha\gamma} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} \right), \quad \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha} \right)$$

有

$$\frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} = \sum_{\delta=1}^2 (\Gamma_{\alpha\gamma}^\delta f_{\delta\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\delta f_{\delta\alpha}) + b_{\alpha\gamma} f_\beta + b_{\beta\gamma} f_\alpha$$

这不是一个自洽的方程组，我们必须同时考虑  $f_\alpha(u^1, u^2)$  的偏导数。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial u^\gamma} &= \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial u^\gamma} \cdot \vec{n} + \vec{r}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^\gamma} \\ &= \left( \sum_{\delta=1}^2 \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta \vec{r}_\delta + b_{\alpha\gamma} \vec{n} \right) \cdot \vec{n} - \sum_{\delta=1}^2 b_\gamma^\delta \vec{r}_\delta \cdot \vec{r}_\alpha \\ &= \sum_{\delta=1}^2 \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta f_\delta + b_{\alpha\gamma} (f + 1) - \sum_{\delta=1}^2 b_\gamma^\delta (f_{\delta\alpha} + g_{\delta\alpha}) \\ &= - \sum_{\delta=1}^2 b_\gamma^\delta f_{\delta\alpha} + \sum_{\delta=1}^2 \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta f_\delta + b_{\alpha\gamma} f \end{aligned}$$

再对  $f(u^1, u^2)$  求偏导，有

$$\frac{\partial f}{\partial u^\gamma} = -2 \sum_{\delta=1}^2 b_\gamma^\delta f_\delta$$

最终得到一阶线性偏微分方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} = \sum_{\delta=1}^2 (\Gamma_{\alpha\gamma}^\delta f_{\delta\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\delta f_{\delta\alpha}) + b_{\alpha\gamma} f_\beta + b_{\beta\gamma} f_\alpha \\ \frac{\partial f_\alpha}{\partial u^\gamma} = - \sum_{\delta=1}^2 b_\gamma^\delta f_{\delta\alpha} + \sum_{\delta=1}^2 \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta f_\delta + b_{\alpha\gamma} f \\ \frac{\partial f}{\partial u^\gamma} = -2 \sum_{\delta=1}^2 b_\gamma^\delta f_\delta \end{cases} \quad (4.22)$$

根据线性偏微分方程理论，给定初值后，如果它的解存在，则它的解必然唯一。但很容易看出， $f_{\alpha\beta}(u^1, u^2) \equiv f_\alpha(u^1, u^2) = f(u^1, u^2) \equiv 0$  已经是方程组的解。根据唯一性， $f_{\alpha\beta}(u^1, u^2)$ ， $f_\alpha(u^1, u^2)$ ， $f(u^1, u^2)$  必恒为零。从而  $\{\vec{r}_1(u^1, u^2), \vec{r}_2(u^1, u^2), \vec{n}(u^1, u^2)\}$  构成曲面的自然标架，且正则参数曲面以  $\phi$  为第一基本形式。

其实很容易看出，采用矩阵来书写，和采用张量来书写，没有实质的区别。但是这里用张量记号可以大大简化我们书写和验证的过程。

曲面以  $\psi$  为第二基本形式可以直接由运动方程 (4.7) 中的 Gauss 方程看出。

一般而言, 我们还会要求自然标架  $(\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n}\})$  构成一个右手系, 也就是曲面可定向。可以说明, 若初值  $(\{\vec{r}_1^0, \vec{r}_2^0, \vec{n}^0\})$  为右手系, 则整个曲面上的自然标架都为右手系。具体来看,

$$\begin{aligned} (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n})^2 &= \det \left( \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_1 & \vec{r}_2 & \vec{n} \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det(g_{\alpha\beta}) > 0 \end{aligned}$$

故  $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n}) \neq 0$ , 再由连续性,  $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n}) > 0$ , 自然是一个右手标架场。

#### 4.4.2 曲面的唯一性

已经知道, 在相容性条件的保障下, 给定  $(u_0^1, u_0^2)$  处的向量  $\vec{r}^0$ , 以及该点处的自然标架  $\{\vec{r}_1^0, \vec{r}_2^0, \vec{n}^0\}$ , 存在唯一的参数曲面  $\vec{r}(u^1, u^2)$ 。第一和第二基本形式不变,  $(u_0^1, u_0^2)$  处给定的向量变为  $\tilde{r}^0$ , 自然标架变为  $\{\tilde{r}_1^0, \tilde{r}_2^0, \tilde{n}^0\}$ , 可得到另外一个参数曲面  $\tilde{r}(u^1, u^2)$ 。此时, 注意到

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_1^0 \\ \vec{r}_2^0 \\ \vec{n}^0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_1^0 & \vec{r}_2^0 & \vec{n}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}(u_0^1, u_0^2) & g_{12}(u_0^1, u_0^2) & 0 \\ g_{21}(u_0^1, u_0^2) & g_{22}(u_0^1, u_0^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{r}_1^0 \\ \tilde{r}_2^0 \\ \tilde{n}^0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{r}_1^0 & \tilde{r}_2^0 & \tilde{n}^0 \end{pmatrix}$$

这说明自然标架  $\{\vec{r}_1^0, \vec{r}_2^0, \vec{n}^0\}$  和  $\{\tilde{r}_1^0, \tilde{r}_2^0, \tilde{n}^0\}$  只差一个旋转。根据偏微分方程解的唯一性, 曲面  $\vec{r}(u^1, u^2)$  和  $\tilde{r}(u^1, u^2)$  之间也差由这个旋转和某个平移所组成的刚体运动。于是

**定理 4.2.** 若在每一点  $(u^1, u^2)$ , 曲面  $S_1$  和  $S_2$  都有相同的第一基本形式和第二基本形式, 则曲面  $S_1$  和  $S_2$  在空间  $E^3$  的一个刚体运动下是彼此重合的。

这里证明曲面的唯一性是通过将运动方程视为一个一阶线性偏微分方程, 直接根据线性偏微分方程组的理论得到的。我们也可以使用能量方法, 感兴趣的同学可以参考附录 E。

最终可以得到曲面的存在唯一性定理

**定理 4.3.** 设  $D \subset E^2$  是  $E^2$  中的一个单连通区域, 设

$$\phi = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta, \quad \psi = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$$

是定义在  $D$  内的两个二次微分形式, 分别具有两次以上和一次以上的连续偏导数, 其中  $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ ,  $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$ , 且矩阵  $(g_{\alpha\beta})$  正定。如果这两个微分形式满足 Gauss-Codazzi 方程

$$\begin{cases} R_{1212} = b_{11}b_{22} - (b_{12})^2 \\ \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} = \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{12}^{\eta} b_{\eta 1} - \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{11}^{\eta} b_{\eta 2} \\ \frac{\partial b_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} = \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{22}^{\eta} b_{\eta 1} - \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{21}^{\eta} b_{\eta 2} \end{cases}$$

则在  $D$  内任一点附近有一个邻域  $U$ , 以及定义在  $U$  上的正则参数曲面  $S: \vec{r}(u^1, u^2)$ , 使得它的第一和第二基本形式分别为  $\phi|_U$  和  $\psi|_U$ , 此外, 若有其他满足条件的曲面, 则相差  $E^3$  中的一个刚体运动。

### 4.4.3 曲面自然标架运动方程的初步应用

我们之前证明过:

**定理.** 一块正则曲面是球面的一部分, 当且仅当在曲面上每一点处, 曲面的第二基本形式都是第一基本形式的非零倍数 (该倍数可以点点不同)。

现在我们有了更有力的研究曲面的工具——方程。列出自然标架的运动方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial u^{\beta}} = \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \vec{r}_{\gamma} + b_{\alpha\beta} \vec{n} \\ \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^{\beta}} = - \sum_{\gamma=1}^2 b_{\beta}^{\gamma} \vec{r}_{\gamma} \end{cases}$$

注意到条件,  $\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G} = c(u, v)$ 。这告诉了我们什么?

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = c(u, v) \text{Id}$$

从更直观的角度来看, Weingarten 映射点点都是数量映射。于是

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial u^{\beta}} = \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \vec{r}_{\gamma} + b_{\alpha\beta} \vec{n} \\ \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^{\beta}} = -c(u_1, u_2) \vec{r}_{\beta} \end{cases}$$

依然非常难求解。**怎么办?** 实际上,在具体求解曲面上自然标架的运动方程前,我们一定要先验证**相容性条件**——Gauss-Codazzi 方程。由于 Christoffel 记号比较复杂,此时的 Gauss-Codazzi 方程

$$\begin{cases} R_{1212} = b_{11}b_{22} - (b_{12})^2 \\ \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} = \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{12}^{\eta} b_{\eta 1} - \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{11}^{\eta} b_{\eta 2} \\ \frac{\partial b_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} = \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{22}^{\eta} b_{\eta 1} - \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{21}^{\eta} b_{\eta 2} \end{cases}$$

也比较复杂。但是注意到运动方程中的最后两个关于  $\vec{n}$  的方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^1} = -c(u, v)\vec{r}_1 \\ \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^2} = -c(u, v)\vec{r}_2 \end{cases}$$

重复推导 Codazzi 方程的过程,根据  $\frac{\partial^2 \vec{n}}{\partial u^2 \partial u^1} = \frac{\partial^2 \vec{n}}{\partial u^1 \partial u^2}$  有

$$\frac{\partial c}{\partial u^2} \vec{r}_1 + c \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u^2} = \frac{\partial c}{\partial u^1} \vec{r}_2 + c \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial u^1}$$

但是  $\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u^2} = \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial u^1} = \vec{r}_{12} = \vec{r}_{21}$ , 故

$$\frac{\partial c}{\partial u^2} = \frac{\partial c}{\partial u^1} = 0$$

换言之,  $c(u, v)$  为常数是 Codazzi 方程的必然结果。

此时,运动方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial u^\beta} = \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \vec{r}_\gamma + b_{\alpha\beta} \vec{n} \\ \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^1} = -c\vec{r}_1 \\ \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^2} = -c\vec{r}_2 \end{cases}$$

中的后两式可以改写为

$$\begin{cases} \frac{\partial(\vec{n} + c\vec{r})}{\partial u^1} = 0 \\ \frac{\partial(\vec{n} + c\vec{r})}{\partial u^2} = 0 \end{cases}$$

从而  $\vec{n} + c\vec{r} = \vec{p}$ , 进而  $|\vec{r} - \frac{\vec{p}}{c}| = \frac{1}{|c|}$ , 得证。

从上述例子可以看出,所有涉及到曲面的问题,理论上都可以用运动方程和 Gauss-Codazzi 方程解决。

## 4.5 内蕴几何初探

### 4.5.1 换个角度看 Gauss-Codazzi 方程

我们来对比一下曲线论和曲面论基本定理：

- 任意给定弧长，曲率，挠率，存在唯一的曲线；
- 给定第一和第二基本形式，必须满足相容性条件 Gauss-Codazzi 方程，才存在唯一的曲面。

最大的区别在于曲线的存在性是无条件的，曲面的存在性需要 Gauss-Codazzi 方程保障。换句话说，已经有一张曲面，它自然必须满足 Gauss-Codazzi 方程：

$$\begin{cases} R_{1212} = b_{11}b_{22} - (b_{12})^2 \\ \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} = \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{12}^{\eta} b_{\eta 1} - \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{11}^{\eta} b_{\eta 2} \\ \frac{\partial b_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} = \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{22}^{\eta} b_{\eta 1} - \sum_{\eta=1}^2 \Gamma_{21}^{\eta} b_{\eta 2} \end{cases}$$

Gauss-Codazzi 方程，对微分几何的发展有着深刻而至关重要的影响，甚至可以看作是这门课程的任督二脉。它的成立意味着曲面的第一和第二基本形式是有内在关联的<sup>1</sup>：在保持曲面第一基本形式不变的前提下，不能随意改变曲面的第二基本形式（对曲面进行弯曲变形）。换种不严格的说法，曲面在保持第一基本形式不变的前提下，第二基本形式的某一部分也不能改变。结合第二基本形式是描述曲面在  $E^3$  中的弯曲程度这一事实，也就是说曲面的部分弯曲性质是由第一基本形式决定的。

更进一步，仅仅只给定第一基本形式，仍然可以研究由第一基本形式所决定的内在弯曲性质。仅由第一基本形式决定的曲面的各种性质，称为曲面的内蕴几何。

- 顾名思义，内蕴几何和曲面怎样放置在  $E^3$  中（也就是曲面具体的参数方程无关），只与抽象的微分形式  $E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$  有关。
- 简而言之，因为第一和第二基本形式的关联性，我们把本应由第二基本形式描述的曲面的弯曲性质“人为”地拆解成两大类：一类只与第一基本形式有关，另一类与第一基本形式无关。

<sup>1</sup>当然，第一基本形式不能完全决定第二基本形式，反之，第二基本形式也不能完全决定第一基本形式

- 内蕴几何这一思想早在 Gauss 研究曲面性质时就已经产生。后来, Riemann 在 Gauss 的思想的基础上, 提出了任意维数流形的内蕴微分几何的观念, 并研究其弯曲程度, 这就是现在所称的 Riemann 几何学。由于 Einstein 在广义相对论中需要描述整个宇宙内在的弯曲 (整个宇宙显然不适合也不应该放到欧氏空间里来研究), 极大地刺激了 Riemann 几何学的发展。

## 4.5.2 Gauss 绝妙定理

我们自然想知道哪些性质是曲面的内蕴弯曲性质, 这些内蕴的量又如何被第一基本形式决定。回答这样的问题, 还是要以 Gauss-Codazzi 方程为出发点。其中最显著的观察是来看 Gauss 方程:

$$b_{11}b_{22} - (b_{12})^2 = R_{1212}$$

虽然我们已经知道等式左端只和第二基本形式有关, 右端只和第一基本形式有关, 但是几何含义并不是很明晰。注意到 Gauss 方程可以改写为

$$\frac{b_{11}b_{22} - (b_{12})^2}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}$$

注意到左端已经是曲面的 Gauss 曲率  $K$ , 从而得到

$$K = \kappa_1\kappa_2 = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}$$

且右端项只依赖于曲面的第一类基本量及其偏导数。也就是说, 虽然主曲率  $\kappa_1, \kappa_2$  是由曲面在  $E^3$  中的形状 (曲面的参数方程, 或者更准确地说 Weingarten 映射, 即通过曲面的第一基本形式和第二基本形式共同计算出来的) 决定的, 但是它们的乘积  $K = \kappa_1\kappa_2$  却只依赖曲面的第一基本形式, 与第二基本形式无关, 是一个内蕴几何量。这就是所谓的 Gauss 绝妙定理。

**定理 4.4.** 曲面的 Gauss 曲率只与曲面的第一基本形式有关。

这说明我们研究曲面弯曲程度的视角需要有一个非常大的转变:

- 原先的重点是: 曲面的参数方程, 以及相应的不变量;
- 之后的重点是: 曲面的第一基本形式, 以及和第一基本形式相关的内蕴几何, 特别是曲面的内蕴不变量 (比如 Gauss 曲率)。

在研究对象和目标都发生改变的时候，我们也需要更新研究曲面的方法。接下来在本书的第二部分，我们分别接深入探讨

- 曲面之间的映射；
- 曲面上的曲线。

并利用这些工具，来研究曲面的性质，特别是内蕴几何。

## 本章注记

曲面论基本定理这一部分的研究思路，与曲线的研究思路是一致的：都是将存在唯一性转化为标架场的存在唯一性，进而再转化为微分方程组进行研究。然而在这熟悉的套路下，其实隐藏了张量和偏微分方程两种崭新的工具，“旧瓶装新酒”，往往会导致初学时有一定的困难。

一般而言，在讲授微分几何这门课程时，学生是没有学习过偏微分方程（也叫做数学物理方程）这门课程的，同时，严格的张量的定义往往也要在研究生阶段才会接触到。所以，在遇到张量和偏微分方程的问题时，要习惯用熟悉的概念和方法来辅助我们理解。张量，可以看作“空间矩阵”；而偏微分方程，可以转化为常微分方程。

本章另一个要注意的要点是，在进行张量的运算和化简时，会遇到大量的求和运算。实际上，我们可以规定如果在一个单项式中，同一指标同时出现在上标，和下标的位置时，这一“单项式”表示的是关于这个指标在默认的范围內求和，而略去求和符号。这就是所谓的 Einstein 求和符号。使用 Einstein 求和符号除了可以简化表达式外，更重要的是按照约定来书写会大大减少出错的机率，同时这时的张量运算会看起来更像矩阵的运算。大部分的教材在书写时都采用了 Einstein 求和符号，我们这里出于降低难度的考虑，仍用普通的求和记号，同时也适当借鉴了 Einstein 求和记号中的一些规则，以期使得普通的求和记号更为整洁。

上述的内容是在技术上需要我们注意的。但是，不论技术上处理多么困难，大家都要明白本章最重要，乃至本课程最重要的概念，是 Gauss-Codazzi 方程，后续的内蕴几何的内容，完全以它为基础展开。学习本科微分几何课程，也要以 Gauss-Codazzi 方程为压舱石，以它为中心来理解其他概念，往往可以达到事半功倍的效果。

从这一章开始，我们的重心就会慢慢转移到内蕴几何的研究上。本章正文中已经提到过，内蕴几何或者更广泛的整体微分几何的发展，一定程度上是由于 Einstein 广义相对论的刺激，这里我们简单解释一下。

首先，宇宙所对应的时空，是有 3 个空间维度，和 1 个时间维度构成。由于时空是“弯曲”的，而且本身维数也较高，很难放置在更高维的欧氏空间中作为子流形研究，最自然的角就是作为内蕴几何对象来考察，即赋予时空这个四维流形一个“第一基本形式”（度量） $g_{\mu\nu}$ ，类比与曲面上的第一基本形式  $g_{ij}$ 。当然，或多或少也有一定的区别，比如，这里的度量的指标  $\mu, \nu$  需要在 0, 1, 2, 3 中变化（物理文献习惯采用这样的记法，其中 0 对应时间分量）， $g_{\mu\nu}$  也不是正定的（作为非退化二次型，指标为 (1, 3)）。那么，

所有时空的信息，就全部包含在度量  $g_{\mu\nu}$  中，只要能把  $g_{\mu\nu}$  求解出来，宇宙就确定下来了。

其次，要确定  $g_{\mu\nu}$ ，就要用到大名鼎鼎的 Einstein 场方程了（注意不要和 Einstein 质能方程  $E = mc^2$  混淆）：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

其中， $\Lambda$  是宇宙学常数， $G$  为万有引力常数， $c$  为光速。 $T_{\mu\nu}$  为能量动量张量，它是一个应力张量，由物质在宇宙中的分布决定，视为已知。故重点解释左端出现的几个曲率张量。我们知道，黎曼曲率张量  $R_{\mu\sigma\nu}^{\lambda}$  可以由度量  $g_{\mu\nu}$  完全决定（包含  $g_{\mu\nu}$ ，以及它的一、二阶导数）。同时， $R_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=0}^3 R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}$  称为 Ricci 曲率张量。Ricci 曲率张量继续缩并，得到所谓数量曲率  $R = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ 。

总之，除了已知量外，方程中只有  $g_{\mu\nu}$  以及  $g_{\mu\nu}$  的最高到二阶的导数项。换言之，这是一个关于  $g_{\mu\nu}$  的二阶非线性偏微分方程组（ $4 \times 4$  共 16 个方程）。一般情况下 Einstein 方程是很难求解出的，但是在某些条件限制下，会有一些特殊解。

## 第一部分注记

第一部分的前四章，是典型的外在局部几何。主要研究了曲线论和曲面论基本定理。所用的工具也很直白，就是线性微分方程组。总体而言，除了一些分析上的细节，诸如基本定理中曲率  $\kappa$ ，挠率  $\tau$ ，第一、第二基本形式的可微阶数，以及唯一性中曲率  $\kappa$  必须严格大于零外，难度并不大。大家最应该注意的，其实是我们研究曲面的观点的变化，也就是根据 Gauss-Codazzi 方程，我们要从外在几何，逐步转进到内蕴几何；相应的研究方法也不能仅仅局限于曲面的参数方程和相应的微分方程，也要随之演进。



## 第二部分

### 研究曲面的进阶工具



后半段内容中，我们主要介绍研究曲面几何工具。一是曲面间的映射，二是曲面上的曲线。曲面上的积分曲线，曲面间的映射既可以用在内蕴几何的研究中，也可以用在外在几何的研究中。比如，保长映射和正交参数系可以用来研究曲面的内蕴性质，Gauss映射和正交曲率线网可以用来研究曲面的外在性质。

而第七章内容是完完全全的内蕴几何。测地线首先是一个内蕴的几何对象，更重要的是，测地线是我们研究曲面的局部，乃至整体内蕴性质的得力工具。



# Chapter 5

## 曲线上的曲线 1——向量场的积分曲线

利用曲线来研究曲面，已经不是一个新鲜的事情了。我们在这一章中，要更系统，更深入地利用曲线来研究曲面。主要是利用特殊的曲线来构建好的参数系，这些好的参数系可以大大简化我们对相关问题的计算；另一方面这些特殊的曲线或者参数曲线网的存在性，往往需要深刻的分析（非线性微分方程）基础。也就是说，这一章所应用的分析工具，难度要远远高于先前所用的一阶线性常微分（偏微分）方程组；同时，由于是非线性微分方程，得到的结论，也往往都是局部存在性。

此外，这一章里，我们将根据具体情况混合使用张量记号和 Gauss 记号。

### 5.1 曲线上的切向量场和积分曲线

#### 5.1.1 切向量场的积分曲线

我们在第三章中，定义了切向量场（见定义3.19）。有一类几何对象和切向量场密切相关：

**定理 5.1.** 假定  $X$  是曲面  $S$  上一个连续可微的切向量场，在点  $p$  处有  $X_p \neq \vec{0}$ 。则在  $p$  点的邻域内存在一条过  $p$  点的参数曲线  $C$ ，不妨设其参数方程为  $\vec{r}(u(t), v(t))$ ，使得  $p = (u(0), v(0))$ ，且在曲线  $C$  上的每一点，均有  $\vec{r}'(u(t), v(t)) = X(u(t), v(t))$ ， $-\epsilon < t < \epsilon$ 。

证明. 不妨设切向量场

$$X(u, v) = a(u, v)\vec{r}_u + b(u, v)\vec{r}_v$$

其中  $a(u, v)$ ,  $b(u, v)$  均是连续可微的函数。根据条件, 这样的曲线需要满足:

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(u(t), v(t)) = \frac{du(t)}{dt}\vec{r}_u + \frac{dv(t)}{dt}\vec{r}_v = a(u(t), v(t))\vec{r}_u + b(u(t), v(t))\vec{r}_v$$

即

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = a(u(t), v(t)) \\ \frac{dv(t)}{dt} = b(u(t), v(t)) \end{cases} \quad (5.1)$$

这是一个非线性的自治常微分方程组, 在局部上必然有解, 而且初值  $(u(0), v(0))$  给定, 解唯一。从而定理得证。□

我们把这样的曲线, 称为切向量场的积分曲线。

需要注意的地方是, 自治常微分方程组的解的存在性, 本身是不需要  $a(u, v), b(u, v)$  不全为零的, 但是为了排除常值解 (equilibrium solution), 我们一般默认切向量场没有零点。

对于连续可微的无零点切向量场, 过不同的点均有积分曲线。根据常微分方程组解的唯一性, 在  $X$  非零的区域, 这些积分曲线并不会相交, 也就是这些积分曲线不重叠地覆盖这个邻域, 一般形象地称它为叶状结构。

对于处处严格大于零的二元连续可微函数  $\lambda(u, v)$ , 如果考虑向量场  $\lambda X$  的积分曲线, 我们会得到方程

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = \lambda(u(t), v(t))a(u(t), v(t)) \\ \frac{dv(t)}{dt} = \lambda(u(t), v(t))b(u(t), v(t)) \end{cases} \quad (5.2)$$

假设  $(u(t), v(t))$  已经是方程(5.1)的解。考虑新的自变量

$$\tilde{t} = \int \frac{1}{\lambda(u(t), v(t))} dt$$

由于函数单调,  $t$  可以被  $\tilde{t}$  反解, 不妨记为  $t = t(\tilde{t})$ , 于是

$$\frac{dt}{d\tilde{t}} = \lambda(u(t), v(t))$$

再考虑函数

$$\begin{cases} \tilde{u}(\tilde{t}) = u(t(\tilde{t})) \\ \tilde{v}(\tilde{t}) = v(t(\tilde{t})) \end{cases}$$

不难验证

$$\frac{d\tilde{u}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \frac{du(t)}{dt} \frac{dt}{d\tilde{t}} = a(u(t), v(t))\lambda(u(t), v(t)) = \lambda(\tilde{u}(\tilde{t}), \tilde{v}(\tilde{t}))a(\tilde{u}(\tilde{t}), \tilde{v}(\tilde{t}))$$

对  $\tilde{v}(\tilde{t})$  同理。这说明了  $(\tilde{u}(\tilde{t}), \tilde{v}(\tilde{t}))$  其实就是方程(5.2)的解。换言之, 改变连续可微向量场的大小, 而不改变方向, 是不会改变积分曲线本身的, 只会改变积分曲线的参数化。

为了后续讨论方便, 我们这里还有必要回顾常微分方程中的一个重要概念, 那就是首次积分 (first integral)。

**定义 5.2.** 对  $n$  个方程组成的一阶常微分方程组

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (5.3)$$

其中函数  $f_i$  在区域  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  上连续可微。一个在  $D$  的子区域  $G$  上连续可微的函数  $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$ , 如果对  $G$  中的任何一个方程的解:  $y_1 = w_1(x), \dots, y_n = w_n(x)$ , 都有

$$\varphi(x, w_1(x), \dots, w_n(x)) \equiv C$$

则称  $\varphi(x, y_1, \dots, y_n) = C$  为微分方程(5.3)的一个首次积分。有时也直接简称函数  $\varphi$  为首次积分。

可以证明<sup>1</sup>, 对于方程(5.3), 局部上有  $n$  个线性无关的首次积分; 如果可以求出微分方程的  $n$  个线性无关的首次积分, 就可以把微分方程的解确定出来。

在  $n = 1$  的特殊情形, 微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

只有一个独立的首次积分  $\varphi(x, y)$ 。利用隐函数定理, 可以直接反解出  $y(x)$ , 得到微分方程的解。所以此时的首次积分  $\varphi(x, y)$ , 也叫做方程的隐式通解。

首次积分对于自治方程的研究尤为重要。对于两个方程组成的自治常微分方程, 也就是我们这里研究的形如(5.1)的方程, 此时的首次积分形为  $\varphi_1(x, u, v) = C_1$ ,  $\varphi_2(x, u, v) = C_2$ , 进而可以利用隐函数定理, 先将  $\varphi_1(x, u, v) = C_1$  中的  $x$  用  $u, v$  反解出来, 再代入  $\varphi_2(x, u, v) = C_2$  中, 得到形如解  $\varphi(u, v) = C$  的表达式。它是常微分方程

$$\frac{dv}{du} = \frac{b(u, v)}{a(u, v)} \quad \text{或} \quad \frac{du}{dv} = \frac{a(u, v)}{b(u, v)} \quad (5.4)$$

<sup>1</sup>一般情况下的证明参见<sup>[12]</sup>, 第十章;  $n = 1$  的特殊情形可以参考附录F。

的首次积分,也就是隐式通解。此时,这一新得到的隐式通解  $\varphi^1$ , 相当于在原方程(5.1)的每条积分曲线的像集上都取常值,或者说积分曲线是函数  $\varphi$  的等值线。从这个视角看,方程(5.2)同样对应方程(5.4),也就是得到相同的隐式通解  $\varphi(u, v)$ , 从另外一个角度说明了改变连续可微向量场的大小是不会改变视为点的集合的积分曲线。

## 5.1.2 积分曲线和坐标的关联

在曲面中,我们往往希望取到的坐标系有好的性质,本质上是希望坐标曲线具有好的性质。其中,最常见的就是让坐标曲线的切向量指向给定的方向,即积分曲线成为坐标曲线。为此,我们先证明一个偏微分方程的引理。

**引理 5.3.** 设  $a(u, v), b(u, v)$  连续可微,且不全为零。则给定任意的连续可微函数  $\lambda(u, v)$ , 方程

$$a(u, v) \frac{\partial f}{\partial u} + b(u, v) \frac{\partial f}{\partial v} = \lambda(u, v) \quad (5.5)$$

有解。

**证明.** 核心想法依然是设法将偏微分方程转化为常微分方程。做待定的变量代换:

$$\begin{cases} \xi = \varphi(u, v) \\ \eta = \psi(u, v) \end{cases}$$

使得

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

由于可逆,故  $u, v$  可反解为  $\xi, \eta$  的函数。令  $\tilde{f}(\xi, \eta) = f(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$ , 于是  $f(u, v) = \tilde{f}(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ 。根据链式法则有

$$\left(a \frac{\partial \varphi}{\partial u} + b \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi} + \left(a \frac{\partial \psi}{\partial u} + b \frac{\partial \psi}{\partial v}\right) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta} = \lambda \quad (5.6)$$

我们试图取到合适  $\varphi$ , 使得

$$a(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial u} + b(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0 \quad (5.7)$$

<sup>1</sup>千万注意,这里的  $\varphi$  并不是初始方程(5.1)的首次积分。

这虽然依然是一个偏微分方程，但和如下的常微分方程关系密切：

$$\frac{du}{dv} = \frac{a(u, v)}{b(u, v)} \quad (5.8)$$

或

$$\frac{dv}{du} = \frac{b(u, v)}{a(u, v)} \quad (5.9)$$

虽然方程 (5.8) 和 (5.9) 各自的解的形式并不相同，但是我们知道它们都有所谓的隐式通解。一旦写成隐式通解的形式，两者在  $a(u, v), b(u, v)$  同不为零的区域上是一样的，进而可以合并得到存在范围更大的隐式通解。不妨设原常微分方程 (5.9) 有隐式通解  $\varphi(u, v) = h$ ，我们断言  $\varphi(u, v)$  即一阶线性偏微分方程 (5.7) 的解。

这是因为：若常微分方程 (5.9) 可以解得显式解  $v(u)$ ，则根据隐式通解的定义，有

$$\varphi(u, v(u)) \equiv h$$

两边关于  $u$  求导数，此时  $h$  为取定的常数，于是有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{dv}{du} = 0$$

再根据 (5.9) 式，即得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{b(u, v)}{a(u, v)} = 0$$

从而

$$a(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial u} + b(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$$

最后，选定某个  $\psi(u, v)$  (不唯一)，和之前解出的  $\varphi$  一起代入  $\tilde{f}$  的方程 (5.6) 中，有

$$\left( a \frac{\partial \psi}{\partial u} + b \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta} = \lambda$$

是一个关于  $\eta$  的常微分方程，求解出  $\tilde{f}$  后，再做逆变换，得到最初始方程 (5.5) 的解  $f(u, v)$ 。

□

关于上述引理的证明我们有两点需要注意：

一是如果初始偏微分方程 (5.5) 本身就是齐次的，也就是  $\lambda(u, v) \equiv 0$ ，我们就可以直接把这样的线性齐次偏微分方程转化为非线性的常微分方程来处理；如果  $b(u, v) \neq 0$ ，我们选取方程 (5.8) 进行求解；如果  $a(u, v) \neq 0$ ，我们选取方程 (5.9) 进行求解。如果初始偏

微分方程是非齐次的,则需要借助于常微分方程(5.8)或(5.9)先把方程(5.5)转化为常微分方程,再进行求解;也就是这种情况下需要求解两次常微分方程。

二是我们在证明过程中需要留意系数  $a(u, v)$  和  $b(u, v)$  是否为零。实际上,我们可以换一个更本质的观点,方程(5.8)和(5.9)均被方程

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = a(u(t), v(t)) \\ \frac{dv(t)}{dt} = b(u(t), v(t)) \end{cases}$$

所包括。而这一方程恰好就是向量场  $X = a(u, v)\vec{r}_u + b(u, v)\vec{r}_v$  对应积分曲线满足的方程。由于我们假定了  $a(u, v), b(u, v)$  不全为零,这时的积分曲线会形成叶状结构覆盖某点的小邻域,而隐式通解中的  $\varphi$  就以这些积分曲线作为等值线。

有了引理5.3作为基础,我们现在可以来证明

**命题 5.4.** 假定  $X$  是曲面  $S$  上的一个连续可微的切向量场,在邻域  $U$  内处处非零,则任意给定曲面上一个处处非零的函数  $\lambda$ ,存在  $S$  的一个新的坐标系  $(\tilde{u}, \tilde{v})$ ,使得  $X = \lambda\vec{r}_{\tilde{u}}$ 。换言之,使得向量场  $X$  的积分曲线为  $\tilde{u}$ -曲线的重新参数化。

证明. 设曲面初始的参数为  $(u, v)$ , 切向量场为  $X(u, v) = a(u, v)\vec{r}_u + b(u, v)\vec{r}_v$ 。简单起见,假定其中  $a(u, v), b(u, v)$  在小邻域上均恒不为零。若有参数变换  $\begin{cases} \tilde{u}(u, v) \\ \tilde{v}(u, v) \end{cases}$ , 使得  $X = \lambda\vec{r}_{\tilde{u}}$ , 即

$$a(u, v)\vec{r}_u + b(u, v)\vec{r}_v = \lambda\vec{r}_{\tilde{u}}$$

注意到

$$\begin{cases} \vec{r}_u = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u}\vec{r}_{\tilde{u}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u}\vec{r}_{\tilde{v}} \\ \vec{r}_v = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\vec{r}_{\tilde{u}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v}\vec{r}_{\tilde{v}} \end{cases}$$

代入上式,得

$$a(u, v)\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial u}\vec{r}_{\tilde{u}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u}\vec{r}_{\tilde{v}}\right) + b(u, v)\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\vec{r}_{\tilde{u}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v}\vec{r}_{\tilde{v}}\right) = \lambda\vec{r}_{\tilde{u}}$$

即

$$\begin{cases} a(u, v)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} + b(u, v)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} = \lambda \\ a(u, v)\frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} + b(u, v)\frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

根据引理5.3, 方程组中的每个方程都可解, 依然按照引理5.3中的记法, 记解为  $\begin{cases} \tilde{u} = f(u, v) \\ \tilde{v} = \varphi(u, v) \end{cases}$ 。

现在的关键是要说明此时的 Jacobi 矩阵非退化。回忆引理5.3的证明过程, 我们知道实际

上有  $\begin{cases} \tilde{u} = \tilde{f}(\xi, \eta) \\ \tilde{v} = \xi \end{cases}$  且  $\tilde{f}$  满足方程

$$\left(a \frac{\partial \psi}{\partial u} + b \frac{\partial \psi}{\partial v}\right) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta} = \lambda$$

其中  $\lambda \neq 0$ 。故此时  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta} \neq 0$ , 从而

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi} & \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

非退化。又已经知道  $\begin{cases} \xi = \varphi(u, v) \\ \eta = \psi(u, v) \end{cases}$  的 Jacobi  $\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{pmatrix}$  非退化, 故根据复合函数的

Jacobi 矩阵, 有

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{pmatrix}$$

也非退化。命题得证。 □

此外, 这里的  $u, v$  是对等的, 也可以让  $\tilde{v}$ -曲线成为积分曲线。最后注意到非零函数  $\lambda$  可以任意指定, 我们不妨假定  $\lambda \equiv 1$ , 于是有

**推论 5.5.** 假定  $X$  是曲面  $S$  上的一个连续可微的切向量场, 在邻域  $U$  内处处非零, 则存在  $S$  的一个新的坐标系  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  使得  $X = \tilde{r}_{\tilde{u}}$ 。<sup>1</sup>

## 5.2 参数曲线网与正交参数系

### 5.2.1 切标架场的两族积分曲线

现在有两个切向量场  $X$  与  $Y$ , 处处线性无关。有时我们也把  $\{X, Y\}$  合在一起称为切标架场。它们有两族积分曲线, 我们希望这两族积分曲线可以一起作为曲面的参数曲

<sup>1</sup>这实际上就是常微分方程中的向量场拉直定理, 它完全可以直接通过常微分方程理论来证明, 可参见 [13], 第六章。我们这里选用偏微分方程语言来说明是为了更清晰简洁。

线网。

**定理 5.6.** 假定  $X, Y$  是曲面  $S$  上的两个连续可微的切向量场, 在邻域  $U$  内处处线性无关, 则存在  $S$  的一个新的坐标系  $(\tilde{u}, \tilde{v})$ , 以及函数  $\lambda, \mu$  恒不为零, 使得  $X = \lambda \vec{r}_{\tilde{u}}, Y = \mu \vec{r}_{\tilde{v}}$ 。

从几何上看, 这样的参数系  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  使得  $\vec{r}_{\tilde{u}}$  始终与  $X$  平行,  $\vec{r}_{\tilde{v}}$  始终与  $Y$  平行; 或者更直观些, 使得  $X$  的积分曲线为  $\tilde{v} = 0$ ,  $Y$  的积分曲线为  $\tilde{u} = 0$  同时成立。

在证明定理之前, 我们必须明确, 上述定理和命题 5.4 最大的区别在于, 这里的  $\lambda, \mu$  都不能事先给定。

证明. 我们沿用命题 5.4 证明的框架和记号, 额外假定  $Y(u, v) = c(u, v)\vec{r}_u + d(u, v)\vec{r}_v$ 。若

有参数变换  $\begin{cases} \tilde{u} = f(u, v) \\ \tilde{v} = g(u, v) \end{cases}$  满足要求, 则

$$\begin{cases} a(u, v)\vec{r}_u + b(u, v)\vec{r}_v = \lambda \vec{r}_{\tilde{u}} \\ c(u, v)\vec{r}_u + d(u, v)\vec{r}_v = \mu \vec{r}_{\tilde{v}} \end{cases}$$

将

$$\begin{cases} \vec{r}_{\tilde{u}} = \frac{\partial f}{\partial u} \vec{r}_u + \frac{\partial g}{\partial u} \vec{r}_v \\ \vec{r}_{\tilde{v}} = \frac{\partial f}{\partial v} \vec{r}_u + \frac{\partial g}{\partial v} \vec{r}_v \end{cases}$$

代入, 化简可得

$$\begin{cases} a(u, v) \frac{\partial f}{\partial u} + b(u, v) \frac{\partial f}{\partial v} = \lambda \\ a(u, v) \frac{\partial g}{\partial u} + b(u, v) \frac{\partial g}{\partial v} = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\begin{cases} c(u, v) \frac{\partial f}{\partial u} + d(u, v) \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \\ c(u, v) \frac{\partial g}{\partial u} + d(u, v) \frac{\partial g}{\partial v} = \mu \end{cases} \quad (5.11)$$

这里只需要, 而且只能分别求解两个齐次的方程 (5.10) 和 (5.11)。由于  $a(u, v)$  和  $b(u, v)$ ,  $c(u, v)$  和  $d(u, v)$  不能同时为零, 根据引理 5.3, 方程 (5.10) 和 (5.11) 可以找到解  $g$  和  $f$ 。而原方程组中的  $\lambda$  和  $\mu$ , 则是由已经解出的  $f$  和  $g$ , 代入到剩下的两个非齐次的方程中得到。接下来, 我们说明函数  $\lambda$  和  $\mu$  均处处非零。用反证法, 假设  $\lambda$  在某一点处为零,

那么在该点处有

$$\begin{cases} a \frac{\partial f}{\partial u} + b \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \\ c \frac{\partial f}{\partial u} + d \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

但是由于系数矩阵  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  满秩, 只有零解, 故在该点处有  $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial v} = 0$ 。然而  $f$  本质上就是方程(5.8)或(5.9)的隐式通解  $\varphi$ , 而  $\varphi$  是通过求逆映射得到的(具体求解过程见附录F), 它的两个偏导数不可能同时为零, 否则就和 Jacobian 行列式不为零矛盾了。 $\mu \neq 0$  的证明同理。最后, 注意到上述方程组可以改写为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} a(u, v) & b(u, v) \\ c(u, v) & d(u, v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

此时, 由于  $\lambda, \mu$  均非零, 且矩阵  $\begin{pmatrix} a(u, v) & b(u, v) \\ c(u, v) & d(u, v) \end{pmatrix}$  非退化, Jacobi 矩阵  $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix}$  必

然也非退化, 进而  $\begin{cases} \tilde{u} = f(u, v) \\ \tilde{v} = g(u, v) \end{cases}$  是满足题设的新的正则参数系。  $\square$

定理5.6并非命题5.4的推论。两者有着根本的区别, 在证明过程中体现的非常清晰, 那就是命题5.4中的方程组包含两个方程, 这两个方程可以分别求解; 而定理5.6中的方程组包含四个方程, 只用两个就可以确定参数变换  $\begin{cases} \tilde{u} = f(u, v) \\ \tilde{v} = g(u, v) \end{cases}$ , 故此时的  $\lambda, \mu$  都是无法预先给定的。换句话说, 故对一般曲面上的线性无关连续可微向量场  $X, Y$ , 是不存在新的参数系  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  使得  $X = \tilde{r}_{\tilde{u}}, Y = \tilde{r}_{\tilde{v}}$  的。

自然的问题, 什么情况下能够存在新的参数系  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  使得  $X = \tilde{r}_{\tilde{u}}, Y = \tilde{r}_{\tilde{v}}$  成立。答案是切向量场  $X, Y$  的李括号积  $[X, Y]$  恒为零。这一部分内容已经超出本讲义探讨的范畴, 感兴趣的同学可以参考<sup>[14]</sup>的第五章。

最后, 还需要强调的是定理5.6只在二维的曲面上才成立。参考文献<sup>[14]</sup>的第五章的习题中构造了  $\mathbb{R}^3$  上三个线性无关的连续可微向量场  $X, Y, Z$ , 但是不存在  $\mathbb{R}^3$  上新的参数系, 使得这三个向量场的积分曲线成为参数曲线。个中原因在引理5.3的证明过程也有明显的体现: 把偏微分方程(5.7)转化为常微分方程需要(5.8)或(5.9)式, 而这些在三个变量的时候是无法做到的。

理论上,本章后续所涉及到的全部问题,都可以使用切向量场及其积分曲线,以及相应的坐标系来解决。不过,某些情况下,比如正交参数系的存在性,用上述方法就略显复杂。学习过更高阶的几何课程,如微分流形之后,我们会明白,切向量场和一次微分形式是对偶的关系,本质上等价。很多问题从一次微分形式的角度去描述会简洁很多。接下来,我们就简要地介绍下如何从一次微分形式角度研究曲面上的积分曲线和特殊参数系。

## 5.2.2 二元一次微分式积分因子存在性

回忆,引理5.3的证明关键在于求解常微分方程(5.8)或(5.9)。求解这样的常微分方程,理论上,注意仅仅是理论上,可以等同于求解如下形式的微分方程

$$b(u, v)du - a(u, v)dv = 0 \quad (5.12)$$

其中,假定  $a(u, v), b(u, v)$  不全为零。而求解上述方程等价于寻找二元一次微分式  $b(u, v)du - a(u, v)dv$  的积分因子,进而找到该微分式的全微分的办法。具体而言,也就是找到积分因子  $\lambda(u, v)$  和函数  $\varphi(u, v)$ , 使得

$$d\varphi = \lambda(b(u, v)du - a(u, v)dv)$$

这样就得到  $\varphi(u, v) = C$  这样的隐式通解(也叫做通积分)满足方程(5.12)。实际上,二元一次微分式积分因子的存在性和常微分方程(5.8)和(5.9)的隐式通解的存在性是等价的,具体分析大家可以参考附录F。附录中,我们实际上证明了

**定理 5.7.** 设  $a(x, y), b(x, y)$  是定义在区域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上的两个不同时为零的连续可微实函数。对于任意一点  $(x_0, y_0) \in D$ , 必有  $(x_0, y_0)$  的一个邻域  $U \subset D$ , 以及  $U$  上的非零连续实函数  $\lambda(x, y)$ , 使得  $\lambda(x, y)$  是一次微分式

$$a(x, y)dx + b(x, y)dy$$

的积分因子。即有函数  $\varphi(x, y)$ , 使得

$$d\varphi(x, y) = \lambda(x, y)(a(x, y)dx + b(x, y)dy)$$

一次微分式  $a(x, y)dx + b(x, y)dy$  积分因子的存在性在微分几何中有着重要的应用,简单地讲,就是一次微分式的积分因子存在性等价于隐式通解的存在性,而隐式通解可以得到积分曲线的隐式方程,进而得到曲面上某种特殊参数系的存在性。比如,我们在

第5.2.1小节中证明定理5.6, 现在从一次微分式的角度来重新审视这个定理。此时  $X, Y$  构成了曲面  $S$  的一组基底, 考虑  $X, Y$  的对偶基, 即实的一次微分式  $\alpha, \beta$ , 使得

$$\alpha(X) \equiv 1, \quad \alpha(Y) \equiv 0; \quad \beta(X) \equiv 0, \quad \beta(Y) \equiv 1$$

由于  $\alpha, \beta$  这些一次微分式存在积分因子, 也就是能找到曲面  $S$  上连续可微的非零函数  $\lambda, \mu, u, v$ , 使得

$$du = \lambda\alpha, \quad dv = \mu\beta$$

则根据对偶关系, 一定有

$$\vec{r}_u = \frac{X}{\lambda}, \quad \vec{r}_v = \frac{Y}{\mu}$$

进而得出定理5.6。从更深层次看, 道理也很简单, 在附录F中, 我们说明了定理5.7等价于求解常微分方程的隐式通解, 而利用常微分方程隐式通解的存在性, 可以证明定理5.6。那么由定理5.7能够导出定理5.6也就再正常不过了。

下一小节中我们会看到, 使用二元一次微分式积分因子的存在性这种语言来论证参数系存在性的相关问题会更高效。

### 5.2.3 正交参数系

现在我们来考察定理5.6的一个特殊情况, 如果两个向量场  $X, Y$  相互正交, 那么根据定理5.6得到的参数系  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  对应的切向量  $\vec{r}_{\tilde{u}}, \vec{r}_{\tilde{v}}$  也正交, 我们把这样的参数系称为正交参数系。对应的  $u$ -曲线和  $v$ -曲线称为正交曲线网。

事实上, 我们总能在正则曲面上找到局部的正交的向量场。假定初始的参数系为  $(u, v)$ , 对  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  做施密特正交化。由于施密特正交化中, 仅仅是计算内积, 并相减, 这些运算都保持连续可微性, 故得到的向量场必然是连续可微的。从而有

**定理 5.8.** 任给正则参数曲面  $S: \vec{r}(u, v)$  的上的一点  $p$ , 一定有  $p$  点的一个邻域  $U \subset S$ ,  $U$  上存在新的正交参数系  $(\tilde{u}, \tilde{v})$ 。

我们也可以通过一次微分式积分因子的存在性得到正交参数系存在性更简洁的证明。首先, 有不证自明的命题

**命题 5.9.** 正则参数曲面  $(u, v)$  为正交参数系的充分必要条件为第一类基本量中的  $F \equiv 0$ , 即第一基本形式可以写为

$$I = E(du)^2 + G(dv)^2$$

换言之, 寻找正交参数系, 相当于寻找参数系使得曲面的第一基本形式没有交叉项。现在设曲面的第一基本形式为

$$I = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$$

现在我们从第一基本形式的角度来构建正交参数系。注意到所谓第一基本形式本质上就是一个二次型, 而将二次型中的交叉项消去, 也就是变为标准形, 最简单方便的办法就是配方。再注意到  $E, G$  当中至少有一个函数不为零, 否则的话就和正定性相矛盾。不妨假设  $E$  为正函数, 关于  $E(du)^2$  进行配方, 有

$$\begin{aligned} I &= E \left( (du)^2 + \frac{2F}{E} dudv \right) + G(dv)^2 \\ &= E \left( du + \frac{F}{E} dv \right)^2 - \frac{F^2}{E} (dv)^2 + G(dv)^2 \\ &= E \left( du + \frac{F}{E} dv \right)^2 + \frac{EG - F^2}{E} (dv)^2 \end{aligned}$$

注意到如果存在非零积分因子  $\lambda$  使得  $dw = \lambda \left( du + \frac{F}{E} dv \right)$ , 第一基本形式可以改写为

$$I = \frac{E}{\lambda^2} \left( \lambda \left( du + \frac{F}{E} dv \right) \right)^2 + \frac{EG - F^2}{E} (dv)^2 = \frac{E}{\lambda^2} (dw)^2 + \frac{EG - F^2}{E} (dv)^2$$

此时, 函数  $\frac{E}{\lambda^2}$  和  $\frac{EG - F^2}{E}$  都为正, 也就是得到正交参数系  $(w, v)$ 。

不难看出, 使用二元一次微分式及其积分因子的存在性来论证正交参数系的存在性更为高效。更重要的是, 在后续第九章中, 一种特殊的正交参数系: 等温参数系的存在性, 也可以归结为复值的一次微分式积分因子的存在性。

## 5.2.4 正交参数系下的 Christoffel 记号, Gauss 曲率和 Gauss 方程

引入正交参数系可以为我们的计算带来很大的简便。已经知道 Christoffel 记号完全由第一类基本量决定:

$$\Gamma_{\xi\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\xi} \right)$$

如果取正交参数曲线网, 则有  $F \equiv 0$ , 于是

$$\begin{aligned} \Gamma_{111} &= \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u}, & \Gamma_{112} &= \Gamma_{121} = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}, & \Gamma_{122} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \\ \Gamma_{211} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}, & \Gamma_{212} &= \Gamma_{221} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}, & \Gamma_{222} &= \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} \end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \log E}{\partial u}, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} \frac{\partial \log E}{\partial v}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2E} \frac{\partial G}{\partial u} \\ \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial v}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial \log G}{\partial u}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \log G}{\partial v}\end{aligned}$$

可以看到正交参数系下的 Christoffel 记号得到了很大的简化。进一步考虑 Riemann 记号, 一般的表达式为:

$$\begin{aligned}R_{\beta\gamma\alpha\delta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\gamma\alpha}}{\partial u^\beta \partial u^\delta} + \frac{\partial^2 g_{\delta\beta}}{\partial u^\alpha \partial u^\gamma} - \frac{\partial^2 g_{\gamma\delta}}{\partial u^\beta \partial u^\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\beta\alpha}}{\partial u^\gamma \partial u^\delta} \right) \\ &\quad + g_{\eta\xi} \Gamma_{\gamma\alpha}^\xi \Gamma_{\beta\delta}^\eta - g_{\eta\xi} \Gamma_{\gamma\delta}^\xi \Gamma_{\beta\alpha}^\eta\end{aligned}$$

只需要考虑  $R_{1212}$ , 同时部分改用 Gauss 记号表示, 有

$$\begin{aligned}R_{1212} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} \right) \\ &\quad + \Gamma_{\eta 21} \Gamma_{12}^\eta - \Gamma_{\eta 22} \Gamma_{11}^\eta\end{aligned}$$

在正交参数系下,  $F \equiv 0$ , 同时

$$\begin{aligned}\Gamma_{\eta 21} \Gamma_{12}^\eta &= \Gamma_{121} \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{221} \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \frac{1}{2} \frac{\partial \log E}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \frac{1}{2} \frac{\partial \log G}{\partial u} \\ \Gamma_{\eta 22} \Gamma_{11}^\eta &= \Gamma_{122} \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{222} \Gamma_{11}^2 = -\left( \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \frac{1}{2} \frac{\partial \log E}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} \frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial v} \right)\end{aligned}$$

于是最终简化为

$$R_{1212} = -\sqrt{EG} \left( \left( \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left( \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u \right)$$

此时的 Gauss 方程简化为

$$-\sqrt{EG} \left( \left( \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left( \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u \right) = b_{11} b_{22} - (b_{12})^2$$

进一步有

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left( \left( \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left( \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u \right)$$

Codazzi 方程在正交参数系下变化不大, 这里不再展开。

## 5.3 曲率线和正交曲率线网

### 5.3.1 曲率线的定义, 存在性及其方程

先前已经介绍过, 曲面  $S$  在一点处的主方向是该点处切平面上 Weingarten 映射的特征方向。引入

**定义 5.10.** 如果曲面  $S$  上的一条曲线  $C$ , 每一点的切向量都是曲面  $S$  的主方向, 则曲线  $C$  称为曲面  $S$  的曲率线。

一般情况下很难直接根据定义找到面上的曲率线<sup>1</sup>。回到更本质的积分曲线的视角来研究曲率线。在非脐点处, 主方向确定, 且两个主方向相互垂直。我们现在考虑正则曲面  $S$  的一个小邻域, 点点都不是脐点。不妨设单位向量  $\bar{e}_1$  为较小的主曲率对应的主方向, 单位向量  $\bar{e}_2$  为较大的主曲率对应的主方向。

Weingarten 映射的矩阵  $W = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$  本身是连续可微的; 在非脐点处, 其特征向量自然也是连续可微的 (根据克拉默法则, 线性方程组的唯一解可以用行列式的比值表示), 从而向量场  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$  都是连续可微的向量场。于是积分曲线局部存在, 也就意味着过任意一个非脐点  $p$ , 附近一定有两条曲率线, 这两条曲率线在交点  $p$  处相互垂直。

更进一步, 我们希望能把具体的曲率线求解出来, 或者, 至少把它所满足的方程写出来。理论上, 曲率线就是特殊的积分曲线, 我们只要把向量场求出来, 再求解对应的常微分方程就可以了。这意味我们要求出矩阵  $W$  的特征向量, 然而, 如果根据一般求解特征值问题的路径, 先求特征值, 再求特征向量的话运算量会非常的大。由于是二阶矩阵, 我们可以较容易地直接求出特征向量。注意到非零向量  $(a \ b)$  为  $W$  的特征向量, 即存在  $\lambda$  使得  $(a \ b)W = \lambda(a \ b)$ , 等价于

$$\begin{vmatrix} (a \ b)W & \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

<sup>1</sup>利用后续章节中的可展曲面, 可以导出更几何的判定曲线是否为曲率线的方法, 并在一些特殊的曲面上找到曲率线, 见7.2.2小节。

其中  $(a \ b)W$  视为行列式中的一行。而积分曲线需要满足非线性常微分方程

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a(u, v) \\ \frac{dv}{dt} = b(u, v) \end{cases}$$

这意味着

$$\begin{vmatrix} (\frac{du}{dt} \ \frac{dv}{dt})W \\ \frac{du}{dt} \ \frac{dv}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.13)$$

再注意到这里的参数  $t$  可以做任意的正则参数变换，或者等价地说，特征向量可以相差任意非零倍数，上面的方程可以简化为

$$\begin{vmatrix} (du \ dv)W \\ du \ dv \end{vmatrix} = 0$$

同时我们知道，由分块矩阵的乘法，有

$$\begin{pmatrix} (du \ dv)W \\ du \ dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (du \ dv) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \\ (du \ dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

所以上述矩阵的行列式也为零，即

$$\begin{vmatrix} Ldu + Mdv & Mdu + Ndv \\ Edu + Fdv & Fdu + Gdv \end{vmatrix} = 0 \quad (5.14)$$

当然可以直接计算行列式得到曲率线所满足的方程

$$(LF - ME)(du)^2 + (LG - NE)dudv + (MG - NF)(dv)^2 = 0 \quad (5.15)$$

但是，为了得到形式更简洁的方程，我们选择利用行列式性质来化简(5.14)式。将(5.14)式左端的行列式补成一个等值的三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ Ldu + Mdv & Mdu + Ndv & -M \\ Edu + Fdv & Fdu + Gdv & -F \end{vmatrix}$$

这个三阶行列式可以继续化简为

$$\begin{vmatrix} dv & du & 1 \\ Ldu & Ndv & -M \\ Edu & Gdv & -F \end{vmatrix} = dudv \begin{vmatrix} \frac{dv}{du} & \frac{du}{dv} & 1 \\ L & N & -M \\ E & G & -F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (dv)^2 & (du)^2 & dudv \\ L & N & -M \\ E & G & -F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (dv)^2 & -dudv & (du)^2 \\ L & M & N \\ E & F & G \end{vmatrix}$$

即曲率线方程还可以写为更容易记忆的形式

$$\begin{vmatrix} (dv)^2 & -dudv & (du)^2 \\ L & M & N \\ E & F & G \end{vmatrix} = 0 \quad (5.16)$$

显然, (5.15)式和(5.16)式是等价的, 同时, 可以证明, 方程(5.15)左端的二次型一定可以因式分解为两个实的一次微分式, 进而得到两个一阶微分方程(见习题)。接下来我们在一些相对简单的情况下, 求解面上的曲率线方程。

例 5.11. 求曲面  $\vec{r}(u, v) = (\frac{a}{2}(u-v), \frac{b}{2}(u+v), \frac{1}{2}uv)$  的曲率线, 这里  $a, b$  是正常数。

解. 显然曲面是双曲抛物面。由于曲率线是曲面外在的几何量, 所以需要我们把曲面的第一和第二类基本量都计算出来:

$$E = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + v^2), \quad F = \frac{1}{4}(a^2 - b^2 + uv), \quad G = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + u^2)$$

$$L = 0, \quad M = \frac{ab}{\sqrt{\frac{b^2}{8}(u-v)^2 + \frac{a^2}{8}(u+v)^2 + \frac{1}{2}a^2b^2}}, \quad N = 0$$

代入曲率线方程(5.15)式中, 有

$$E(du)^2 - G(dv)^2 = 0$$

这里为了书写简便, 暂时不替换  $E, G$ 。将上式因式分解(当然如果方程较为复杂, 可以利用求根公式)有

$$(\sqrt{E}du + \sqrt{G}dv)(\sqrt{E}du - \sqrt{G}dv) = 0$$

先考虑  $\sqrt{E}du + \sqrt{G}dv = 0$ , 将  $E, G$  的具体值代入, 得到

$$\frac{du}{\sqrt{a^2 + b^2 + u^2}} + \frac{dv}{\sqrt{a^2 + b^2 + v^2}} = 0$$

等式两端同时积分，有

$$\ln(\sqrt{a^2 + b^2 + u^2} + u) + \ln(\sqrt{a^2 + b^2 + v^2} + v) = \text{const}$$

即曲率线的隐式方程为

$$(\sqrt{a^2 + b^2 + u^2} + u)(\sqrt{a^2 + b^2 + v^2} + v) = \text{const}$$

可以进一步简化为

$$\sqrt{a^2 + b^2 + u^2} + u = c_1(\sqrt{a^2 + b^2 + v^2} - v)$$

以及等价的

$$\sqrt{a^2 + b^2 + u^2} - u = \frac{1}{c_1}(\sqrt{a^2 + b^2 + v^2} + v)$$

联立可得曲率线的显式参数表达

$$u = \frac{1}{2} \left( \left( c_1 - \frac{1}{c_1} \right) \sqrt{a^2 + b^2 + v^2} - \left( c_1 + \frac{1}{c_1} \right) v \right)$$

对于另外一种情形  $\sqrt{E}du - \sqrt{G}dv = 0$ ，类似可求得曲率线的隐式方程为

$$(\sqrt{a^2 + b^2 + u^2} + u)(\sqrt{a^2 + b^2 + v^2} - v) = \text{const}$$

进一步得到显式表达式

$$u = \frac{1}{2} \left( \left( c_2 - \frac{1}{c_2} \right) \sqrt{a^2 + b^2 + v^2} + \left( c_2 + \frac{1}{c_2} \right) v \right)$$

□

特别地，考虑过原点  $u = 0, v = 0$  的曲率线，此时有常数  $c_1 = c_2 = 1$ ，两条曲率线的方程变为了  $u = -v$  和  $u = v$ ，即双曲抛物面和坐标平面  $y = 0$  和  $x = 0$  截出的两条抛物线都是曲率线。

此外，将隐式方程转化为参数方程是比较困难的；求出隐式方程足够我们使用，一般不必非要得到显式解。最后，结合配方法寻找曲面上的正交参数系的例子，我们可以看到，很多时候采用微分式的观点，比直接从向量场及其积分曲线入手要简单得多。实际上，在后续课程中，微分式（外微分形式），才是微分几何研究的核心工具，而不是切向量。

### 5.3.2 正交曲率参数网

根据定理5.6, 过不同点的两族曲率线, 其实还可以构成参数曲线网。我们有

**定理 5.12.** 在正则曲面  $S$  上的每个非脐点的一个邻域内存在参数系  $(u, v)$ , 使得参数曲线构成正交曲率线网。

这样的参数系  $(u, v)$ , 也称为正交曲率参数系。

如果有脐点, 则不一定能保证主方向的连续可微性; 进而脐点处连续可微的**正交曲率线网**不一定存在<sup>1</sup>。

我们选取正交曲率线网的根本目的在于化简运算。具体来看

**命题 5.13.** 在曲面  $S: \vec{r}(u, v)$  上的任意一个固定点  $(u, v)$ , 参数曲线方向是彼此正交的的主方向, 当且仅当在该点有  $F = M = 0$ 。

**证明.** 先证必要性。由正交, 有  $F = 0$ 。根据主方向为 Weingarten 映射的特征方向, 在基底  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  下, Weingarten 映射的矩阵为:

$$W = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{L}{E} & \frac{M}{G} \\ \frac{M}{E} & \frac{N}{G} \end{pmatrix}$$

而此时  $(1, 0)$  和  $(0, 1)$  为特征方向, 即

$$(1, 0) \begin{pmatrix} \frac{L}{E} & \frac{M}{G} \\ \frac{M}{E} & \frac{N}{G} \end{pmatrix} = \kappa_1(1, 0), \quad (0, 1) \begin{pmatrix} \frac{L}{E} & \frac{M}{G} \\ \frac{M}{E} & \frac{N}{G} \end{pmatrix} = \kappa_2(0, 1)$$

直接验证可得  $M = 0$ ,  $\kappa_1 = \frac{L}{E}$ ,  $\kappa_2 = \frac{N}{G}$ 。充分性逆推即可。 □

把单点的结论推广到非脐点的邻域, 自然有

**定理 5.14.** 在正则曲面  $S$  上的每一个非脐点的邻域内, 都存在一个正交曲率线网  $(u, v)$ , 即此时有

$$I = E(du)^2 + G(dv)^2, \quad II = L(du)^2 + N(dv)^2$$

反之, 若曲面  $S$  的参数系  $(u, v)$  有上述形式的第一和第二基本形式, 该参数系必为正交曲率线网。

<sup>1</sup>但是仍然可以取**正交参数系**, 在单点处使得参数曲线与主方向相切, 这样的参数系也能在一些情况下化简运算。

从之前命题的证明过程中可以看出, 此时,  $u$ -曲线方向的主曲率为  $\kappa_1 = \frac{L}{E}$ ,  $v$ -曲线方向的主曲率为  $\kappa_2 = \frac{N}{G}$ 。于是有如下:

推论 5.15. 曲面在正交曲率线网下的两个基本形式可以写为:

$$\begin{aligned} I &= E(\mathrm{d}u)^2 + G(\mathrm{d}v)^2 \\ II &= \kappa_1 E(\mathrm{d}u)^2 + \kappa_2 G(\mathrm{d}v)^2 \end{aligned}$$

例 5.16. 旋转面中的经线和纬线就是正交曲率线网。

这是因为, 我们计算过, 旋转面  $(u \cos v, u \sin v, f(u))$  的第一和第二基本形式为

$$\begin{aligned} I &= (1 + f'^2(u))(\mathrm{d}u)^2 + u^2(\mathrm{d}v)^2 \\ II &= \frac{f''(u)}{\sqrt{1 + f'^2(u)}}(\mathrm{d}u)^2 + \frac{uf'(u)}{\sqrt{1 + f'^2(u)}}(\mathrm{d}v)^2 \end{aligned}$$

### 5.3.3 正交曲率参数系下的 Gauss-Codazzi 方程

正交曲率参数系除了能让曲面的两个第一基本形式简单外, 很多地方都能简化运算。比如, 研究曲面内蕴几何时经常会用到 Gauss-Codazzi 方程。接下来我们在正交曲率线网下写出 Gauss-Codazzi 方程。

先来看 Gauss 方程

$$R_{1212} = b_{11}b_{22} - (b_{12})^2$$

左端我们在正交参数系下已经计算过, 在正交曲率参数系下, 右端的  $b_{12} = M = 0$ , 故

$$-\sqrt{EG} \left( \left( \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left( \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u \right) = LN$$

再来看 Codazzi 方程

$$\begin{cases} \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} = \Gamma_{12}^\eta b_{\eta 1} - \Gamma_{11}^\eta b_{\eta 2} \\ \frac{\partial b_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} = \Gamma_{22}^\eta b_{\eta 1} - \Gamma_{21}^\eta b_{\eta 2} \end{cases}$$

变为

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v} &= \Gamma_{12}^1 b_{11} - \Gamma_{11}^2 b_{22} = \frac{N}{2G} \frac{\partial E}{\partial v} + \frac{L}{2E} \frac{\partial E}{\partial v} = H \frac{\partial E}{\partial v} \\ -\frac{\partial N}{\partial u} &= \Gamma_{22}^1 b_{11} - \Gamma_{21}^2 b_{22} = -\frac{N}{2G} \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{L}{2E} \frac{\partial G}{\partial u} = -H \frac{\partial G}{\partial u} \end{aligned}$$

其中,  $H = \frac{1}{2}(\frac{L}{E} + \frac{N}{G})$  为曲面的平均曲率。

总结一下, 正交曲率线网下 Gauss-Codazzi 方程可以改写为:

$$-\sqrt{EG} \left( \left( \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left( \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u \right) = LN \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v} &= H \frac{\partial E}{\partial v} \\ \frac{\partial N}{\partial u} &= H \frac{\partial G}{\partial u} \end{aligned} \quad (5.18)$$

其中,  $H = \frac{1}{2}(\frac{L}{E} + \frac{N}{G})$  为曲面的平均曲率。

很容易记忆。但必须明确 (5.17) 式和 (5.18) 式只有在正交曲率线网下才成立。

## 5.4 曲面上的特殊曲线拾遗

之前的章节主要研究了曲率线, 它是 Weingarten 映射的特征向量场的积分曲线。在曲面上, 我们还可以找到其他有几何意义的向量场, 进而得到相应的积分曲线。而这些特殊的向量场, 往往依然和 Weingarten 映射, 或者等价的, 第二基本形式有关。

为了后续能更好地表述, 我们把单点处的 Weingarten 映射进行分类。之前已经把 Weingarten 映射为零映射, 也就是第二基本形式为零的点, 称为平点。类似地我们可以引入

**定义 5.17.** Weingarten 映射两个特征值同号的点称为椭圆点, 即该点处的 Gauss 曲率  $K > 0$ ; 两个特征值一正一负的点称为双曲点, 即该点处的 Gauss 曲率  $K < 0$ ; 两个特征值一个为零, 另一个非零的点称为抛物点, 即该点处的 Gauss 曲率  $K = 0$ , 且非平点。

当然, 可以等价地用二次型, 也就是第二基本形式的语言来叙述, 即如果第二基本形式满秩, 且符号差为  $\pm 2$  的点为椭圆点; 满秩, 且符号差为零的点为双曲点; 秩为 1 的点为抛物点; 秩为零的点为平点。

一点处 Weingarten 映射的分类, 和曲面在一点处的展开, 也就是所谓的 Dupin 标准形密切相关, 感兴趣的同学可以见课后习题, 或者直接参考<sup>[10]</sup>。

### 5.4.1 曲面上的渐近线

已经知道曲率线方向是曲面该点处法曲率取极值的方向，我们当然也可以定义

**定义 5.18.** 在曲面  $S$  上一点，其法曲率为零的切方向称为曲面  $S$  在该点的渐进方向。

注意这里所谓的渐进方向，只是机械地导入平面上二次曲线中的概念，除了法曲率为零外没有额外的几何意义。回忆一下，平面上二次曲线

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

基本类型由二次型  $\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$  决定，解析几何教材<sup>[2]</sup>把使得  $\varphi(\mu, \nu) = 0$  的  $(\mu, \nu)$  称为该二次曲线的渐进方向。在双曲线的情形，渐进方向就是双曲线两条渐近线的方向，这也是“渐进”这一名称的由来。类比到曲面中，若  $\kappa_n(X) = \frac{II(X, X)}{I(X, X)}$  为零，则第二基本形式在  $X$  切方向上取值为零，即  $II(X, X) = 0$ 。

根据定义，所谓渐进方向即二次方程

$$L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2 = 0$$

的解，而这一方程的判别式  $\Delta = M^2 - LN = -K(EG - F^2)$ 。不难得到：

- 在椭圆点没有渐进方向；
- 在双曲点有两个不同的渐进方向；
- 在抛物点有唯一一个渐进方向。

**定义 5.19.** 如果曲面  $S$  上一条曲线在每一点的切方向都是曲面在该点的渐进方向，则称该曲线是曲面上的渐进曲线。

用更高的观点来看上述定义，简单来看，不妨假定曲面上某点的邻域内全部为双曲点或者抛物点。那么自然可以得到渐进方向构成的向量场，那么所谓渐近线，就是渐进方向向量场的积分曲线。

特别地，如果某点的邻域内均为双曲点，就有两个处处线性无关的切向量场，而且根据曲面的正则性，这两个向量场还是连续可微的，必然存在积分曲线，进而得到两族渐近线；再根据定理5.6，这两族渐近线可以作为曲面上的参数曲线网。

更特别地，如果某点的邻域内全部都是抛物点，那么这些渐近线，同时也对应特征值为零的主方向，也都是曲率线；换句话说，此时的渐近线落在了 Weingarten 映射  $\mathscr{W}$  这

一线性映射的零化子空间中。我们在7.2.3小节和第7.3节中还会遇到这种特殊的情况，请大家务必注意。

最后我们来看渐近线所满足的方程。如果某点的邻域内均为双曲点，那么每点的渐进方向满足

$$\frac{du}{dv} = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - LN}}{L}$$

或者等价的

$$\frac{du}{dv} = \frac{N}{-M \mp \sqrt{M^2 - LN}}$$

如果某点的邻域内均为抛物点，那么每点的渐进方向满足

$$\frac{du}{dv} = -\frac{M}{L} \left( = -\frac{N}{M} \right)$$

当点变化时，上述方程就可以视为渐近线所满足的微分方程。

## 本章注记

本章的核心是向量场的积分曲线，不论是正交参数系还是曲率线，还是正交曲率线网，都是特殊的积分曲线。对于单个向量场的一维的积分曲线总是存在的。然而，对于一个  $n$  维流形，其上有  $k$  ( $k < n$ ) 个线性无关的向量场，是否可以对应一个  $k$  维的子流形，点点恰以它们张成的线性空间为切空间，就需要满足额外的可积性条件，也就是所谓的 Frobenius 定理。大家可以参考<sup>[9]</sup>中有关 Frobenius 定理和积分流形的讨论。

我们在求解和向量场积分曲线对应的参数系时，需要求解偏微分方程。实际上，这类偏微分方程的求解等价于大家熟悉的两个自变量的一次微分式的积分因子的存在性。

假设有定义在区域  $D \subset E^2$  上的一次微分式

$$a(u, v)du + b(u, v)dv$$

其中  $a(u, v), b(u, v)$  是两个不同时为零的连续可微函数。对于任意一点  $(u_0, v_0) \in D$ ，必有  $(u_0, v_0)$  的一个邻域  $U \subset D$ ，使得  $U$  上存在一次微分式的积分因子  $\lambda(u, v)$ ，这里  $\lambda(u, v)$  是一个非零的连续函数。用显式数学表达式写出，即有函数  $\varphi(u, v)$ ， $\lambda(u, v)$ ，使得

$$\lambda(u, v)(a(u, v)du + b(u, v)dv) = d\varphi(u, v)$$

换句话说，除了可以从积分曲线的角度引入曲面的满足某种特殊性质的参数系外，也可以从一次微分式的首次积分角度引入参数系。这两者本质上是等价的，原因也很简单，因为曲面上的积分曲线（切向量场）和一次微分式是相互对偶的两个对象，这也是微分拓扑的着眼点。

在不少教材中，是没有引入正交参数系和正交曲率线网的，这是因为这些教材都引入了活动标架法。活动标架法比正交参数系和正交曲率线网更灵活，更有力的工具，因此，但凡涉及到活动标架法，就没有必要再引入正交参数系和正交曲率线网了。

然而，要真正理解并灵活使用活动标架法，是需要很多相对高阶的准备知识的。我们这份讲义的初衷即是用最初等的方法和技术来介绍微分几何的基础知识，所以我们选择不涉及活动标架法。也是因此，正交参数系和正交曲率线网就是我们这份讲义中简化运算的必选方法。

最后我们稍作总结。之前使用的微分方程，不论是曲线中涉及到的常微分方程，还是

曲面中涉及到的偏微分方程，都是线性的。这一章里，我们用到的偏微分方程依然是线性的，但是常微分方程大都是非线性的。之后的章节中会遇到越来越多的非线性常微分和偏微分方程。换言之，伴随着几何上从外在转向内蕴，所用的分析工具也由线性微分方程，逐步转化到非线性偏微分方程。这一章的内容实际上是整个讲义中和微分方程联系最紧密最复杂的；换个角度，对于几何直观较好，但是分析功底相对薄弱的同学来说，也是最困难，最不友好的。为了把分析结论和几何结论之间，以及这些分析结论之间复杂的关系理清楚，我花费了最多的时间来撰写这一章内容及其附录；我个人也非常建议有志于从事微分几何科研的同学能把这一章的内容认真吃透。

# Chapter 6

## 曲面间的映射

这一章里，我们恢复使用 Gauss 记号。

### 6.1 曲面之间的映射及其切映射

#### 6.1.1 曲面间的映射

已知  $\sigma$  是由曲面  $S_1$  到曲面  $S_2$  的映射:  $\sigma(p) = q$ , 其中点  $p \in S_1$ , 点  $q \in S_2$ 。设正则参数曲面  $S_1$  和  $S_2$  的参数方程分别为  $\vec{r}_1(u_1, v_1)$ ,  $(u_1, v_1) \in D_1$ ,  $\vec{r}_2(u_2, v_2)$ ,  $(u_2, v_2) \in D_2$ 。由于正则参数曲面局部上点和坐标是一一对应的, 不妨记点  $p$  的坐标为  $(u_1(p), v_1(p))$ , 点  $q$  的坐标为  $(u_2(q), v_2(q))$ , 于是有  $\sigma(\vec{r}_1(u_1(p), v_1(p))) = \vec{r}_2(u_2(q), v_2(q))$ 。约定  $\tilde{\sigma}((u_1(p), v_1(p))) = (u_2(q), v_2(q))$ , 当  $p$  点取遍整个曲面  $S_1$  时, 我们构造出了另外一个映照  $\tilde{\sigma}: D_1 \rightarrow D_2$ , 使得对任意  $(u_1, v_1) \in D_1$ , 都有

$$\sigma(\vec{r}_1(u_1, v_1)) = \vec{r}_2(\tilde{\sigma}(u_1, v_1))$$

反之, 给定满足上述关系的  $\tilde{\sigma}$ , 也可以够造出  $\sigma$ , 两者本质上等价。这样我们就可以通过  $\tilde{\sigma}$  来研究  $\sigma$ <sup>1</sup>。

我们通常把函数  $\tilde{\sigma}$  称为曲面间映射  $\sigma$  的参数化。不妨设  $\tilde{\sigma}$  可具体写为  $\begin{cases} u_2 = f(u_1, v_1) \\ v_2 = g(u_1, v_1) \end{cases}$ 。

如果  $\tilde{\sigma}$  是连续可微的 (二元函数  $f, g$  均连续可微), 则称  $\sigma$  是连续可微的。很容易看出,

<sup>1</sup>有些文献为了简洁, 在上下文清晰的情况下, 也把  $\tilde{\sigma}$  直接记为  $\sigma$ , 对两者不进行区分。

映射的连续可微性与曲面的容许参数变换无关。方便起见, 不加声明的情况下, 总是假定曲面间的映射是 3 次以上连续可微的。

### 6.1.2 切映射

我们总是习惯于考虑曲线和曲面的线性化, 同样也可以考虑映射的“线性化”, 即所谓的映射的切映射。若  $q = \sigma(p)$ , 则  $\sigma$  诱导出从切空间  $T_p S_1$  到  $T_q S_2$  的一个线性映射  $\sigma_{*p}$ , 称为映射  $\sigma$  在点  $p$  的切映射。切映射的具体构造过程如下: 若有  $S_1$  上一条连续可微曲线  $C_1$ ,

$$\vec{r}_1(u_1(t), v_1(t)), \quad \vec{r}_1(u_1(0), v_1(0)) = p$$

它在  $\sigma$  下映射为曲面  $S_2$  上的一条连续可微曲线  $C_2$

$$\sigma(\vec{r}_1(u_1(t), v_1(t))) = \vec{r}_2(u_2(t), v_2(t)), \quad \vec{r}_2(u_2(0), v_2(0)) = q$$

不妨设曲面间的映射  $\sigma$  可以表示为  $\tilde{\sigma}(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$ , 并具体写为 
$$\begin{cases} u_2 = f(u_1, v_1) \\ v_2 = g(u_1, v_1) \end{cases},$$

则根据曲面间映射的基本性质, 曲线  $C_2$  的方程还可以改写为

$$\vec{r}_2(\tilde{\sigma}(u_1(t), v_1(t))) = \vec{r}_2(f(u_1(t), v_1(t)), g(u_1(t), v_1(t)))$$

约定  $\sigma_{*p}$  将参数曲线  $C_1$  在  $p$  点处的切向量, 映到参数曲线  $C_2$  在  $q$  点处的切向量:

$$\sigma_{*p} \left( \left. \frac{d}{dt} \vec{r}_1(u_1(t), v_1(t)) \right|_{t=0} \right) = \left. \frac{d}{dt} \vec{r}_2(u_2(t), v_2(t)) \right|_{t=0}$$

我们希望得到  $\sigma_{*p}$  的具体形式。此时,  $C_1$  在  $p$  点处的切向量为

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_1(u_1(t), v_1(t)) = \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u_1} \frac{du_1(t)}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v_1} \frac{dv_1(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{du_1(t)}{dt} & \frac{dv_1(t)}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v_1} \end{pmatrix}$$

再来计算  $C_2$  在  $q$  点处的切向量,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{r}_2(u_2(t), v_2(t)) &= \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial u_2} \frac{du_2(t)}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial v_2} \frac{dv_2(t)}{dt} \\ &= \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial u_2} \left( \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial u_1} \frac{du_1(t)}{dt} + \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial v_1} \frac{dv_1(t)}{dt} \right) \\ &\quad + \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial v_2} \left( \frac{\partial g(u_1, v_1)}{\partial u_1} \frac{du_1(t)}{dt} + \frac{\partial g(u_1, v_1)}{\partial v_1} \frac{dv_1(t)}{dt} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{du_1(t)}{dt} & \frac{dv_1(t)}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial u_1} & \frac{\partial g(u_1, v_1)}{\partial v_1} \\ \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial v_1} & \frac{\partial g(u_1, v_1)}{\partial u_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial v_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & \sigma_{*p} \left( \begin{pmatrix} \frac{du_1(t)}{dt} & \frac{dv_1(t)}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v_1} \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{du_1(t)}{dt} & \frac{dv_1(t)}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial u_1} & \frac{\partial g(u_1, v_1)}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial v_1} & \frac{\partial g(u_1, v_1)}{\partial v_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial v_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

可见,  $\sigma_{*p}$  确实是个线性映射。于是  $\sigma$  诱导出从切空间  $T_p S_1$  到  $T_q S_2$  的一个线性映射  $\sigma_{*p}$ , 称为映射  $\sigma$  在点  $p$  的切映射。且其在基底下的矩阵表示为:

$$\sigma_{*p} \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial u_1} & \frac{\partial g(u_1, v_1)}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial v_1} & \frac{\partial g(u_1, v_1)}{\partial v_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial v_2} \end{pmatrix}$$

也就是说, 切映射在切空间基底下对应的矩阵, 就是映射  $\tilde{\sigma} : \begin{cases} u_2 = f(u_1, v_1) \\ v_2 = g(u_1, v_1) \end{cases}$  的

Jacobi 矩阵。同时, 切映射也可以像映射一样, 进行复合运算, 参考附录G。

## 6.2 Gauss 映射

### 6.2.1 Gauss 映射及其切映射

设  $S: \vec{r}(u, v)$  是一块正则曲面, 每点处有确定的法向量  $\vec{n}(u, v)$ 。将  $\vec{n}(u, v)$  平行移动到坐标原点  $O$ , 终点便落在单位球面  $\Sigma$  上。于是有一个可微映射  $\mathcal{G}: S \rightarrow \Sigma$ , 使得

$$\mathcal{G}(\vec{r}(u, v)) = \vec{n}(u, v)$$

我们称之为 Gauss 映射。

直观上看, 当曲面  $S$  弯曲得比较厉害时, 法向量场  $\vec{n}$  在  $\Sigma$  上所扫过的面积与  $\vec{r}$  在曲面上所扫过的面积之比就比较大。要定量地描述固定点处的弯曲程度, 需要我们考虑在固定点处无穷小面积元之间的比值。具体来看, 在  $p$  点处, 考虑由点  $(u_0, v_0)$ ,  $(u_0 + \Delta u, v_0)$ ,  $(u_0, v_0 + \Delta v)$ ,  $(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$  之间的坐标曲线所围成的曲边四边形, 记为  $Q(\Delta u, \Delta v)$ , 它在 Gauss 映射下的像记为  $\mathcal{G}(Q(\Delta u, \Delta v))$ , 是以点  $\vec{n}(u_0, v_0)$ ,  $\vec{n}(u_0 + \Delta u, v_0)$ ,  $\vec{n}(u_0, v_0 + \Delta v)$ ,  $\vec{n}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$  为顶点的曲边四边形。考虑

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0, \Delta v \rightarrow 0} \frac{A_{\mathcal{G}(Q)}(\Delta u, \Delta v)}{A_Q(\Delta u, \Delta v)}$$

注意到当  $\Delta u, \Delta v$  足够小时,  $Q(\Delta u, \Delta v)$  可近似看作由  $\vec{r}_u \Delta u$  和  $\vec{r}_v \Delta v$  所张成的平行四边形。而  $\mathcal{G}(Q(\Delta u, \Delta v))$  也可以由该平行四边形在  $\mathcal{G}$  的切映射下的像代替。也就是需要我们来考察 Gauss 映射  $\mathcal{G}$  的切映射:

$$\mathcal{G}_* : T_p S \rightarrow T_{\mathcal{G}(p)} \Sigma$$

设曲面  $S$  上一条曲线的参数方程为  $\vec{r}(u(t), v(t))$ 。它在 Gauss 映照下的像是

$$\mathcal{G}(\vec{r}(u(t), v(t))) = \vec{n}(u(t), v(t))$$

根据切映射的定义,

$$\mathcal{G}_* \left( \vec{r}_u \frac{du(t)}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv(t)}{dt} \right) = \frac{d\vec{n}(u(t), v(t))}{dt} = \vec{n}_u \frac{du(t)}{dt} + \vec{n}_v \frac{dv(t)}{dt}$$

即在基底上:

$$\mathcal{G}_*(\vec{r}_u) = \vec{n}_u,$$

$$\mathcal{G}_*(\vec{r}_v) = \vec{n}_v.$$

于是切映射  $\mathcal{G}_*$  将  $\vec{r}_u \Delta u, \vec{r}_v \Delta v$  张成的平行四边形映为  $\vec{n}_u \Delta u, \vec{n}_v \Delta v$  张成的平行四边形。于是有

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0, \Delta v \rightarrow 0} \frac{A_{\mathcal{G}(Q)}(\Delta u, \Delta v)}{A_Q(\Delta u, \Delta v)} = \frac{|\vec{n}_u \times \vec{n}_v|}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}.$$

同时注意到  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  和  $\vec{n}_u, \vec{n}_v$  均和  $\vec{n}$  垂直。也就是存在数  $K$  使得:  $\vec{n}_u \times \vec{n}_v = K \vec{r}_u \times \vec{r}_v$ 。现在来求出  $K$  的具体表达式。注意到  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  是切平面的一组基, 令

$$\vec{n}_u = A\vec{r}_u + B\vec{r}_v$$

$$\vec{n}_v = C\vec{r}_u + D\vec{r}_v$$

方程左右两端分别与  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  做内积, 有

$$-L = AE + BF, \quad -M = CE + DF$$

$$-M = AF + BG, \quad -N = CF + DG$$

写成矩阵形式即

$$-\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

于是可解得:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

即

$$\mathcal{G}_* \begin{pmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{pmatrix}$$

此时

$$\vec{n}_u \times \vec{n}_v = -(A\vec{r}_u + B\vec{r}_v) \times -(C\vec{r}_u + D\vec{r}_v) = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \vec{r}_u \times \vec{r}_v$$

于是

$$K = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}$$

回忆一下主曲率和 Gauss 曲率的内容，也就是说这里的  $K$  就等于曲面的 Gauss 曲率，即  $K = \kappa_1 \kappa_2$ 。 $|K|$  的大小表示曲面弯曲的程度<sup>1</sup>。

## 6.2.2 Gauss 映射的切映射和 Weingarten 映射的关系

上一小节我们从 Gauss 映射的角度重构了 Gauss 曲率。这意味着 Gauss 映射，特别是 Gauss 映射的切映射和第二基本形式仍然有着密切的关联，有必要深入挖掘。

在第三章中，我们介绍了由第二基本形式决定的自伴随映射 Weingarten 映射，它在基底  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  下的矩阵为  $W = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$ 。而 Gauss 映射的切映射  $\mathcal{G}_*$  虽然是从  $T_p S$  映到  $T_{\mathcal{G}(p)} \Sigma$ ，然而注意到  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  和  $\vec{n}_u, \vec{n}_v$  均和  $\vec{n}$  都垂直，即我们可以适当地平移  $T_{\mathcal{G}(p)} \Sigma$  使它和  $T_p S$  重合，将  $\mathcal{G}_*$  视为  $T_p S$  上的一个线性变换。我们已经计算出  $\mathcal{G}_*$  在基底  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  下的矩阵为  $-W$ ，即 Weingarten 映射  $\mathcal{W} = -\mathcal{G}_*$ 。或者换个角度，我们知道 Weingarten 映射可以表示为  $\mathcal{W}(X) = -\frac{\partial \vec{n}}{\partial X}$ ，而  $\frac{\partial \vec{n}}{\partial X} = d\vec{n}(X)$  就代表着 Gauss 映射的切映射在切向量  $X$  处的取值。

更本质的看法则是，Gauss 映射的切映射，就是通过几何的方式，将原先代数方法得到的 Weingarten 映射重构出来。当然 Weingarten 映射并不完全是 Gauss 映射的切映射，但没有本质的区别；添加一个负号完全是为了计算和表达的简便，并无实质影响（否则需要重新定义第二基本形式）。

也正因如此，由 Weingarten 映射决定的主曲率  $\kappa_1, \kappa_2$ ，进而决定了 Gauss 曲率  $\kappa_1 \kappa_2$ ，自然和 Gauss 映射导出的表示曲面弯曲程度的数值  $K$  本质相同。

<sup>1</sup> $K$  的正负的几何意义从内蕴几何角度解释起来比较复杂，如果将曲面放置在三维欧氏空间中，则表明了曲面在两个主方向上的弯曲方向相同或者相反。

## 6.3 保长映射

已经知道, 两条正则参数曲线  $C_1, C_2$ , 必可取弧长参数得参数方程  $\vec{r}_1(s), \vec{r}_2(s)$ ; 我们考虑映射  $\sigma: C_1 \rightarrow C_2, \sigma(\vec{r}_1(s)) = \vec{r}_2(s)$ , 它只保持弧长, 不保持曲率和挠率, 也就是不保持曲线的形状。形象地讲, 可以在不改变曲线“密度”的情况下, 把曲线摆成任何的形状。

我们自然也希望曲面  $S_1$  和  $S_2$  之间也有一种曲面间的映射  $\sigma$ , 该映射下, 曲面  $S_1$  上任意一条曲线的长度和其在  $S_2$  上的象曲线的长度相同, 即所谓的保长映射 (严格定义稍后给出)。

如何才能保持曲线的长度不变? 根据曲线弧长的计算方法, 实际是保持曲线的切向量长度不变, 也就是每一点的切映照都保持切向量的长度不变。具体来看

定义 6.1. 设  $\sigma: S_1 \rightarrow S_2$  为正则参数曲面间 3 次以上连续可微映射。如果在每一点  $p \in S_1$ , 对任意的  $X \in T_p S_1$ , 都有  $|\sigma_{*p}(X)| = |X|$ , 则称  $\sigma$  是保长映射<sup>1</sup>。

我们需要注意的是

- 根据内积和长度的关系  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$ , 保长即保内积, 当然也保角度, 也就意味着两张曲面在保长映射下“形状”完全相同。
- 很容易证明, 保长映射也保持面积。
- 保长映射的定义, 和曲面参数的选取没有关系。

### 6.3.1 保长映射的判定法则

判断一个映射是否保长, 如果直接按照定义, 需要对全部的  $X \in T_p S_1$  来验证  $|\sigma_{*p}(X)| = |X|$ , 计算量太大。我们希望利用  $\sigma_{*p}$  的线性得到更简洁的等价判别法则。

不妨设

$$X = a \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u_1} + b \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v_1} = (a, b) \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v_1} \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup>有时也称为保长对应。

我们之前已经提到过,  $|X|^2$  即为如下的二次型的值:

$$|X|^2 = (a, b) \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a, b) \begin{pmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

而

$$\sigma_{*p}(X) = \sigma_{*p}\left(a \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u_1} + b \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v_1}\right) = (a, b) \sigma_{*p} \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v_1} \end{pmatrix}$$

我们已经知道:

$$\sigma_{*p} \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial u_1} & \frac{\partial g(u_1, v_1)}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial v_1} & \frac{\partial g(u_1, v_1)}{\partial v_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial v_2} \end{pmatrix}$$

为了书写简便, 记

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial u_1} & \frac{\partial g(u_1, v_1)}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial v_1} & \frac{\partial g(u_1, v_1)}{\partial v_1} \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} |\sigma_{*p}(X)|^2 &= (a, b) J \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial v_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial u_2} & \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial v_2} \end{pmatrix} J^T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= (a, b) J \begin{pmatrix} E_2 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{pmatrix} J^T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所谓保长对应, 即对任意的  $(a, b)$ , 均有

$$(a, b) \begin{pmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a, b) J \begin{pmatrix} E_2 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{pmatrix} J^T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

从而这两个二次型所对应的矩阵必然相等。从而得到

**定理 6.2.** 假定正则参数曲面  $S_1$  和  $S_2$  的第一类基本量分别是  $E_1(u_1, v_1), F_1(u_1, v_1), G_1(u_1, v_1)$  和  $E_2(u_2, v_2), F_2(u_2, v_2), G_2(u_2, v_2)$ , 则  $\sigma: S_1 \rightarrow S_2$  是保长映射的充分必要条件是:

$$\begin{pmatrix} E_1(u_1, v_1) & F_1(u_1, v_1) \\ F_1(u_1, v_1) & G_1(u_1, v_1) \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} E_2(u_2, v_2) & F_2(u_2, v_2) \\ F_2(u_2, v_2) & G_2(u_2, v_2) \end{pmatrix} J^T$$

其中

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial v_1} & \frac{\partial v_2}{\partial v_1} \end{pmatrix}$$

这一定理告诉我们, 如果已经知道了映射  $\sigma$ , 我们可以很容易的利用上述等式判别映射  $\sigma$  是否为保长映射。

然而, 实际中的问题却往往不是这样。更多的时候, 我们是知道了两个曲面  $S_1, S_2$  的参数方程 (自然也知道它们的第一基本形式), 来看它们之间是否可以建立保长映射 (看这两个曲面是否“形状相同”)。也就是说此时的  $f, g$  是未知函数, 需要通过求解上述微分方程来得到。

直接根据保长映射判别法则求解偏微分方程组是相当困难的, 所以我们先引入保长映射判别法则的一个推论。

**推论 6.3.** 在正则参数曲面  $S_1$  和  $S_2$  之间存在保长对应的充分必要条件是, 能够在曲面  $S_1$  和  $S_2$  上取到参数系, 都记成  $(u, v)$ , 使得这两个曲面有相同的第一基本量, 即

$$E_1(u, v) = E_2(u, v), F_1(u, v) = F_2(u, v), G_1(u, v) = G_2(u, v).$$

推论证明的基本思路在于改变其中一个曲面上的参数, 使得新的参数系下的第一类基本量与另一个曲面上的第一类基本量相等。但是, 在目前的框架下, 我们一旦要改变  $S_1$  或者  $S_2$  的参数话,  $\tilde{\sigma}$  也会随之改变。为了能更好地选取曲面的参数, 我们需要改变一下对曲面的观点。

### 6.3.2 抽象曲面片的参数化

注意到, 我们目前所研究的参数曲面是指一个连续映射  $S: D \rightarrow E^3$ , 其中  $D$  为  $E^2$  中的一个二维区域, 也就是并非整体曲面, 而是曲面上同胚与  $\mathbb{R}^2$  中开集的部分。由于曲面上的点和  $\mathbb{R}^2$  上的数对  $(u, v)$  是一一对应的, 不妨把映射  $S: D \rightarrow E^3|_S$  方向反过来。

**定义 6.4.** 一张抽象的曲面片是指一个开集  $U$ ,  $\mathbb{R}^2$  中的一个开集  $D$ , 以及一个一一的连续映射  $\phi: U \rightarrow D$ 。

这里  $\phi$  是可逆的, 故  $\phi^{-1}: D \rightarrow U$ 。特别地, 如果开集  $U$  恰好为  $E^3$  中的  $S$  话, 此时的  $\phi^{-1}$  就是  $\tilde{r}(u, v)$ 。可见曲面片是三维欧氏空间中曲面局部的推广<sup>1</sup>。

由于本课程研究仍然局限于  $E^3$  中的曲面  $S$ , 故我们这里就用记号  $S$  来替代  $U$ 。

<sup>1</sup>这里曲面片的定义, 实际上是截取了拓扑流形定义的一部分, 但限于篇幅, 以及讨论的重点, 我们这里对流形不做介绍, 感兴趣的同学可以参考<sup>[9]</sup>。

**定义 6.5.**  $\phi: S \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$  称为曲面片  $S$  的一个参数化。对于  $p \in S$ ,  $(u, v) = \phi(p)$  称为点  $p$  的坐标。

假如  $S$  还有另外一个参数化,  $\psi: S \rightarrow \tilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ , 若  $\psi \circ \phi^{-1}: D \rightarrow \tilde{D}$  是三次以上连续可微的, 则称这两个参数化相容。

需要注意的是, 现阶段使用曲面片的参数化这种语言, 和之前曲面的参数方程这种语言, 并没有实质区别, 仅仅只是一一映射的方向不同而已。因为我们之后研究曲面的内蕴几何, 往往仅仅涉及到曲面的第一基本形式, 而不涉及到曲面的具体参数方程, 使用曲面片的参数化会给我们的讨论带来很大方便。

再来看曲面片之间的映射。若  $\sigma$  是由  $S_1$  到  $S_2$  映射, 则  $\psi \circ \sigma \circ \phi^{-1}: D \rightarrow \tilde{D}$  称为映射  $\sigma$  的参数化, 不难发现, 这正是我们之前引入的  $\tilde{\sigma}$ 。

### 6.3.3 曲面间映射的适用参数系

仍然记  $\sigma$  是  $S_1$  到  $S_2$  的映射, 且  $\sigma(p) = q$ 。现在我们假定切映射  $\sigma_{*p}$  非退化。具体来说, 若  $\tilde{\sigma}(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$  可具体写为 
$$\begin{cases} u_2 = f(u_1, v_1) \\ v_2 = g(u_1, v_1) \end{cases},$$
 则矩阵  $\begin{pmatrix} \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial u_1} & \frac{\partial g(u_1, v_1)}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial v_1} & \frac{\partial g(u_1, v_1)}{\partial v_1} \end{pmatrix}$  非退化。这意味着在较小的一个邻域内,  $\tilde{\sigma}: D_1 \rightarrow D_2$  是一个可逆映射。即  $\tilde{\sigma}^{-1}$  存在且连续可微。我们断言, 可以选取新的合适的参数化, 使得映射  $\sigma$  的参数化简单。具体来看, 不妨设此时  $\phi_1: S_1 \rightarrow D_1$ ,  $\phi_2: S_2 \rightarrow D_2$ 。考虑  $S_2$  的新的参数化:  $\tilde{\sigma}^{-1} \circ \phi_2: S_2 \rightarrow D_1$ , 此时映射  $\sigma$  新的参数化

$$\tilde{\sigma}' = \tilde{\sigma}^{-1} \circ \phi_2 \circ \sigma \circ \phi_1^{-1} = \tilde{\sigma}^{-1} \circ \sigma = Id$$

换成我们熟悉的语言, 这里相当于我们将  $S_2$  的参数  $(u_2, v_2)$  做容许参数变换  $\tilde{\sigma}$ , 变

为  $(u_1, v_1)$ 。容许参数变换具体写出即 
$$\begin{cases} u_2 = f(u_1, v_1) \\ v_2 = g(u_1, v_1) \end{cases},$$
 而且此时的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial u_1} & \frac{\partial g(u_1, v_1)}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial v_1} & \frac{\partial g(u_1, v_1)}{\partial v_1} \end{pmatrix}^{-1}.$$

也可以重新参数化  $S_1$  为  $\tilde{\sigma} \circ \phi_1$ , 让  $S_1$  上的参数变为  $(u_2, v_2)$ , 相当于对  $S_1$  的参数  $(u_1, v_1)$  做容许参数变换  $\tilde{\sigma}^{-1}$ 。这两种处理方式没有本质区别。

简单地讲, 就是如果切映射非退化, 则映射本身是局部一一的, 所以我们可以用同样的参数来同时参数化两个曲面。这样的参数系叫做映射  $\sigma$  的适用参数系, 它会使得映

射  $\sigma$  的参数化变为恒同映射。为了书写方便, 我们将  $S_1$  和  $S_2$  两边的适用参数系同一记为  $(u, v)$ , 不加区分。

### 6.3.4 保长映射的存在性

现在我们开始证明推论6.3。先证充分性。直接取  $\tilde{\sigma}(u, v) = (u, v)$ , 进而得到曲面间映射  $\sigma$ 。此时切映射  $\sigma_*$  对应的 Jacobi 矩阵  $J$  就是单位矩阵  $Id$ , 再由  $E_1(u, v) = E_2(u, v)$ ,  $F_1(u, v) = F_2(u, v)$ ,  $G_1(u, v) = G_2(u, v)$ , 自然满足保长映射的判定法则, 故这样构造出的映射  $\sigma$  就是保长映射。

再证必要性。不妨设曲面  $S_1$  上的参数系为  $(u_1, v_1)$ , 第一类基本量为  $E_1(u_1, v_1), F_1(u_1, v_1), G_1(u_1, v_1)$ ,  $S_2$  上的参数系为  $(u_2, v_2)$ , 第一类基本量为  $E_2(u_2, v_2), F_2(u_2, v_2), G_2(u_2, v_2)$ 。如果有保长

映射  $\tilde{\sigma} : \begin{cases} u_2 = f(u_1, v_1) \\ v_2 = g(u_1, v_1) \end{cases}$  存在, 根据保长映射的判定法则, 有

$$\begin{pmatrix} E_1(u_1, v_1) & F_1(u_1, v_1) \\ F_1(u_1, v_1) & G_1(u_1, v_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v_1} & \frac{\partial g_2}{\partial v_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2(u_2, v_2) & F_2(u_2, v_2) \\ F_2(u_2, v_2) & G_2(u_2, v_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v_1} & \frac{\partial g_2}{\partial v_1} \end{pmatrix}^T \quad (6.1)$$

注意到上式中两个度量矩阵都是满秩的, 故矩阵  $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v_1} & \frac{\partial g_2}{\partial v_1} \end{pmatrix}$  也可逆<sup>1</sup>。于是映射  $\sigma$  非退

化, 从而我们可以在  $S_2$  上取映射  $\sigma$  的适用参数系  $\tilde{u}_2, \tilde{v}_2$ , 使得  $\sigma$  可以表示为  $\tilde{\sigma}' : \begin{cases} \tilde{u}_2 = u_1 \\ \tilde{v}_2 = v_1 \end{cases}$ 。

接下来我们计算  $S_2$  在新参数系  $\tilde{u}_2, \tilde{v}_2$  下的第一基本形式。由于  $S_2$  上的容许参数变换为  $\begin{cases} u_2 = f(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2) \\ v_2 = g(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2) \end{cases}$ , 根据第一类基本量的变化规律, 有

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_2(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2) & \tilde{F}_2(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2) \\ \tilde{F}_2(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2) & \tilde{G}_2(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{u}_2} & \frac{\partial v_2}{\partial \tilde{u}_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{v}_2} & \frac{\partial v_2}{\partial \tilde{v}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2(u_2, v_2) & F_2(u_2, v_2) \\ F_2(u_2, v_2) & G_2(u_2, v_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{u}_2} & \frac{\partial v_2}{\partial \tilde{u}_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{v}_2} & \frac{\partial v_2}{\partial \tilde{v}_2} \end{pmatrix}^T \quad (6.2)$$

对比(6.1)和(6.2)两式,  $S_1$  的第一类基本量  $\begin{pmatrix} E_1(u_1, v_1) & F_1(u_1, v_1) \\ F_1(u_1, v_1) & G_1(u_1, v_1) \end{pmatrix}$  和  $S_2$  新的第一类基

本量  $\begin{pmatrix} \tilde{E}_2(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2) & \tilde{F}_2(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2) \\ \tilde{F}_2(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2) & \tilde{G}_2(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2) \end{pmatrix}$  相同。最后, 将  $(u_1, v_1), (\tilde{u}_2, \tilde{v}_2)$  均记为  $(u, v)$ , 则曲面  $S_1$  和  $S_2$  有着相同的第一类基本量。必要性得证。

<sup>1</sup>也可以直接从保长映射的定义  $|\sigma_{*p}(X)| = |X|$  看出抽象的线性映射  $\sigma_{*p}$  一定将非零的切向量映为非零的切向量, 必然非退化; 从而其矩阵表示 (Jacobi 阵) 也非退化。

直接使用推论6.3来寻找曲面间的保长映射，仍需要对曲面做参数变换，同样会出现 Jacobi 矩阵，和原有的定理6.2一样复杂。解决寻找保长映射这一问题，最终需要我们引入：

**推论 6.6.** 在正则参数曲面  $S_1$  和  $S_2$  之间存在保长对应的充分必要条件是，能够在曲面  $S_1$  和  $S_2$  上取到参数系，都记成  $(u, v)$ ，使得这两个曲面有相同的第一基形式的表达式<sup>1</sup>。

根据推论6.3，上述推论的成立是显然的，我们重点来看它的应用。

**例 6.7.** 证明在螺旋面  $\vec{r}_1 = (u \cos v, u \sin v, u+v)$  和旋转单叶双曲面  $\vec{r}_2 = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \sqrt{\rho^2 - 1})$  ( $\rho \geq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) 之间可以建立保长对应。

**证明.** 保长对应只和第一基本形式有关，故直接计算两曲面的第一基本形式：

$$I_1 = 2(\mathrm{d}u)^2 + 2\mathrm{d}u\mathrm{d}v + (u^2 + 1)(\mathrm{d}v)^2$$

$$I_2 = \frac{2\rho^2 - 1}{\rho^2 - 1}(\mathrm{d}\rho)^2 + \rho^2(\mathrm{d}\theta)^2$$

回忆5.2.3小节中，第一基本形式  $I_2$  中没有交叉项意味着对应正交参数系，已经比较简单，我们选择将  $I_1$  通过参数变换，改写为  $I_2$  的形式。同样在5.2.3小节，我们知道构建正交参数系，也就是消去交叉项，最方便的办法是对第一基本形式进行配方。于是将  $I_1$  关于  $(\mathrm{d}v)^2$  配方<sup>2</sup>，有

$$I_1 = 2(\mathrm{d}u)^2 + (u^2 + 1) \left( 2\frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 1}\mathrm{d}v + (\mathrm{d}v)^2 \right)$$

$$= \left( 2 - \frac{1}{u^2 + 1} \right) (\mathrm{d}u)^2 + (u^2 + 1) \left( \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 1} + \mathrm{d}v \right)^2$$

$$= \frac{2u^2 + 1}{u^2 + 1} (\mathrm{d}u)^2 + (u^2 + 1) (\mathrm{d}(\arctan u + v))^2$$

初步令  $\begin{cases} \tilde{u} = u \\ \tilde{v} = \arctan u + v \end{cases}$ ，此时

$$I_1 = \frac{2\tilde{u}^2 + 1}{\tilde{u}^2 + 1} (\mathrm{d}\tilde{u})^2 + (\tilde{u}^2 + 1) (\mathrm{d}\tilde{v})^2$$

<sup>1</sup>严格地讲，是  $S_2$  上的第一基本形式在拉回映射下和  $S_1$  上的第一基本形式一致。但是一方面，拉回映射的引入需要流形的概念作为基础，另一方面，在构建保长映射的具体运算中也不需要拉回映射，所以我们选择模糊这一概念

<sup>2</sup>到底是关于  $(\mathrm{d}u)^2$  配方，还是关于  $(\mathrm{d}v)^2$  配方，需要尝试，目前并不能提前判断。

再比较  $I_1$  与  $I_2$ , 有一个共同点是系数分别仅和  $\tilde{u}, \rho$  有关, 和  $\tilde{v}, \theta$  无关。故令  $\tilde{u}^2 + 1 = \rho^2$ ,  $\tilde{v} = \theta$ , 此时  $\tilde{u} = \sqrt{\rho^2 - 1}$ , 于是

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2\rho^2 - 1}{\rho^2} (\mathrm{d}\sqrt{\rho^2 - 1})^2 + \rho^2 (\mathrm{d}\theta)^2 \\ &= \frac{2\rho^2 - 1}{\rho^2 - 1} (\mathrm{d}\rho)^2 + \rho^2 (\mathrm{d}\theta)^2 \end{aligned}$$

和  $I_2$  有相同的形式。根据推论6.6, 两张曲面之间存在保长对应。  $\square$

实际上, 我们还可以把具体的保长对应写出来。最终的参数变换为

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{u^2 + 1} \\ \theta = \arctan u + v \end{cases}$$

把这一参数变换代入  $S_2$  的参数方程:  $\theta = \arctan u + v$  等价于

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{u \cos v + \sin v}{\sqrt{u^2 + 1}} \\ \cos \theta = \frac{\cos v - u \sin v}{\sqrt{u^2 + 1}} \end{cases}$$

即  $S_2$  新的参数方程为

$$\tilde{r}_2(u, v) = (u \cos v + \sin v, \cos v - u \sin v, u)$$

此时的保长映射是由所谓的适用参数系  $\tilde{\sigma} : \begin{cases} u = u \\ v = v \end{cases}$  给出。几何上看,

- 将螺旋面的  $u$ - 曲线 (直线) 映为旋转单叶双曲面的直母线;
- 将螺旋面  $u = 0$  的特殊的  $v$ - 曲线 (直线) 映为旋转单叶双曲面的腰圆。

使用推论6.6需要注意的要点:

- 没有去直接求解方程，太复杂了，而是用“拼凑”的方法；
- 实际上，因为我们没有引入所谓拉回映射，因而也没有办法直接比较不同两个曲面上的第一基本形式。所以寻找保长映射过程中真正使用的是推论6.3：我们通过参数变换，让两张曲面上的第一类基本量完全相同；
- 而最后用第一基本形式，而不是第一类基本量来表达的原因在于形式的不变性，否则每次参数变换都附加 Jacobi 阵的话过程会非常复杂，用第一基本形式避免了显式出现 Jacobi 阵。

### 6.3.5 Gauss 曲率在保长映射存在性中的应用

注意到保长映射保持曲面的第一基本形式不变，而 Gauss 曲率也是由曲面的第一基本形式决定，从而有 Gauss 绝妙定理的另外一种形式：

**定理 6.8.** Gauss 曲率是保长变换的不变量。

有了 Gauss 绝妙定理，我们返回头再来看刚才的例子6.7，会有怎样的新思路来寻找保长映射？原先的做法是直接计算两曲面的第一基本形式：

$$I_1 = 2(du)^2 + 2dudv + (u^2 + 1)(dv)^2$$

$$I_2 = \frac{2\rho^2 - 1}{\rho^2 - 1}(d\rho)^2 + \rho^2(d\theta)^2$$

然后观察并拼凑。事实上，现在因为已经知道 Gauss 曲率是保长映射的不变量，如果两张曲面确实可以建立保长映射，则保长映射下有着相同的 Gauss 曲率。故我们可以先计算 Gauss 曲率，通过比较 Gauss 曲率来给我们更明确的拼凑目标。

先来计算  $S_1$  的 Gauss 曲率，通过第一和第二基本形式共同来计算更为简单。 $S_1$  的第二基本形式为

$$\frac{1}{\sqrt{2u^2 + 1}}(-2dudv + u^2(dv)^2)$$

从而  $K_1 = -\frac{1}{(2u^2 + 1)^2}$ 。

再来计算  $S_2$  的 Gauss 曲率，虽然是正交参数网，通过第一基本形式直接计算仍然很复杂。还是利用第二基本形式计算。 $S_2$  的第二基本形式为

$$\frac{\sqrt{\rho^2 - 1}}{\sqrt{2\rho^4 - \rho^2}}\left(-\frac{\rho}{(\sqrt{\rho^2 - 1})^3}(d\rho)^2 + \frac{\rho^3}{\sqrt{\rho^2 - 1}}(d\theta)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\rho^2 - 1}}\left(-\frac{1}{\rho^2 - 1}(d\rho)^2 + \rho^2(d\theta)^2\right)$$

从而  $K_2 = -\frac{1}{(2\rho^2-1)^2}$ 。

此时,  $K_1 = -\frac{1}{(2u^2+1)^2}$  和  $K_2 = -\frac{1}{(2\rho^2-1)^2}$  的表达式并不相同, 但是可以令  $-\frac{1}{(2u^2+1)^2} = -\frac{1}{(2\rho^2-1)^2}$ 。此时  $\rho = \sqrt{u^2+1}$ , 即  $u = \sqrt{\rho^2-1}$ 。

**上述对应是否就能给出保长对应?** 因为 Gauss 曲率相等只是必要条件, 目前并不确定。最终仍需要变换为相同的第一基本形式。先将  $u = \sqrt{\rho^2-1}$  代入  $I_1$ , 有

$$\begin{aligned} I_1 &= 2(du)^2 + 2dudv + (u^2+1)(dv)^2 \\ &= \frac{2\rho^2}{\rho^2-1}(d\rho)^2 + 2\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2-1}}d\rho dv + \rho^2(dv)^2 \end{aligned}$$

目前两张曲面的第一基本形式并不相同。继续做参数变换, 设法只对  $v$  做变换将  $I_1$  变为正交参数系。将  $\rho^2$  作为后两项的公因子提出, 并配方, 有

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2\rho^2}{\rho^2-1}(d\rho)^2 + \rho^2 \left( 2\frac{1}{\rho\sqrt{\rho^2-1}}d\rho dv + (dv)^2 \right) \\ &= \frac{2\rho^2-1}{\rho^2-1}(d\rho)^2 + \rho^2 \left( \frac{1}{\rho\sqrt{\rho^2-1}}d\rho + dv \right)^2 \end{aligned}$$

令  $d\theta = \frac{1}{\rho\sqrt{\rho^2-1}}d\rho + dv$ , 即

$$\theta = v + \int \frac{1}{\rho\sqrt{\rho^2-1}}d\rho = v - \arcsin \frac{1}{\rho}$$

而

$$\arcsin \frac{1}{\rho} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} = \frac{\pi}{2} - \arctan u$$

最终可得保长对应  $\rho = \sqrt{u^2+1}, \theta = \arctan u + v$ , 和原先的计算一致。

特别需要注意的是, 计算 Gauss 曲率只能给我们拼凑的方向, 并不能完全确定地构造出保长对应。对于例子 6.7, 保长映射之所以能构建成功, 关键在于  $d\tilde{v} = \frac{du}{u^2+1} + dv$ , 或是  $d\theta = \frac{1}{\rho\sqrt{\rho^2-1}}d\rho + dv$  有解, 即一次微分式恰为全微分。换句话说, 最终仍然是要求解方程的, 只是此时的方程已经简化了很多。

继续来看 Gauss 曲率在保长映射中的应用。

**例 6.9.** 平面和单位球面之间不存在保长映射。

很明显, 平面的 Gauss 曲率为零。而单位球面的 Gauss 曲率可以有很多种不同的算法:

1. 直接选择最简单的参数方程  $(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta)$ , 计算第一、第二基本形式, 套用公式即得, 这里不展开了。
2. 对单位球面方程  $|\vec{r}|^2 = 1$  两边微分, 得到  $\vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$ ; 再微分一次, 得到  $d\vec{r} \cdot d\vec{r} + \vec{r} \cdot d^2\vec{r} = 0$ 。注意到对于单位球面而言  $\vec{n}$  可以选为  $\vec{r}$ , 于是  $d\vec{r} \cdot d\vec{r} + \vec{n} \cdot d^2\vec{r} = 0$ , 最终有第一和第二基本形式的关系:  $I + II = 0$ , 进而  $K = 1$ 。
3. 已经知道单位球面点点都是脐点, 考虑相互正交的法截线, 都是单位圆周。而我们知道单位圆周的曲率  $\kappa_r = 1 = \kappa_n$ , 从而两个主曲率  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ 。

总之, 单位球面的 Gauss 曲率为 1。根据 Gauss 曲率在保长映射下的不变性, 平面和单位球面之间不存在保长映射。

例 6.10. 已知曲面  $S$  和  $\tilde{S}$  的参数方程分别是

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \left( au, bv, \frac{1}{2}(au^2 + bv^2) \right) \\ \vec{\tilde{r}} &= \left( \tilde{a}\tilde{u}, \tilde{b}\tilde{v}, \frac{1}{2}(\tilde{a}\tilde{u}^2 + \tilde{b}\tilde{v}^2) \right)\end{aligned}$$

其中,  $ab = \tilde{a}\tilde{b}$ , 但  $(a^2, b^2) \neq (\tilde{a}^2, \tilde{b}^2)$  且  $(a^2, b^2) \neq (\tilde{b}^2, \tilde{a}^2)$ 。证明: 曲面  $S$  和  $\tilde{S}$  间不存在保长对应。

如果按照通常的思路, 应该求出  $S_1$  和  $S_2$  的第一基本形式 (或是第一类基本量)

$$I_1 : a^2(1 + u^2)du^2 + 2abuvdudv + b^2(1 + v^2)dv^2$$

$$I_2 : \tilde{a}^2(1 + \tilde{u}^2)d\tilde{u}^2 + 2\tilde{a}\tilde{b}\tilde{u}\tilde{v}d\tilde{u}d\tilde{v} + \tilde{b}^2(1 + \tilde{v}^2)d\tilde{v}^2$$

然后说明对于任意一个参数变换  $\begin{cases} \tilde{u}(u, v) \\ \tilde{v}(u, v) \end{cases}$ ,  $I_2$  都不会变成  $I_1$ 。但是这样直接证明过于复杂, 实际中不可能有效。

所以我们希望借助于不变量。回忆解析几何中的不变量的内容, 只要我们能说明 Gauss 曲率  $K_1$  和  $K_2$  不相同 (比如一正一负; 或一个大于 1, 一个小于 1), 那么就不可能有保长变换。

为此, 我们先来计算第二基本形式

$$II_1 : \frac{a}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}du^2 + \frac{b}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}dv^2$$

$$II_2: \frac{\tilde{a}}{\sqrt{1+\tilde{u}^2+\tilde{v}^2}}d\tilde{u}^2 + \frac{\tilde{b}}{\sqrt{1+\tilde{u}^2+\tilde{v}^2}}d\tilde{v}^2$$

于是

$$K_1 = \frac{1}{ab(1+u^2+v^2)^2}, \quad K_2 = \frac{1}{\tilde{a}\tilde{b}(1+\tilde{u}^2+\tilde{v}^2)^2}$$

然而当  $\tilde{u} = u, \tilde{v} = v$  时,  $K_1 = K_2$ 。因此不能以此说明不存在保长变换。

也就是对于这个问题, 既不能穷举所有的参数变换来验证, 也不能直接简单粗暴地利用 Gauss 曲率作为不变量。换句话说, 把不变量 Gauss 曲率, 和保长变换的判定: 度量矩阵关于 Jacobi 矩阵合同两者结合起来才有希望。

具体来看, 用反正法。假定存在保长变换  $\begin{cases} \tilde{u} = \tilde{u}(u, v) \\ \tilde{v} = \tilde{v}(u, v) \end{cases}$ , 即

$$\begin{pmatrix} a^2(1+u^2) & abuv \\ abuv & b^2(1+v^2) \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \tilde{a}^2(1+\tilde{u}^2) & \tilde{a}\tilde{b}\tilde{u}\tilde{v} \\ \tilde{a}\tilde{b}\tilde{u}\tilde{v} & \tilde{b}^2(1+\tilde{v}^2) \end{pmatrix} J^T$$

其中,  $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \end{pmatrix}$ 。

同时 Gauss 曲率作为保长映射的不变量, 两曲面的 Gauss 曲率相等

$$\frac{1}{\tilde{a}\tilde{b}(1+\tilde{u}^2+\tilde{v}^2)^2} = \frac{1}{ab(1+u^2+v^2)^2}$$

即

$$\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 = u^2 + v^2$$

希望能和之前的度量矩阵合同产生矛盾。此时直接看并无明显矛盾。为了贴近保长映射判定条件中的 Jacobi 矩阵, 对上式求导得

$$\begin{cases} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} = u \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} = v \end{cases}$$

有些 Jacobi 矩阵的影子, 但还是没有明显的矛盾。继续求导:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial u}\right)^2 + \tilde{u} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial u}\right)^2 + \tilde{v} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial u^2} = 1 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} + \tilde{u} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial u \partial v} + \tilde{v} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} = 0 \\ \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\right)^2 + \tilde{u} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial v}\right)^2 + \tilde{v} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial v^2} = 1 \end{cases}$$

虽然右端简单了, 左端却更复杂了。注意到这些等式都是在整个曲面上都成立的, 而我们要导出矛盾, 只要在一点上就可以。取一个特殊的点,  $\tilde{u} = 0, \tilde{v} = 0$ , 则等式变为

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial u}\right)^2 = 1 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} = 0 \\ \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial v}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

这意味着  $\tilde{u} = 0, \tilde{v} = 0$  时 Jacobi 矩阵是一个正交矩阵, 即

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

更重要的一点, 根据  $\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 = u^2 + v^2$ , 当  $\tilde{u} = 0, \tilde{v} = 0$  时, 只能  $u = 0, v = 0$ 。从而,  $(0, 0)$  点处的保长变换, 需要满足

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}^2 & 0 \\ 0 & \tilde{b}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{a}^2 \cos^2 \theta + \tilde{b}^2 \sin^2 \theta & (\tilde{a}^2 - \tilde{b}^2) \sin \theta \cos \theta \\ (\tilde{b}^2 - \tilde{a}^2) \sin \theta \cos \theta & \tilde{a}^2 \sin^2 \theta + \tilde{b}^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.3)$$

分情况讨论, 不难得到等式(6.3)不可能成立。进而反证中的假设不成立, 例题得证。

最后我们稍微做一些补充, 在验证等式(6.3)不成立的过程中, 如果有好的高等代数基础的话, 完全不需要复杂的分类讨论。具体来看, 在  $(0, 0)$  点处的保长变换满足:

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \tilde{a}^2 & 0 \\ 0 & \tilde{b}^2 \end{pmatrix} J^T$$

同时我们已经计算过  $(0, 0)$  点处的 Jacobi 阵为正交矩阵, 故有  $J^{-1} = J^T$ 。上式可变为

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \tilde{a}^2 & 0 \\ 0 & \tilde{b}^2 \end{pmatrix} J^{-1}$$

这意味着  $\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$  和  $\begin{pmatrix} \tilde{a}^2 & 0 \\ 0 & \tilde{b}^2 \end{pmatrix}$  相似。然而相似矩阵有着相同的特征值, 故只能有  $(a^2, b^2) = (\tilde{a}^2, \tilde{b}^2)$  或  $(a^2, b^2) = (\tilde{b}^2, \tilde{a}^2)$ , 与题设矛盾。也就是说整个论证过程只需要知道 Jacobi 矩阵为正交矩阵, 不需要写出具体形式和分类讨论。

我们在后续的学习中, 还会遇到很多 Gauss 曲率的应用, 比如接下来可展曲面的研究。

## 本章注记

本章主要介绍的曲面之间的映射，是研究曲面，特别是曲面内蕴几何的重要工具。具体而言，我们要用到两种映射。

一是 Gauss 映射。当然，严格地讲，我们使用更多的是它的切映射：Weingarten 映射（相差一个负号）。表面上看，它可以作为联系曲面第一和第二基本形式的桥梁，但实际求解主方向和主曲率的运算中，都是使用 Weingarten 映射更为简便。可见，相较于第二基本形式，Weingarten 映射是描述曲面弯曲程度更好的选择，这也是一般子流形理论中采用的方式。

二是保长映射。这一部分中我们要重点关注不变量 Gauss 曲率在研究保长映射中的应用。

其中，Gauss 映射和 Weingarten 映射是研究曲面外在几何的，保长映射是用来研究曲面的内蕴几何。

## Chapter 7

# 可展曲面——利用现有工具研究曲面的典型示例

### 7.1 可展曲面的引入

这一部分内容可视为之前 Gauss 定理，保长映射以及正交曲率线网等内容的应用。具有一定的综合性，非常适合用来检验之前学习的效果。

#### 7.1.1 直纹面

所谓直纹面，是指单参数直线族所形成的曲面<sup>1</sup>。根据直纹面的定义，可以导出直纹面的参数方程：

$$\vec{r}(u, v) = \vec{a}(u) + v\vec{l}(u)$$

其中，曲线  $\vec{a}(u)$  称为直纹面的**准线**（它是  $v = 0$  时的  $u$ -曲线），而  $v$ -曲线（直线）称为直纹面的**直母线**。

我们自然希望曲面的参数方程是正则的。此时

$$\vec{r}_u(u, v) = \vec{a}'(u) + v\vec{l}'(u), \quad \vec{r}_v(u, v) = \vec{l}(u)$$

---

<sup>1</sup>解析几何课程中也会介绍直纹面，不过解析几何中所研究的直纹面局限于二次曲面的范畴，而我们现在研究的直纹面不限于二次曲面。

正则的充分必要条件是：

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (\vec{a}'(u) + v\vec{l}'(u)) \times \vec{l}(u) \neq \vec{0}$$

这一条件不容易化简但是如果曲面正则，且  $v = 0$  在定义域中，则至少要求  $\vec{a}'(u) \times \vec{l}(u)$  恒不为零。

我们还可以让直纹面的参数方程取得更特殊些。

- 可以要求方向向量  $\vec{l}(u)$  取单位向量。

- 可以让准线与方向向量  $\vec{l}(u)$  垂直。

第一步显然；来看第二步，假定已有  $|\vec{l}(u)| = 1$ ，直母线的方向向量显然是固定的，取新的准线为：

$$\tilde{a}(u) = \vec{a}(u) + \lambda(u)\vec{l}(u)$$

其中  $\lambda(u)$  是一个连续可微的函数。想办法取一个合适的  $\lambda(u)$ ，使得  $\tilde{a}'(u) \cdot \vec{l}(u) = 0$ 。此时

$$\tilde{a}'(u) = \vec{a}'(u) + \lambda'(u)\vec{l}(u) + \lambda(u)\vec{l}'(u)$$

则

$$\tilde{a}'(u) \cdot \vec{l}(u) = \vec{a}'(u) \cdot \vec{l}(u) + \lambda'(u) = 0$$

有  $\lambda'(u) = -\vec{a}'(u) \cdot \vec{l}(u)$ ，故

$$\lambda(u) = - \int_{u_0}^u \vec{a}'(t) \cdot \vec{l}(t) dt$$

我们需要注意的是

- 不用单位化  $\vec{l}(u)$  也可实现  $\vec{l}(u)$  与准线垂直，只是相应的积分换成了求解  $\lambda(u)$  的常微分方程，稍微复杂些。
- 特别的，如果已经将  $\vec{l}(u)$  单位化，同时让  $\vec{l}(u)$  与准线  $\vec{a}(u)$  垂直，而  $\vec{r}_u = \vec{a}'(u) + v\vec{l}'(u)$ ， $\vec{r}_v = \vec{l}(u)$ ，这意味着  $(u, v)$  构成了正交参数系。
- 由于单位化，特别是正交化并不适合研究所有类型的直纹面，所以不特别指明的情况下，我们在最一般的情况下进行计算，初始直纹面方程不单位化也不正交化。

## 7.1.2 可展曲面的定义

我们先看几个直纹面的特殊例子。

- 柱面： $\vec{l}(u)$  有固定的方向，即  $\vec{l}(u) \times \vec{l}'(u) = \vec{0}$ ；

方程可简化为： $\vec{r}(u, v) = \vec{a}(u) + v\vec{l}$ ，其中  $\vec{l}$  是常向量（当然，可以进一步取  $\vec{l}$  为单位常向量）。

- 锥面：所有直母线都通过一个定点，即存在函数  $\lambda(u)$ ，使得  $\vec{a}(u) + \lambda(u)\vec{l}(u) = \vec{r}_0$ ，也就是说准线可以退化为一；

方程可简化为： $\vec{r}(u, v) = \vec{a} + v\vec{l}(u)$ ，其中  $\vec{a}$  是常向量。

- 切线面：是由曲线  $\vec{a}(u)$  的全部的切线形成的曲面。

方程可写为： $\vec{r}(u, v) = \vec{a}(u) + v\vec{a}'(u)$ <sup>1</sup>。

对于柱面和锥面，可以观察到平面与它们相切的切点集是整条直母线，换句话说即当点沿着直母线运动时曲面的切平面是保持不变的。对于切线面我们通过直接计算切平面的法向量：

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (\vec{a}'(u) + v\vec{a}''(u)) \times \vec{a}'(u) = v\vec{a}''(u) \times \vec{a}'(u)$$

显然其方向与  $v$  无关，故也满足切平面沿着直母线不变<sup>2</sup>。从而，我们引入

**定义 7.1.** 如果直纹面  $S$  的切平面沿每一条直母线都是不变的，则称该直纹面是**可展曲面**。

已经知道柱面，锥面，切线面都是可展曲面。**还有没有其他的可展曲面？**这需要我们先把直纹面成为可展曲面的条件写成显式的数学表达式。

**命题 7.2.** 设直纹面  $S$  的参数方程为  $\vec{r} = \vec{a}(u) + v\vec{l}(u)$ ，则它是可展曲面的充分必要条件为

$$(\vec{a}'(u), \vec{l}(u), \vec{l}'(u)) = 0$$

<sup>1</sup>切线面的参数方程在  $v = 0$  时并不正则。

<sup>2</sup>这三种直纹面仅仅是  $v$  直线上的切平面不变， $u$  曲线上的切平面是变化的

证明. 先求出切平面的法向量。

$$\vec{b}(u, v) = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = (\vec{a}'(u) + v\vec{l}'(u)) \times \vec{l}(u)$$

切平面沿直母线不变, 意味着  $\vec{b}(u, v)$  的方向不随  $v$  变化, 即

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial v} \times \vec{b} = \vec{0}$$

于是计算

$$\begin{aligned} \vec{b} \times \frac{\partial \vec{b}}{\partial v} &= \left( (\vec{a}'(u) + v\vec{l}'(u)) \times \vec{l}(u) \right) \times \left( \vec{l}'(u) \times \vec{l}(u) \right) \\ &= (\vec{a}'(u) + v\vec{l}'(u), \vec{l}(u), \vec{l}(u)) \vec{l}'(u) - (\vec{a}'(u) + v\vec{l}'(u), \vec{l}(u), \vec{l}'(u)) \vec{l}(u) \\ &= -(\vec{a}'(u), \vec{l}(u), \vec{l}'(u)) \vec{l}(u) \end{aligned}$$

可见上式为零等价于  $(\vec{a}'(u), \vec{l}(u), \vec{l}'(u)) = 0$ 。而根据向量函数的基本性质,  $\vec{b} \times \frac{\partial \vec{b}}{\partial v} = \vec{0}$  说明  $\vec{b}(u, v)$  的方向不随  $v$  变化。□

## 7.2 可展曲面的性质与应用

### 7.2.1 可展曲面的分类

现在我们可以回答之前提出的问题, 可展曲面到底包含哪些类型的曲面。

**定理 7.3.** 可展曲面在局部上是柱面、锥面和切线面中的一种; 一般的可展曲面是把这三种曲面沿直母线用充分光滑的方式拼接的结果。

证明. 已经知道, 曲面的可展的充分必要条件为  $(\vec{a}'(u), \vec{l}(u), \vec{l}'(u)) = 0$ 。我们说明, 满足这一条件的曲面, 局部上只有柱面、锥面和切线面三种。将  $(\vec{a}'(u), \vec{l}(u), \vec{l}'(u)) = 0$  改写为

$$\vec{l}(u) \times \vec{l}'(u) \cdot \vec{a}'(u) = 0$$

先来看满足这一条件最极端的情况:  $\vec{l}(u) \times \vec{l}'(u) = \vec{0}$  或  $\vec{a}'(u) = \vec{0}$ 。  $\vec{a}'(u) = \vec{0}$  显然对应的是锥面。来看  $\vec{l}(u) \times \vec{l}'(u) = \vec{0}$ , 回忆向量函数求导的基本性质, 我们知道此时  $\vec{l}(u)$  的方向不变, 对应柱面。

再来看一般情况, 此时  $\vec{l}(u) \times \vec{l}'(u) \neq \vec{0}$ , 但  $\vec{l}(u) \times \vec{l}'(u) \cdot \vec{a}'(u) = 0$ , 也就是两向量不共线, 三向量共面。从而

$$\vec{a}'(u) = \alpha(u)\vec{l}(u) + \beta(u)\vec{l}'(u)$$

此时已经排除了柱面, 我们反过来看什么时候能成为锥面, 什么时候能成为切线面:

情形 1, 要成为锥面, 需要找到一条退化为单点的准线。令

$$\vec{b}(u) = \vec{a}(u) + \lambda(u)\vec{l}(u)$$

为新的准线。要退化为一点, 需要  $\vec{b}'(u) \equiv \vec{0}$ , 而

$$\vec{b}'(u) = \vec{a}' + \lambda'(u)\vec{l}(u) + \lambda(u)\vec{l}'(u) = (\alpha(u) + \lambda'(u))\vec{l}(u) + (\beta(u) + \lambda(u))\vec{l}'(u) \quad (7.1)$$

于是

$$\begin{cases} \alpha(u) + \lambda'(u) = 0 \\ \beta(u) + \lambda(u) = 0 \end{cases}$$

方程有解当且仅当  $\alpha(u) = \beta'(u)$ , 此时可取  $\lambda(u) = -\beta(u)$ 。

情形 2, 要成为切线面, 需要找到一条新的准线  $\vec{b}(u)$ , 使得  $\vec{b}'(u) \parallel \vec{l}(u)$ 。再来观察 (7.1) 式, 这意味着

$$\begin{cases} \alpha(u) + \lambda'(u) \neq 0 \\ \beta(u) + \lambda(u) = 0 \end{cases}$$

方程有解当且仅当  $\alpha(u) \neq \beta'(u)$ , 此时依然可取  $\lambda(u) = -\beta(u)$ 。

换言之, 在一般情形下, 可以直接取  $\lambda(u) = -\beta(u)$ , 要么得到锥面, 要么得到切线面。至此包含了所有的情况。□

## 7.2.2 可展曲面的应用

我们在 5.3.1 小节中引入了曲率线的定义。按照定义, 要想判断一条曲线是否为曲率线, 需要先求出曲面的 Weingarten 映射  $\mathscr{W}$ , 再求其特征方向, 最后和曲线的切方向对照, 运算非常复杂。我们希望能够找到更几何、更简洁地判定曲线成为曲率线的条件。设曲面  $S: \vec{r}(u, v)$  上的一条曲线  $C$  由

$$u = u(t), v = v(t)$$

给出, 即  $C$  的参数方程为:  $\vec{r}(u(t), v(t))$ 。由定义, 曲线为曲率线意味着满足:

$$\mathcal{W} \left( \frac{d\vec{r}(u(t), v(t))}{dt} \right) = \lambda \frac{d\vec{r}(u(t), v(t))}{dt}$$

而由 Weingarten 映射和 Gauss 映射切映射的关系可知

$$\mathcal{W} \left( \frac{d\vec{r}(u(t), v(t))}{dt} \right) = - \frac{d\vec{n}(u(t), v(t))}{dt}$$

于是得到了曲率线的判别准则: Rodriques 定理,

**定理 7.4.** 曲面  $S: \vec{r}(u, v)$  上的一条曲线  $C: u = u(t), v = v(t)$  是曲率线的充分必要条件是: 曲面  $S$  沿曲线  $C$  的单位法向量场  $\vec{n}(u(t), v(t))$  沿曲线  $C$  的导数与曲线  $C$  相切, 即

$$\frac{d\vec{n}(u(t), v(t))}{dt} \parallel \frac{d\vec{r}(u(t), v(t))}{dt}$$

这一判别法则使用起来依然不太直观, 结合可展曲面的性质, 我们有

**推论 7.5.** 曲面  $S$  上的曲线  $C$  是曲率线的充分必要条件是: 曲面  $S$  沿曲线  $C$  的法线构成一个可展曲面。

**证明.** 设曲面上曲线  $C$  的方程为  $\vec{r}(t)$ , 对应曲面的单位法向量为  $\vec{n}(t)$ 。此时直纹面的方程为

$$\vec{r}(t, s) = \vec{r}(t) + s\vec{n}(t)$$

已知可展曲面的充要条件为  $(\vec{a}'(u), \vec{l}(u), \vec{l}'(u)) = 0$ , 故沿曲线  $C$  的法线构成的直纹面可展的充分必要条件为

$$(\vec{r}'(t), \vec{n}(t), \vec{n}'(t)) = 0$$

即

$$(\vec{r}'(t) \times \vec{n}'(t)) \cdot \vec{n}(t) = 0$$

注意到  $\vec{r}'(t)$  和  $\vec{n}'(t)$  均与  $\vec{n}(t)$  垂直, 故  $\vec{r}'(t) \times \vec{n}'(t)$  与  $\vec{n}(t)$  共线, 因此必有  $\vec{r}'(t) \times \vec{n}'(t) = \vec{0}$ 。再由 Rodriques 定理, 得到曲线  $C$  为曲率线。反之亦成立。

□

通过上述推论来判断曲线是否为曲率线比 Rodriques 定理更实用, 是因为

- 通过可展曲面判定曲率线定理中法向量并不一定要取单位法向量。几何上看, 法线构成的直纹面是否可展, 与法向量的大小无关。

- 因为可展曲面只有三种，只需要判断所得直纹面是否为柱面，锥面，切线面三种曲面中的一种即可，并不需要计算混合积。

例 7.6. 求旋转面上的曲率线。

证明. 不失一般性，设经线为  $u$ -曲线，纬线为  $v$ -曲线。先来看经线，经线是落在过对称轴的半平面  $\pi$  中的平面曲线。我们希望说明旋转面的法向量  $\vec{n}$  也落在  $\pi$  中，这样经线上的曲面法线构成的直纹面就是平面，自然可展。

因为纬圆所在的平面与对称轴垂直，故对称轴与半径  $\vec{r}$ ，以及纬圆的切向量  $\vec{r}_v$  都垂直，同时纬圆的切向量  $\vec{r}_v$  自然与半径  $\vec{r}$  垂直。换言之，切向量  $\vec{r}_v$  与对称轴和半径  $\vec{r}$  都垂直，从而垂直与半平面  $\pi$ 。此时旋转面的法向量  $\vec{n}$ ，自然也要和  $\vec{r}_v$  垂直，故必然落在半平面  $\pi$  内。得证。

再来看纬线。之前已经说明旋转面的法向量  $\vec{n}$  落在半平面  $\pi$  中，而随着半平面绕对称轴旋转， $\vec{n}$  与旋转面垂直的关系并不会改变。因此，纬圆上的曲面法线构成的直纹面，就是由半平面中的一条直线绕对称轴旋转一周得到的，也就是圆锥面，同样可展。

□

这也就意味着，旋转面上的经线和纬线构成了正交曲率线网。回忆，之前计算过旋转面  $(u \cos v, u \sin v, f(u))$  的第一和第二基本形式：

$$I = (1 + f'^2(u))(du)^2 + u^2(dv)^2$$

$$II = \frac{f''(u)}{\sqrt{1 + f'^2(u)}}(du)^2 + \frac{uf'(u)}{\sqrt{1 + f'^2(u)}}(dv)^2$$

都没有交叉项，这和经线和纬线构成了正交曲率线网相吻合。

### 7.2.3 可展曲面和保长映射的关联

从实际生活的角度来看柱面和锥面，可以用一张纸不费力地做成。也就是可以展开成一个平面。显然，在展开的过程中，曲线的长度都是保持不变的（夹角也保持不变）。

**定理 7.7.** 可展曲面在局部上可以和平面建立保长对应。反之，能局部和平面建立保长对应的无脐点的曲面一定是可展曲面。

先证明定理的前半部分。基本思路：已经知道直纹面的第一基本形式

$$I = |\vec{a}'(u) + v\vec{l}'(u)|^2 du^2 + 2(\vec{a}'(u) + v\vec{l}'(u)) \cdot \vec{l}(u) du dv + |\vec{l}(u)|^2 dv^2$$

这需要在可展的条件下，选取合适的参数系，把上述第一基本形式化为平面上标准的第一基本形式

$$I_{E^2} = dx^2 + dy^2 \quad (7.2)$$

因为可展曲面只有柱面，锥面和切线面三种类型，只要分情况讨论就可以了。

一般直纹面的第一基本形式太复杂。在讨论柱面和锥面的情形时，简单起见，我们不妨假设  $\vec{l}(u)$  已经单位化，且和  $\vec{a}'(u)$  垂直。于是

$$I = |\vec{a}'(u) + v\vec{l}'(u)|^2 du^2 + dv^2$$

先来看柱面： $\vec{r} = \vec{a}(u) + v\vec{l}$ 。此时

$$I = |\vec{a}'(u)|^2 du^2 + dv^2$$

对比平面的第一基本形式 (7.2)，直接令  $ds = |\vec{a}'(u)| du$ ，可解得

$$s(u) = \int |\vec{a}'(u)| du$$

有

$$I = ds^2 + dv^2$$

意味着柱面可以和平面建立保长映射  $\begin{cases} x = s(u) \\ y = v \end{cases}$ 。

这样的参数变换几何意义也很明确。对于准线  $\vec{a}(u)$ ， $s(u) = \int |\vec{a}'(u)| du$  是它的弧长，而  $x = s(u)$  意味着把准线  $\vec{a}(u)$  在保持弧长的前提下拉成一条直线，进而整个柱面展开成平面。

再来看锥面： $\vec{r} = \vec{a} + v\vec{l}(u)$ 。此时

$$I = v^2 |\vec{l}'(u)|^2 du^2 + dv^2$$

这时不能直接令  $ds = v|\vec{l}'(u)| du$ ，因为  $v|\vec{l}'(u)| du$  的系数中既有  $v$ ，也有  $u$  的函数，并非全微分。退而求其次，令  $ds = |\vec{l}'(u)| du$ ，此时第一基本形式变为

$$I = v^2 (ds)^2 + (dv)^2$$

如果对极坐标熟悉的话, 可以猜出来这就是极坐标下平面第一基本形式的表达式<sup>1</sup>。也确实如此, 令  $x = v \cos s, y = v \sin s$ , 于是有

$$dx = \cos s dv - v \sin s ds$$

$$dy = \sin s dv + v \cos s ds$$

进而

$$(dx)^2 + (dy)^2 = v^2(ds)^2 + (dv)^2$$

也就是锥面也可以平面建立保长映射。

这一过程的几何意义也很明确, 首先取一条新的准线

$$\vec{b}(u) = \vec{a} + \vec{l}(u)$$

即到顶点  $\vec{a}$  距离为 1 的点的集合, 抑或理解为空间中以  $\vec{a}$  为球心的单位球面和锥面的交线。其次, 令  $ds = |\vec{l}'(u)|du$ , 是将曲线  $\vec{b}(u)$  的参数换成弧长参数。最后, 由极坐标改写为欧氏坐标, 相当于把准线  $\vec{b}(u)$  限制在单位球面上, 拉“直”成大圆的一部分。这样原来的锥面就会展开为过球心的平面。

最后来看切线面, 我们先化简切线面的参数方程。不妨假设曲线  $\vec{a}(s)$  以弧长为参数, 于是切线面方程为

$$\vec{r}(s, t) = \vec{a}(s) + t\vec{a}'(s) = \vec{a}(s) + t\vec{\alpha}(s)$$

想要计算它的第一基本形式, 自然会想到运用 Frenet 运动公式

$$\vec{r}_s = \vec{\alpha}(s) + t\kappa(s)\vec{\beta}(s), \quad \vec{r}_t = \vec{\alpha}(s)$$

于是

$$I = (1 + t^2\kappa^2)ds^2 + 2dsdt + dt^2$$

这一形式很难通过配方的办法化成标准型, 但是仔细观察可以发现, 表达式当中不含有曲线的挠率  $\tau$ 。换言之, 只要弧长和曲率相同, 任何一条曲线的切线面的第一基本形式都是一样的, 相互之间可以通过令  $s = s, t = t$  建立保长映射。自然会考虑当中最特殊的曲线, 有相同弧长和曲率的平面曲线, 它的切线面是平面的一部分。

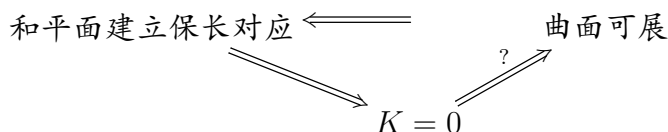
几何上, 相当于把弧长  $s$ , 曲率  $\kappa(s)$ , 挠率  $\tau(s)$  的空间曲线, 压平到弧长  $s$ , 曲率  $\kappa(s)$  的平面曲线, 进而切线面也压成平面的一部分。

<sup>1</sup>比如, 这一第一基本形式对应的面积元为  $v ds dv$ , 和平面极坐标系下的面积元一致, 据此可以猜测。如果确实猜不出来, 也可以代入待定的参数变换求解偏微分方程, 参见附录H。

至此定理得证。需要注意的是切线面的证明和前两种直纹面有显著的不同：前两种直纹面到平面的保长映射是通过坐标显示表达出的。有兴趣的同学可以思考下，如何显示地把从切线面参数  $(s, t)$  到平面参数  $(x, y)$  的函数关系写出来<sup>1</sup>。

从这三种情形的证明过程中，我们可以看出各种可展曲面展开成平面的过程。进而可以总结出“沿直母线的切平面不变，会导致曲面可展”的原因是： $v$  方向上的切平面是固定的一个平面，不会对展开形成障碍；我们只要将某条准线，展平成一条平面曲线即可（柱面中是展平为一条直线，锥面中是展平为圆弧，切线面中是展平为特定曲率的平面曲线）。

现在开始证后半部分：无脐点的曲面  $S$  若能和平面建立保长对应，则  $S$  必然可展。注意到能和平面建立保长映射的曲面 Gauss 曲率必然恒为零<sup>2</sup>，我们只要说明无脐点且 Gauss 曲率为零也可以反过来推出曲面可展即可。如下图：



换言之，定理后半部分的证明归结为如下的命题

**命题 7.8.** 空间  $E^3$  中的一块无脐点的 Gauss 曲率为零的曲面  $S$  一定是可展曲面。

要证一个曲面是可展曲面，实际上是要证：曲面首先是一个直纹面；其次当点沿着直母线运动时曲面的切平面（法向量）是保持不变的。

首先，要证是直纹面，就要在曲面上找到一族直线。观察条件，已知 Gauss 曲率为零。如何利用 Gauss 曲率为零找到表面上的直线就成了整个证明最关键的步骤。为此，我们需要明晰 Gauss 曲率几何含义。已知  $K = \kappa_1 \kappa_2$ ，由于  $K = 0$ ，不妨设  $\kappa_2 = 0$ 。 $\kappa_2$  是主曲率，也就是特殊的一个法曲率。而法曲率完全等同于法截线的相对曲率，也就是说曲面上过  $\kappa_2$  对应的主方向的法截线，其相对曲率为零。“几何直观上”，只要我们能找到一条曲线处处与主方向相切，也就能找到一条“曲率为零的直线”。

注意到处处与主方向相切的曲线就是曲率线，但是并不能直接通过上述几何直观断言这样的曲率线的曲率为零，因为曲率线一般并非平面曲线，而法截线是平面曲线，每一点处的法截线并不相同，无法拼成整体的曲率线。

<sup>1</sup>提示：从平面曲线的存在唯一性及其显式表达式着手。

<sup>2</sup>Gauss 曲率是保长映射的不变量

我们只能通过具体计算来直接证明这样的曲率线为直线。为了计算简单，我们选取正交曲率线网（因为无脐点，保证可以取到），此时， $v$ -曲线对应  $\kappa_2 = 0$  的曲率线，我们试图说明  $v$ -曲线为直线。也就是

$$\vec{r}_{vv} \times \vec{r}_v \equiv \vec{0}$$

而根据曲面上自然标架的运动公式

$$\vec{r}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \vec{r}_u + \Gamma_{22}^2 \vec{r}_v + b_{22} \vec{n}$$

于是

$$\vec{r}_{vv} \times \vec{r}_v = \Gamma_{22}^1 \vec{r}_u \times \vec{r}_v + b_{22} \vec{n} \times \vec{r}_v$$

注意到  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ ,  $\vec{n} \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ , 且不共线（更确切地讲，相互垂直），这意味需要说明  $\Gamma_{22}^1$  和  $b_{22}$  均为零。

在正交曲率线网下，我们已经计算过： $\kappa_1 = \frac{L}{E}$ ,  $\kappa_2 = \frac{N}{G}$ , 故  $b_{22} = N = 0$ 。再根据正交参数系下的表达式，有

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{EG - F^2} \left( G \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{G}{2} \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{F}{2} \frac{\partial G}{\partial v} \right) = -\frac{1}{2E} \frac{\partial G}{\partial u}$$

只靠条件  $\kappa_2 = 0$  并无法得出  $\Gamma_{22}^1 = 0$ ，我们还需要曲面的固有限制条件：Gauss-Codazzi 方程。之前已经得到正交曲率参数系下的表达式 (5.17)(5.18)，在当前研究的问题中，已知  $\kappa_2 = 0$ ，故  $N = 0$ ，因此整个方程变形为：

$$-\sqrt{EG} \left( \left( \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left( \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v} &= H \frac{\partial E}{\partial v} \\ 0 &= H \frac{\partial G}{\partial u} \end{aligned}$$

有了这些准备工作，我们再来看：

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2E} \frac{\partial G}{\partial u}$$

非常重要的一个条件：**无脐点**。 $\kappa_1, \kappa_2$  不能同时为零，故  $H \neq 0$ 。从而由 Codazzi 方程可知  $\frac{\partial G}{\partial u} = 0$ ，即  $\Gamma_{22}^1 = 0$ 。曲面为直纹面。

继续说明直纹面为可展曲面，需要正面单位法向量  $\vec{n}$  沿  $v$ -曲线是不变的，即  $\vec{n}_v \equiv \vec{0}$ 。最直接最自然的想法是：利用运动公式

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial v} = -b_2^1 \vec{r}_u - b_2^2 \vec{r}_v$$

但是在正交曲率线网下，

$$\begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L}{E} & 0 \\ 0 & \frac{N}{G} \end{pmatrix}$$

而  $N$  已经知道为零。

实际上，并不需要使用运动公式。注意到

$$\vec{n}_v \cdot \vec{r}_u = -M = 0, \quad \vec{n}_v \cdot \vec{r}_v = -N = 0, \quad \vec{n}_v \cdot \vec{n} = 0$$

也可以更简便地得到  $\vec{n}_v \equiv \vec{0}$ 。

这样，我们就证明了命题7.8。特别需要注意的是命题的证明过程中有两个地方要用到无脐点这一条件：

- 正交曲率线网的存在性；
- 导出  $H \neq 0$ ，进而之前的系数为零。

实际上，如果没有无脐点这一条件作为保障，命题7.8不成立，反例参见 [15] 或 [16]。

最终也完成了定理7.7的证明。证明过程相对而言比较复杂，我们在这里再简单梳理一下：定理7.7证明的关键是命题7.8，命题7.8证明的核心是考虑曲面的曲率线，以及 Gauss-Codazzi 方程。实际上，命题7.8有着更本质，更简洁的偏微分方程视角的证明，感兴趣的同学可以阅读7.3.1小节的内容。

最后注意到：可展曲面，和平面建立保长映射，Gauss 曲率为零这三者中，可展曲面是曲面的外在几何，而保长映射，Gauss 曲率属于曲面的内蕴几何范畴。当我们把注意力集中在内蕴几何上，很容易得到保长映射和 Gauss 曲率的关系：

**推论 7.9.** 空间  $E^3$  中的一块无脐点的曲面  $S$  能够和一块平面建立保长对应的充分必要条件是它的 Gauss 曲率为零。

但是无脐点关系到 Weingarten 映射，是个外在几何限制条件，加在一个内蕴几何的关系上很不自然。换句话说，采用曲率线这一外在几何视角来证明两个内蕴几何对象之间的关系，本来就是不自然的。我们在第八章中，会采用测地线这一内蕴几何的工具，来重新证明和平面建立保长对应等价于 Gauss 曲率为零，完全不需要无脐点这一条件。

### 7.3 Monge-Ampère 方程在研究零 Gauss 曲率曲面中的应用

我们在7.2.3小节中证明了  $E^3$  中没有脐点的 Gauss 曲率为零的曲面一定是可展曲面。其中最核心的想法是找到曲面的主曲率为零方向上的曲率线，然后再证明这样的曲率线一定是直线；然后再说明这样的直纹面一定可展。虽然证明的主线非常的清晰，但是总体而言证明的过程还是比较复杂。

我们早就知道，曲面局部都可以写成 Monge 形式  $(x, y, u(x, y))$ ，而在第三章中，也已经知道 Gauss 曲率为零等价于函数  $u(x, y)$  满足退化齐次 Monge-Ampère 方程  $u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 = 0$ 。我们自然想到，能不能通过直接求解出这一特殊的 Monge-Ampère 方程，来断定曲面  $(x, y, u(x, y))$  一定是可展曲面？

为此，我们先做一些准备工作。我们现在来看一般的二元 Monge-Ampère 方程

$$u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 = f(u_x, u_y, u)$$

的类型。考虑最高阶的偏导项

$$M(u) = u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2$$

由于非线性，我们把  $M$  视为函数空间上的算子，进行线性化：

$$\begin{aligned} M(u + t\phi) &= (u + t\phi)_{xx}(u + t\phi)_{yy} - ((u + t\phi)_{xy})^2 \\ &= (u_{xx} + t\phi_{xx})(u_{yy} + t\phi_{yy}) - (u_{xy} + t\phi_{xy})^2 \\ &= u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 + t(u_{yy}\phi_{xx} - 2u_{xy}\phi_{xy} + u_{xx}\phi_{yy}) + t^2(\phi_{xx}\phi_{yy} - (\phi_{xy})^2) \end{aligned}$$

于是

$$L(\phi)|_u = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{M(u + t\phi) - M(u)}{t} = u_{yy}\phi_{xx} - 2u_{xy}\phi_{xy} + u_{xx}\phi_{yy}$$

此时， $L(\phi)|_u$  对应的矩阵为  $\begin{pmatrix} u_{yy} & -u_{xy} \\ -u_{xy} & u_{xx} \end{pmatrix}$ 。注意到  $\begin{vmatrix} u_{yy} & -u_{xy} \\ -u_{xy} & u_{xx} \end{vmatrix} = u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 = f(u_x, u_y, u)$ ，所以

1.  $f(u_x, u_y, u) > 0$  时，为椭圆型；
2.  $f(u_x, u_y, u) < 0$  时，为双曲型；
3.  $f(u_x, u_y, u) = 0$  时，为抛物型或者完全退化。

对于退化齐次 Monge-Ampère 方程  $u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 = 0$  而言, 在一些点处是抛物的, 一些点处是完全退化的。

如果某点处的 Monge-Ampère 方程是完全退化的, 这意味着  $u_{xx} = u_{xy} = u_{yy} = 0$ 。于是在该点处曲面的第二基本形式  $II = 0$ , 该点为曲面的脐点 (更精确些, 平点)。为了能更方便地求解退化齐次 Monge-Ampère 方程, 我们还需要添加一些条件, 即假定方程在所有点处都是抛物的, 或者等价的, 矩阵  $\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix}$  的秩恒为 1。几何上看, 相当于假定 Gauss 曲率为零的曲面上没有脐点。接下来我们在这一前提条件下, 来求解退化齐次 Monge-Ampère 方程。

### \*7.3.1 特征线法求解退化齐次 Monge-Ampère 方程

对于矩阵  $\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix}$ , 简记为  $Hess(u)$ 。基本思路为考虑矩阵  $Hess(u)$  相应于特征值 0 的特征向量, 不同点处的特征向量构成  $\mathbb{R}^2$  上的向量场, 沿着这些特征向量场存在积分曲线, 并试图说明这些积分曲线均为直线。

首先我们注意到, 向量场的积分曲线作为几何对象, 只和每点向量的方向相关, 和向量的大小无关 (向量的大小仅仅影响如何参数化)。也就是理论上我们可以从  $Hess(u)$  的一维零化空间中任选一个向量作为特征向量。但是, 为了能够显式计算, 我们需要选取最简单的特征向量。

注意到  $Hess(u)$  矩阵的秩恒为 1, 不妨假定矩阵的第二行不全为零, 于是向量  $(u_{yy}, -u_{xy})$  非零, 且

$$\begin{pmatrix} u_{yy} & -u_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即  $(u_{yy}, -u_{xy})$  是矩阵  $Hess(u)$  特征值 0 的特征向量。同时注意到这里的  $u_{yy}$  和  $-u_{xy}$ , 恰为矩阵第一行元素的代数余子式。为了后续叙述简洁, 我们记矩阵  $Hess(u)$  第  $i$  行, 第  $j$  列元素的代数余子式为  $A_{ij}$ , 则每点处的特征方向为  $(A_{11}, A_{12})$ 。根据第五章的讨论, 向量场  $(A_{11}, A_{12})$  有积分曲线族  $(x(t), y(t))$ , 即

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A_{11} \\ \frac{dy}{dt} = A_{12} \end{cases}$$

为了说明曲线  $(x(t), y(t))$  为直线, 最直接的方法无非是继续对  $(x(t), y(t))$  求二阶导数, 有

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x(t) & y(t) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_{yy} & -u_{xy} \end{pmatrix}$$

进而根据复合函数求导的链式法则求出二阶导数, 再通过简单粗暴地计算平面曲线  $(x(t), y(t))$  的相对曲率为零来说明曲线  $(x(t), y(t))$  为一条直线。不过, 我们希望我们的方法更具一般性, 可以推广到更一般的维数, 所以换一个视角, 希望说明  $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix}$  和  $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix}$  共线。

具体来看, 根据代数余子式的性质, 有  $Hess(u)$  的第二行行向量  $(u_{xy}, u_{yy})$  一定和  $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix}$  垂直。接下来考察  $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix}$  和  $(u_{xy}, u_{yy})$  是否垂直。计算两者的内积

$$\left( \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u_{xy} \\ u_{yy} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \left( \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xy} \\ u_{yy} \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du_{xy}}{dt} \\ \frac{du_{yy}}{dt} \end{pmatrix}$$

这里等式右端第一个被求导的式子  $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xy} \\ u_{yy} \end{pmatrix}$  已经知道恒为零, 而

$$\frac{du_{xy}}{dt} = u_{xyx} \frac{dx}{dt} + u_{xyy} \frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} u_{xyx} & u_{xyy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{pmatrix}$$

$$\frac{du_{yy}}{dt} = u_{yyx} \frac{dx}{dt} + u_{yyy} \frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} u_{yyx} & u_{yyy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} \frac{du_{xy}}{dt} \\ \frac{du_{yy}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{xyx} & u_{xyy} \\ u_{yyx} & u_{yyy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{pmatrix}$$

注意到曲面三次以上连续可微, 故求导次序可交换

$$\begin{pmatrix} u_{xyx} & u_{xyy} \\ u_{yyx} & u_{yyy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{xxy} & u_{xyy} \\ u_{xyy} & u_{yyy} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix} = \frac{\partial Hess(u)}{\partial y}$$

从而

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du_{xy}}{dt} \\ \frac{du_{yy}}{dt} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix} \frac{\partial \text{Hess}(u)}{\partial y} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \left( \text{Hess}(u) \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{pmatrix} \right) - \left( \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix} \text{Hess}(u) \right) \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

但是不论  $\text{Hess}(u) \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{pmatrix}$  或是  $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix} \text{Hess}(u)$  均恒为零。综合可知行向量  $(u_{xy}, u_{yy})$  一定和  $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix}$ ,  $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix}$  均垂直, 从而  $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix}$ ,  $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix}$  两向量函数共线。进而  $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix}$  方向不变, 对应的积分曲线  $(x(t), y(t))$  为直线。

我们说明积分曲线在  $\mathbb{R}^3$  中的像  $(x(t), y(t), u(x(t), y(t)))$  也是直线。首先, 根据

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A_{11} \\ \frac{dy}{dt} = A_{12} \end{cases}$$

由行列式按行展开的性质

$$\frac{du_x}{dt} = u_{xx} \frac{dx}{dt} + u_{xy} \frac{dy}{dt} = u_{xx} A_{11} + u_{xy} A_{12} = 0$$

$$\frac{du_y}{dt} = u_{yx} \frac{dx}{dt} + u_{yy} \frac{dy}{dt} = u_{xy} A_{11} + u_{yy} A_{12} = 0$$

即  $u_x, u_y$  沿直线不变。其次, 因为  $(x(t), y(t))$  是直线, 不妨设  $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) = \lambda(x, y)(a, b)$ , 于是

$$\frac{du}{dt} = u_x \frac{dx}{dt} + u_y \frac{dy}{dt} = \lambda(au_x + bu_y)$$

$$\left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{du}{dt} \right) = \lambda(a, b, au_x + bu_y)$$

而之前已经说明  $u_x, u_y$  沿积分曲线为常数, 故这说明  $(x(t), y(t), u(x(t), y(t)))$  的切向量方向不变,  $(x(t), y(t), u(x(t), y(t)))$  也是一条直线。

最后, 我们知道局部上  $xOy$  平面上的积分曲线覆盖了某点的小邻域, 这就说明了曲面  $(x, y, u(x, y))$  局部上一定是直纹面。同时,  $\mathbb{R}^2$  上非零向量场的积分直线族, 局部一定可以分为三种情况

1. 所有直线都平行；
2. 所有直线都交于一点；
3. 这族直线都和某一条直线相交，交点不重合，且斜率严格单调。

前两种情况自然对应柱面和锥面。最后一种情况我们可以证明这样一族直线一定存在包络曲线，换句话说，这族直线都是包络曲线的切线；进而  $\mathbb{R}^3$  中曲面就是这条包络曲线在  $u(x, y)$  下像曲线的切线面。关于包络曲线和包络曲面，我们在下一节中会详细介绍。

这样，通过求解 Monge-Ampère 方程，我们用另外一种方法证明了没有脐点的 Gauss 曲率为零的曲面必然为可展曲面。

读者很容易发现，我们这里的特征线法，和之前所用的曲率线方法，本质上是相同的。这里的特征曲线，和之前的曲率线，都是零特征值对应特征向量的积分曲线。只不过一个是在空间中的曲面上考虑积分曲线——曲率线，一个是在  $\mathbb{R}^2$  上考虑积分曲线——特征线；表面上的 Gauss-Codazzi 方程，就相当于  $\mathbb{R}^2$  上求偏导次序可交换。或者直观地讲，特征线法，相当于把  $E^3$  中内蕴平坦，但外在非平直的曲面投影到完全平直的  $\mathbb{R}^2$  上来求解，自然要更简单一些，不需要复杂的概念；同时也更本质，比如我们可以从特征线法很容易地看出为什么可展曲面局部只有三种类型。

特征线法最大的好处，其实在于在矩阵  $Hess(u)$  常秩的前提下，可以很容易地推广到多变量的退化齐次 Monge-Ampère 方程的研究中。当然，也可以用更高级的黎曼几何的观点来研究退化齐次 Monge-Ampère 方程的叶状结构，参见<sup>[17]</sup>。

## 7.4 曲线和曲面的包络

包络这个概念不但在几何的研究中非常重要，在偏微分方程，等领域也有非常重要的作用。我们在这里介绍它，最主要的目的是利用它来更好地研究可展曲面。

### \*7.4.1 平面和空间曲线族的包络线

我们先来讨论最简单的平面曲线族的包络。

**定义 7.10.** 假设平面上有一族连续可微的单参数曲线族，记作  $\{C_\alpha\}$ ，如果有另外一条平面曲线  $C$ ，使得  $C$  上的每一点都落在某个曲线  $C_\alpha$  上，且曲线  $C$  和  $C_\alpha$  在该点处有相同

的切线；反过来， $\{C_\alpha\}$  中的每一条曲线，都和  $C$  有一个公共点，在这一点有相同的切线。那么曲线  $C$  就称为单参数曲线族  $\{C_\alpha\}$  的包络。

需要注意的是，我们这里默认包络曲线  $C$  上的不同点，落在不同的曲线  $C_\alpha$  上。显然，并非所有的单参数曲线族都有包络，比如一族平行的直线，或者经过固定点的直线族就不存在包络。

假定这一族曲线由隐式方程  $F(x, y, \alpha)$  决定，这里  $F$  关于各个自变量连续可微。现在我们试着求出包络曲线  $C$  的方程。假设包络  $C$  存在，参数方程为  $(x(t), y(t))$ 。根据包络定义，对于点  $(x(t), y(t))$ ，必然有  $\alpha(t) = \alpha(x(t), y(t))$ ，使得

$$F(x(t), y(t), \alpha(t)) = 0$$

接下来我们求曲线  $F(x, y, \alpha(t)) = 0$  的切向量，也是常用的方法，假设参数方程为  $(x(s), y(s))$ ，则有

$$F(x(s), y(s), \alpha(t)) \equiv 0$$

对  $s$  求导，有

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{ds} = 0$$

由于在该点有共线的切向量，因此

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0$$

所以理论上，包络曲线满足的方程为

$$\begin{cases} F(x(t), y(t), \alpha(t)) = 0 & (7.3) \\ \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0 & (7.4) \end{cases}$$

但是这一方程组非常难求解，需要进一步化简。注意掉(7.3)式恒成立，我们可以对它关于  $t$  求导数，有

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} \equiv 0$$

结合(7.4)式，有  $\frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} = 0$ 。由于我们已经假定了随着  $t$  的变化， $\alpha$  也要随之变化，故  $\frac{d\alpha}{dt}$  最多只能有孤立零点，从而根据  $F$  的连续可微性，必有  $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$ 。最终包络线满足的方程为

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x, y, \alpha) = 0 \end{cases}$$

再将上述方程组中的参数  $\alpha$  消去, 就可以得到曲线的一个隐式方程  $\Phi(x, y) = 0$ 。如果该隐式方程所决定的曲线, 确实是正则的, 则该曲线就是连续可微单参数曲线族的包络线。

在上述讨论过程中, 我们用的是曲线的隐式方程。也可以使用曲线的参数方程, 假定连续可微的单参数曲线族可以表示为  $(f(t, \alpha), g(t, \alpha))$ 。设包络曲线的参数方程为  $(f(s, \alpha(s)), g(s, \alpha(s)))$ , 其切向量为

$$\left( \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right)$$

且它与  $(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial t})$  共线。由于我们假设了  $t$  与  $s$  有连续可微的依赖关系, 意味着  $(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial t})$  与  $(\frac{\partial f}{\partial \alpha}, \frac{\partial g}{\partial \alpha})$  共线,

$$\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial \alpha} - \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

这是一个关于  $t$  和  $\alpha$  的方程, 可以通过反解这一隐式方程把  $\alpha$  写为  $t$  的函数, 不妨记为  $\alpha(t)$ , 此时得到参数曲线  $(x(t, \alpha(t)), y(t, \alpha(t)))$ , 如果正则的话, 即为包络线。

实际上, 在一些特定的情况下, 包络线也和积分曲线有深刻的关系。假定  $D$  是平面上的一个区域,  $D$  上的每一点, 都有曲线族  $\{C_\alpha\}$  中唯一的一条曲线经过, 也就区域  $D$  被曲线族不重叠地覆盖, 或者用更严格的术语来表述: 曲线族  $\{C_\alpha\}$  构成区域  $D$  的叶状结构 (foliation)。这些曲线族的切向量, 就构成了区域  $D$  上的切向量场; 反过来, 曲线族  $\{C_\alpha\}$  也由这一向量场的积分曲线构成。

而我们要找的曲线族  $\{C_\alpha\}$  的包络线, 一方面要求和这些叶状结构都相切, 自然也是向量场的积分曲线; 另一方面, 要求和每条叶状结构都有相切的点, 也就是不能是原有的某个叶状结构。

同时, 我们也知道, 非退化的向量场, 过一点的积分曲线是唯一的。也就是说在区域  $D$  的内部, 积分曲线唯一, 只能是原有的叶状结构。换言之, 包络曲线只有可能出现在区域  $D$  的边界上。从这个角度来看, 更容易看出, 平行直线族, 其向量场存在的区域是整个平面, 且非退化; 或者过固定点的直线族, 其向量场仅仅只在固定点处无定义。从而它们都没有包络。

我们接着考察空间曲线族的包络。其定义和平面情形没有实质区别, 故不再赘述。此时连续可微单参数曲线族采用参数方程比较方便:  $(f(t, \alpha), g(t, \alpha), h(t, \alpha))$ 。进而可以得到包络线满足的方程

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial g}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha} & \frac{\partial g}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial t} & \frac{\partial h}{\partial t} \\ \frac{\partial g}{\partial \alpha} & \frac{\partial h}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial t} & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial h}{\partial \alpha} & \frac{\partial f}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = 0 \quad (7.5)$$

显然, 这组方程是超定的 (三个方程中只有两个是独立的, 但依然超定), 很大可能无法解出满足条件的  $\alpha$  和  $t$  的关系; 换句话说, 一般情形下空间曲线族是没有包络线的。然而

后续我们也会看到,一些特定的空间曲线族,依然有很大的几率找到它们的包络。比如空间曲线的切线族(整体形成切线面),其包络线就是空间曲线自身。此外,我们在2.4.1小节中提到过曲线的渐屈线,它就是曲线法线族的包络。

### \*7.4.2 空间中曲面族的包络面

最后,我们来讨论空间中的单参数连续可微曲面族的包络面。

**定义 7.11.** 假设空间中有一族连续可微的单参数曲面族,记作  $\{S_\alpha\}$ , 如果有另外一张曲面  $S$ , 使得  $S$  上的每一点都落在某个曲面  $S_\alpha$  上, 且曲面  $S$  和  $S_\alpha$  在该点处有相同的切平面; 反过来,  $\{S_\alpha\}$  中的每一张曲面, 都和  $S$  有一个公共点, 在这一点有相同的切平面。那么曲面  $S$  就称为单参数曲面族  $\{S_\alpha\}$  的包络。

假定连续可微的单参数曲面族由隐式方程  $F(x, y, z, \alpha)$  给出, 和平面曲线的包络求解相仿, 包络面上的点满足方程

$$\begin{cases} F(x, y, z, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x, y, z, \alpha) = 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

具体过程我们这里就不再重复了。此时, 将上述方程组中的  $\alpha$  消去, 得到隐式方程  $\Phi(x, y, z) = 0$ 。这一方程所决定的曲面称为判别曲面。如果判别曲面是正则的, 则它即是包络面。

我们现在返回空间曲线族的包络面。因为空间曲线族还可以表示为

$$\begin{cases} F(x, y, z, \alpha) = 0 \\ G(x, y, z, \alpha) = 0 \end{cases}$$

类似地讨论, 不难得到空间曲线族的包络线满足的方程为

$$\begin{cases} F(x, y, z, \alpha) = 0 \\ G(x, y, z, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x, y, z, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial \alpha}(x, y, z, \alpha) = 0 \end{cases} \quad (7.7)$$

和(7.5)式一样, 是个超定的方程组。

在方程(7.6)中, 直接固定  $\alpha$ , 则可以得到一条曲线, 这条曲线称为判别曲面的特征线。判别曲面上的点  $(x, y, z)$  必然落在某条特征线上, 换言之, 整个判别曲面可以看作由这样一族特征线生成的。

现在, 我们把方程组(7.6)决定的一族特征线视为单参数曲线族, 根据(7.7)式, 特征线族的包络线, 也就是所谓的包络面的脊线, 满足方程

$$\begin{cases} F(x, y, z, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x, y, z, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}(x, y, z, \alpha) = 0 \end{cases}$$

注意这里只有三个方程, 并不是超定的方程组, 很多情况下可以求解出。

包络面和可展曲面有着密切的关系。对比两者的定义, 不难发现

- 所谓可展曲面, 就是单参数平面族的包络面; 反之亦然。
- 可展曲面的直母线, 就是可展曲面作为包络面的特征线。
- 当我们把可展曲面看作包络面时, 柱面和锥面都没有脊线, 切线面的脊线就是空间曲线自身。

例 7.12. 求单参数平面族

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - z \sin \alpha = 1$$

的包络。

解. 令

$$F(x, y, z, \alpha) = x \cos \alpha + y \sin \alpha - z \sin \alpha - 1$$

则

$$F_{\alpha}(x, y, z, \alpha) = -x \sin \alpha + y \cos \alpha - z \cos \alpha$$

联立有

$$\begin{cases} x \cos \alpha + y \sin \alpha - z \sin \alpha = 1 \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha - z \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

两式左右平方后相加，可得

$$x^2 + (y - z)^2 = 1$$

这是椭圆柱面。当然也是直纹面，和我们之前的一般判断相吻合。

□

## 本章注记

可展曲面在曲面论中有着非常重要的理论地位，故而我们把它抽取出来作为单独的一章。这一章的内容比较特别，是我们整本讲义中，第一次“实战”，也就是利用各种已有的工具研究一种特殊的几何对象。类似地位的章节之后还有第十章和第十一章。

本章实际上是从三个不同的视角来研究可展曲面的。

第一种视角就是最经典的微分几何的视角，使用曲面上的曲线（曲率线）和曲面间的映射（保长映射）来研究可展曲面。而且通过这一过程，我们可以深化对曲面上的曲线以及曲面之间的映射的理解和应用。换言之，很多问题中，我们往往需要把曲面上的曲线，以及曲面之间的映射多种工具结合起来使用才能达到更好的效果。

第二种视角是纯粹的偏微分方程的视角，也就是直接求解退化齐次 Monge-Ampère 方程。现代的几何分析更喜欢采用这样简单直接的方式来解决实际问题。

第三种视角是所谓的包络。把可展曲面视为一种特殊的包络，从更高，更一般的视角来审视可展曲面。

对基础相对薄弱的同学，掌握第一种视角就足够了。但是对于有志于做科研的同学，我强烈建议大家把三种视角都弄明白。一方面这可以大大深化我们对可展曲面的认知；另一方面，这也恰恰是微分几何的一大特色，同一个问题可以从不同的角度来研究，而且本质上是等价的。

此外，可展曲面的直观意义明显，有着非常重要的实际应用。比如，在对金属制品的机械冷加工中，如果产品可以由多片可展曲面拼接而成，则它们可以通过弯曲切割好的金属板得到，加工更高效。



## Chapter 8

### 曲面上的曲线 2——测地线

第四章的最后我们已经开宗明义，要进入内蕴几何的研究中。既然是内蕴几何，就不能涉及曲面的第二基本形式，也就是说不能直接地拿曲面的方程  $\vec{r}(u, v)$  过来研究，只能抽象地从一个微分形式  $E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$  出发。

**没有参数方程怎么办？** 我们必须开发其他的研究内蕴几何的工具。就像平面解析几何和空间解析几何，本质上都是以直线为工具来研究曲线和曲面。我们自然希望，能够在一般的曲面上也找到一类几何对象，类似于平面和空间中的直线，这就是所谓的——测地线。

测地线是曲面上非常特殊的一类曲线。为了引入测地线，我们需要先对曲面上一般的曲线进行研究。我们在这一章中主要使用张量记号，但是在第 5 节中会根据实际灵活切换张量记号和 Gauss 记号。

#### 8.1 曲面上曲线的 Darboux 标架场及其运动公式

设正则参数曲面  $S$  的方程是  $\vec{r}(u^1, u^2)$ 。 $C$  是曲面上的一条曲线，方程为

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(u^1(s), u^2(s))$$

并假定  $s$  是弧长参数。

### 8.1.1 曲面上曲线的 Darboux 标架场

要研究空间曲线  $C$ ，我们依然需要空间曲线  $C$  上的标架场。在第二章时，我们建立了曲线上的 Frenet 标架，当时是把空间曲线作为孤立的对象来研究；现在曲线是落在曲面上，我们需要利用曲线来探讨曲面的性质，所以要建立一个新的可以反映曲线和曲面相互约束关系的标架场。

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \vec{\alpha}(s) \\ \vec{e}_2 &= \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{n}(s) \times \vec{\alpha}(s) \\ \vec{e}_3 &= \vec{n}(s)\end{aligned}$$

我们称这样曲面上和曲面相容的单位正交标架场为 Darboux 标架。首先将这一标架和通常空间曲线的 Frenet 标架进行比较。 $\vec{\alpha}, \vec{e}_2, \vec{n}$  和  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  都是右手标架。换言之， $\vec{e}_2, \vec{n}$  和  $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$  都是曲线法平面的正交基底， $\angle(\vec{e}_2, \vec{\beta}) = \angle(\vec{n}, \vec{\gamma})$ ，相差法平面上的一个转动。

直观上，是将曲线的切向量  $\vec{e}_1$  绕曲面的法向量  $\vec{n}$  右旋  $90^\circ$ 。和平面曲线的 Frenet 标架的构造类似。也就是说，平面曲线可以看作是特殊的曲面上的曲线。**学习这一章，一定要与第二章曲线论，特别是其中的平面曲线部分对照。**

### 8.1.2 Darboux 标架场的运动公式

接下来自然要推导 Darboux 标架场的运动公式。因为是正交标架场，系数矩阵反对称，不妨假设：

$$\frac{d\vec{e}_1(s)}{ds} = \kappa_g \vec{e}_2 + \kappa_n \vec{e}_3 \quad (8.1)$$

$$\frac{d\vec{e}_2(s)}{ds} = -\kappa_g \vec{e}_1 + \tau_g \vec{e}_3 \quad (8.2)$$

$$\frac{d\vec{e}_3(s)}{ds} = -\kappa_n \vec{e}_1 - \tau_g \vec{e}_2 \quad (8.3)$$

其中  $\kappa_g, \kappa_n, \tau_g$  是待定的系数函数。容易计算

$$\kappa_n = \frac{d\vec{e}_1(s)}{ds} \cdot \vec{e}_3(s) = \frac{d\vec{\alpha}(s)}{ds} \cdot \vec{n}(s)$$

即  $\kappa_n$  就是曲线  $C$  的法曲率。

将运动公式

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_1(s)}{ds} &= \kappa_g \vec{e}_2 + \kappa_n \vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_2(s)}{ds} &= -\kappa_g \vec{e}_1 + \tau_g \vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_3(s)}{ds} &= -\kappa_n \vec{e}_1 - \tau_g \vec{e}_2\end{aligned}\quad (8.4)$$

和通常的曲线在 Frenet 标架下的运动公式

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}'(s) &= \kappa(s)\vec{\beta}(s) \\ \vec{\beta}'(s) &= -\kappa(s)\vec{\alpha}(s) + \tau(s)\vec{\gamma}(s) \\ \vec{\gamma}'(s) &= -\tau(s)\vec{\beta}(s)\end{aligned}$$

相比较, 我们称  $\kappa_g$  为曲面  $S$  上曲线  $C$  的测地曲率, 称  $\tau_g$  为曲线  $C$  的测地挠率。

$\kappa_n$  已经是大家所熟知的量, 我们重点来看  $\kappa_g$  和  $\tau_g$ , 以及这些量之间的关系。

先来对  $\kappa_g$  和  $\tau_g$  进行简单的计算。

$$\begin{aligned}\kappa_g &= \frac{d\vec{e}_1(s)}{ds} \cdot \vec{e}_2 = \frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2} \cdot (\vec{n}(s) \times \vec{r}'(s)) = (\vec{r}'(s), \vec{r}''(s), \vec{n}(s)) \\ \tau_g &= \frac{d\vec{e}_2(s)}{ds} \cdot \vec{e}_3 = \frac{d(\vec{n}(s) \times \vec{r}'(s))}{ds} \cdot \vec{n}(s) = (\vec{n}'(s), \vec{r}'(s), \vec{n}(s))\end{aligned}$$

因为我们要通过曲线从内蕴几何角度来研究曲面, 上述表达式并不能从根本上反映测地挠率、测地曲率与曲面第一以及第二基本形式的关系, 所以我们还需要更详尽的表达式。需要注意的是, 曲面上曲线的测地曲率和曲线的定向有关。比如, 考虑反向的曲线  $\vec{r}(-s)$ , 相当于标架场取为  $\{-\vec{e}_1, -\vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ , 此时运动公式(8.4)变为

$$\begin{aligned}\frac{d-\vec{e}_1(s)}{d-s} &= -\kappa_g(-\vec{e}_2) + \kappa_n \vec{e}_3 \\ \frac{d-\vec{e}_2(s)}{d-s} &= \kappa_g(-\vec{e}_1) + \tau_g \vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_3(s)}{d-s} &= -\kappa_n(-\vec{e}_1) - \tau_g(-\vec{e}_2)\end{aligned}$$

也就是测地曲率会变为原来的相反数。当然, 因为后续中我们关心的情况往往是测地曲率为零的情形, 所以这一点的影晌不大。

## 8.2 测地挠率

测地挠率  $\tau_g = (\vec{n}'(s), \vec{r}'(s), \vec{n}(s))$  中

$$\vec{r}'(s) = \sum_{\gamma=1}^2 \vec{r}_\gamma \frac{du^\gamma(s)}{ds}$$

又由自然标架的运动公式有

$$\frac{d\vec{n}(s)}{ds} = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial \vec{n}(s)}{\partial u^\alpha} \frac{du^\alpha(s)}{ds} = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 -b_\alpha^\beta \frac{du^\alpha}{ds} \vec{r}_\beta$$

均代入测地曲率表达式中

$$\begin{aligned} \tau_g &= \left( \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 -b_\alpha^\beta \frac{du^\alpha}{ds} \vec{r}_\beta, \sum_{\gamma=1}^2 \vec{r}_\gamma \frac{du^\gamma(s)}{ds}, \vec{n} \right) \\ &= \sum_{\beta=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 \sum_{\alpha=1}^2 -b_\alpha^\beta \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\gamma}{ds} (\vec{r}_\beta, \vec{r}_\gamma, \vec{n}) \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 -b_\alpha^1 \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^1}{ds} (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n}) + \sum_{\alpha=1}^2 -b_\alpha^2 \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^1}{ds} (\vec{r}_2, \vec{r}_1, \vec{n}) \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 \left( -b_\alpha^1 \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^2}{ds} + b_\alpha^2 \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^1}{ds} \right) |\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| \\ &= \sqrt{g} \left( -b_2^1 \left( \frac{du^2}{ds} \right)^2 + (b_2^2 - b_1^1) \frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds} + b_1^2 \left( \frac{du^1}{ds} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

其中  $g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}$ 。整个式子可以看成是一个关于切方向  $\frac{du^1}{ds}, \frac{du^2}{ds}$  的二次型。从测地挠率的表达式可以直接看出：

- 测地挠率只是曲面上切方向的函数：曲面上有两条曲线在一点处相切，则这两条曲线在该点有相同的测地挠率。即测地挠率和曲线具体的方程无关，反映的是曲面的性质而非曲线的性质。
- 测地挠率和第二基本形式有关，不是内蕴几何量。

## 8.2.1 测地挠率和 Weingarten 映射的关系

再回到测地挠率的表达式

$$\tau_g = \sqrt{g} \left( -b_2^1 \left( \frac{du^2}{ds} \right)^2 + (b_2^2 - b_1^1) \frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds} + b_1^2 \left( \frac{du^1}{ds} \right)^2 \right) \quad (8.5)$$

注意到其中  $b_\alpha^\beta$  是 Weingarten 映射矩阵的元素。为了把测地挠率和 Weingarten 映射的关系理清楚，我们把(8.5)圆括号中的式子改写为

$$\begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} & \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^2 & b_2^2 \\ -b_1^1 & -b_2^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} \\ \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix}$$

将  $\begin{pmatrix} b_1^2 & b_2^2 \\ -b_1^1 & -b_2^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} \\ \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix}$  视为一列向量，上式可改写为行列式形式

$$\begin{vmatrix} \frac{du^2}{ds} & \begin{pmatrix} b_1^2 & b_2^2 \\ -b_1^1 & -b_2^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} \\ \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} \\ -\frac{du^1}{ds} & \begin{pmatrix} b_1^2 & b_2^2 \\ -b_1^1 & -b_2^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} \\ \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \frac{du^2}{ds} & \begin{pmatrix} b_1^2 & b_2^2 \\ b_1^1 & b_2^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} \\ \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} \\ \frac{du^1}{ds} & \begin{pmatrix} b_1^2 & b_2^2 \\ b_1^1 & b_2^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} \\ \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{du^1}{ds} & \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} \\ \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} \\ \frac{du^2}{ds} & \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} \\ \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

这里出现 Weingarten 映射的矩阵以及行列式运算并不意外。我们可以换一个更本质的角度来对测地挠率表达式进行化简，注意到测地挠率的表达式可以改写为

$$\tau_g = (\vec{n}'(s), \vec{r}'(s), \vec{n}(s))$$

其中

$$\vec{n}'(s) = \frac{d\vec{n}(s)}{ds} = \mathcal{G}_* \left( \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \right) = \mathcal{G}_*(\vec{e}_1)$$

而 Weingarten 映射定义为  $\mathcal{W} = -\mathcal{G}_*$ ，因此在基底  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  下计算外积  $\vec{n}'(s) \times \vec{r}'(s)$ ，有

$$\begin{vmatrix} - \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} \\ \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} & \frac{du^1}{ds} \\ \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} \\ \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} & \frac{du^2}{ds} \end{vmatrix} \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$$

再内积  $\vec{n}$  得到

$$\tau_g = \begin{vmatrix} - \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} \\ \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} & \frac{du^1}{ds} \\ \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} \\ \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} & \frac{du^2}{ds} \end{vmatrix} |\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| = \sqrt{g} \begin{vmatrix} \frac{du^1}{ds} & \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} \\ \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} \\ \frac{du^2}{ds} & \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} \\ \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

与二次型变形后的表达式一致。

注意到, 在讨论曲率线的5.3.1小节中, 我们已经计算过

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{d}u \ \mathbf{d}v)W \\ \mathbf{d}u \ \mathbf{d}v \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\mathbf{d}v)^2 & -\mathbf{d}u\mathbf{d}v & (\mathbf{d}u)^2 \\ L & M & N \\ E & F & G \end{vmatrix}$$

其中  $W$  代表 Weingarten 映射在基底  $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v\}$  下的矩阵。所以, 无非是改为张量记号, 这里的测地挠率  $\tau_g$  也可以改写成

$$\tau_g = -\frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \left(\frac{\mathbf{d}u^2}{\mathbf{d}s}\right)^2 & -\frac{\mathbf{d}u^1}{\mathbf{d}s} \frac{\mathbf{d}u^2}{\mathbf{d}s} & \left(\frac{\mathbf{d}u^1}{\mathbf{d}s}\right)^2 \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \left(\frac{\mathbf{d}u^2}{\mathbf{d}s}\right)^2 & -\frac{\mathbf{d}u^1}{\mathbf{d}s} \frac{\mathbf{d}u^2}{\mathbf{d}s} & \left(\frac{\mathbf{d}u^1}{\mathbf{d}s}\right)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}$$

也就是说曲率线切方向上的测地挠率均为零 (下一节我们会展开论述这一现象)。综上, 测地挠率完全被 Weingarten 映射决定, 反应的是曲面的弯曲程度。至于测地挠率从哪个角度来反应曲面的弯曲程度, 我们下一小节具体展开。

## 8.2.2 测地挠率的几何和代数意义

从测地挠率各种不同的表达式, 特别是

$$\tau_g = \sqrt{g} \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{d}u^1}{\mathbf{d}s} & \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \end{pmatrix} \\ \frac{\mathbf{d}u^2}{\mathbf{d}s} & \begin{pmatrix} b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{d}u^1}{\mathbf{d}s} \\ \frac{\mathbf{d}u^2}{\mathbf{d}s} \end{pmatrix}$$

可以看出, 使得  $\tau_g = 0$  的方向  $(\frac{\mathbf{d}u^1}{\mathbf{d}s}, \frac{\mathbf{d}u^2}{\mathbf{d}s})$  需满足

$$\begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{d}u^1}{\mathbf{d}s} \\ \frac{\mathbf{d}u^2}{\mathbf{d}s} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{d}u^1}{\mathbf{d}s} \\ \frac{\mathbf{d}u^2}{\mathbf{d}s} \end{pmatrix}$$

即 Weingarten 映射的特征方向, 也就是曲面在该点处的**主方向**。

当曲面一点处的 Weingarten 映射的矩阵为数量矩阵时, 各个方向的测地挠率均为零。换言之, 测地挠率作为一个单位圆周上的函数整体, 实际上是描述曲面的 Weingarten 映射和数量矩阵的差别的大小。用更几何的语言来讲, 描述曲面每一点和脐点的差异。即**如果曲面上一点处各个方向的测地挠率均为零, 则该点为脐点**。

当这一点非脐点, 测地挠率  $\tau$  也为我们提供曲面更细致的信息: 测地挠率为零的方向就是曲面在该点处的**主方向**。一条曲线上点点切方向上的测地挠率都为零, 则说明该

曲线为**曲率线**。当然，我们在5.3.1小节中已经得到曲率线的满足的方程(5.13)或(5.16)，和测地曲率的表达式相比较，也很容易看出测地曲率为零的曲线必然满足曲率线方程。

综上，可以看出测地挠率和主曲率（特殊的法曲率）之间关系密切，我们想弄清楚测地挠率和法曲率更普遍的关系。这其实需要我们弄清楚测地挠率的表达式中出现 Weingarten 映射更深层次的原因。回到最开始的 Darboux 标架场的运动公式，注意观察第三个公式 (8.3)：

$$\frac{d\vec{e}_3(s)}{ds} = -\kappa_n \vec{e}_1 - \tau_g \vec{e}_2$$

左端是

$$\frac{d\vec{n}(s)}{ds} = \mathcal{G}_*\left(\frac{d\vec{r}(s)}{ds}\right) = \mathcal{G}_*(\vec{e}_1)$$

另一方面，Weingarten 映射定义为  $\mathcal{W} = -\mathcal{G}_*$ ，于是 (8.3) 式等价于

$$\mathcal{W}(\vec{e}_1) = \kappa_n \vec{e}_1 + \tau_g \vec{e}_2$$

从而

$$\kappa_n = \mathcal{W}(\vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1, \quad \tau_g = \mathcal{W}(\vec{e}_1) \cdot \vec{e}_2$$

可以很容易地看出法曲率和测地挠率均由 Weingarten 映射决定，自然只与切方向有关，故都是描述曲面的弯曲性质。同时，也可以回应我们在第8.1.1小节中提到的，改变曲线的定向，会改变测地曲率的正负，但是不影响法曲率和测地挠率<sup>1</sup>。

我们知道法曲率有 Euler 公式，测地挠率也有类似表达。假设  $\vec{d}_1, \vec{d}_2$  是主方向上的单位向量，若  $\vec{e}_1 = \cos\theta \vec{d}_1 + \sin\theta \vec{d}_2$ ，则  $\vec{e}_2 = -\sin\theta \vec{d}_1 + \cos\theta \vec{d}_2$ 。由于

$$\mathcal{W}(\vec{e}_1) = \kappa_1 \cos\theta \vec{d}_1 + \kappa_2 \sin\theta \vec{d}_2$$

一方面可得法曲率的 Euler 公式：

$$\kappa_n(\theta) = \mathcal{W}(\vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 = \kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta$$

另一方面类似有

$$\tau_g(\theta) = \mathcal{W}(\vec{e}_1) \cdot \vec{e}_2 = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2} \sin 2\theta$$

特别地，从  $\tau_g = \mathcal{W}(\vec{e}_1) \cdot \vec{e}_2$  这一表达式，也可以推导出测地挠率的表达式 (8.5)，感兴趣的同学可以参考附录I。

<sup>1</sup>这是因为当曲面定向确定时，曲面的 Weingarten 映射就确定了；而改变曲线定向时， $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  替换为  $-\vec{e}_1, -\vec{e}_2$ 。

## 8.3 测地曲率

接下来我们看测地曲率更细致的表达式。已知  $\kappa_g = (\vec{r}'(s), \vec{r}''(s), \vec{n}(s))$ , 首先

$$\vec{r}'(s) = \sum_{\eta=1}^2 \vec{r}_{\eta} \frac{du^{\eta}(s)}{ds}$$

又

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left( \sum_{\alpha=1}^2 \vec{r}_{\alpha} \frac{du^{\alpha}(s)}{ds} \right) = \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \vec{r}_{\alpha\beta} \frac{du^{\alpha}(s)}{ds} \frac{du^{\beta}(s)}{ds} + \sum_{\alpha=1}^2 \vec{r}_{\alpha} \frac{d^2u^{\alpha}(s)}{ds^2} \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \left( \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \vec{r}_{\gamma} + b_{\alpha\beta} \vec{n} \right) \frac{du^{\alpha}(s)}{ds} \frac{du^{\beta}(s)}{ds} + \sum_{\alpha=1}^2 \vec{r}_{\alpha} \frac{d^2u^{\alpha}(s)}{ds^2} \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \left( \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \vec{r}_{\gamma} + b_{\alpha\beta} \vec{n} \right) \frac{du^{\alpha}(s)}{ds} \frac{du^{\beta}(s)}{ds} + \sum_{\gamma=1}^2 \vec{r}_{\gamma} \frac{d^2u^{\gamma}(s)}{ds^2} \\ &= \sum_{\gamma=1}^2 \left( \frac{d^2u^{\gamma}(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \frac{du^{\alpha}(s)}{ds} \frac{du^{\beta}(s)}{ds} \right) \vec{r}_{\gamma} + \sum_{\alpha,\beta=1}^2 b_{\alpha\beta} \frac{du^{\alpha}(s)}{ds} \frac{du^{\beta}(s)}{ds} \vec{n} \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \sum_{\eta,\gamma=1}^2 \left( \frac{d^2u^{\gamma}(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \frac{du^{\alpha}(s)}{ds} \frac{du^{\beta}(s)}{ds} \right) \frac{du^{\eta}(s)}{ds} (\vec{r}_{\eta}, \vec{r}_{\gamma}, \vec{n}) \\ &= \left( \frac{d^2u^2(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^2 \frac{du^{\alpha}(s)}{ds} \frac{du^{\beta}(s)}{ds} \right) \frac{du^1(s)}{ds} (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n}) \\ &\quad + \left( \frac{d^2u^1(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{du^{\alpha}(s)}{ds} \frac{du^{\beta}(s)}{ds} \right) \frac{du^2(s)}{ds} (\vec{r}_2, \vec{r}_1, \vec{n}) \\ &= |\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| \left( \left( \frac{d^2u^2(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^2 \frac{du^{\alpha}(s)}{ds} \frac{du^{\beta}(s)}{ds} \right) \frac{du^1(s)}{ds} \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{d^2u^1(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{du^{\alpha}(s)}{ds} \frac{du^{\beta}(s)}{ds} \right) \frac{du^2(s)}{ds} \right) \\ &= \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} \left| \begin{array}{cc} \frac{du^1(s)}{ds} & \frac{d^2u^1(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{du^{\alpha}(s)}{ds} \frac{du^{\beta}(s)}{ds} \\ \frac{du^2(s)}{ds} & \frac{d^2u^2(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^2 \frac{du^{\alpha}(s)}{ds} \frac{du^{\beta}(s)}{ds} \end{array} \right| \end{aligned} \tag{8.6}$$

这里出现行列式运算本质上也是因为需要计算外积  $\vec{r}' \times \vec{r}''$ 。可以看出  $\kappa_g$  完全由曲面的

<sup>1</sup>和之前测地挠率中出现行列式略有不同, 此时的  $\vec{r}''$  并不一定落在切平面当中, 但是后续要和  $\vec{n}$  做混

第一基本形式, 以及曲线坐标下的曲线的参数方程  $u^1 = u^1(s), u^2 = u^2(s)$  决定。故是内蕴几何量, 在保长映射下不变。

### 8.3.1 非弧长参数下的测地曲率的计算

与测地挠率不同, 测地曲率是依赖于具体曲线的。然而我们所有关于测地曲率的推导, 都是基于  $s$  为弧长参数来进行的。对非弧长参数, 仍然可以做计算。即将原有测地曲率表达式中的弧长参数通过参数变换换成普通参数  $t$ ,

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \sqrt{g} \left| \frac{\frac{du^1(s)}{ds} \frac{d^2u^1(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds}}{\frac{du^2(s)}{ds} \frac{d^2u^2(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^2 \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds}} \right| \\ &= \sqrt{g} \left| \frac{\frac{du^1(t)}{dt} \frac{dt}{ds} \frac{d^2u^1(t)}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{du^1(t)}{dt} \frac{d^2t}{ds^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{du^\alpha(t)}{dt} \frac{du^\beta(t)}{dt} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2}{\frac{du^2(t)}{dt} \frac{dt}{ds} \frac{d^2u^2(t)}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{du^2(t)}{dt} \frac{d^2t}{ds^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^2 \frac{du^\alpha(t)}{dt} \frac{du^\beta(t)}{dt} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2} \right| \\ &= \sqrt{g} \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \left| \frac{\frac{du^1(t)}{dt} \frac{d^2u^1(t)}{dt^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{du^\alpha(t)}{dt} \frac{du^\beta(t)}{dt}}{\frac{du^2(t)}{dt} \frac{d^2u^2(t)}{dt^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^2 \frac{du^\alpha(t)}{dt} \frac{du^\beta(t)}{dt}} \right| \\ &= \frac{\sqrt{g}}{|\vec{r}'(t)|^3} \left| \frac{\frac{du^1(t)}{dt} \frac{d^2u^1(t)}{dt^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{du^\alpha(t)}{dt} \frac{du^\beta(t)}{dt}}{\frac{du^2(t)}{dt} \frac{d^2u^2(t)}{dt^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^2 \frac{du^\alpha(t)}{dt} \frac{du^\beta(t)}{dt}} \right| \end{aligned}$$

### 8.3.2 测地曲率的几何意义

作为内蕴几何的研究对象, 测地曲率有着更为重要的几何意义。注意到 (8.1) 式

$$\frac{d\vec{e}_1(s)}{ds} = \kappa_g \vec{e}_2 + \kappa_n \vec{e}_3$$

等价于

$$\frac{d\vec{\alpha}}{ds} = \kappa \vec{\beta} = \kappa_g \vec{e}_2 + \kappa_n \vec{e}_3$$

故

$$\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2, \text{ 且 } \kappa_g = \kappa \vec{\beta} \cdot \vec{e}_2 = \kappa \cos \theta$$

其中,  $\theta$  为  $\vec{\beta}$  和  $\vec{e}_2$  的夹角 (等同于  $\vec{\gamma}$  和  $\vec{n}$  的夹角)。这意味着

合积, 故可以只考虑  $\vec{r}'$  在切平面中的分量。

- 相当于把曲线的曲率分解为由所在曲面所导致的弯曲 ( $\vec{n}$  方向) 和曲线自身导致的弯曲 ( $\vec{e}_2$  方向)。
- 换言之, 对于曲面上的曲线而言, 应该忽略“外在”曲面的弯曲对曲线造成的影响, 关注“内在”曲线真正自身的弯曲程度——测地曲率。

例 8.1. 求椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

上由平面  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  所截的截线在点  $A = (a, 0, 0)$  的测地曲率 (曲线  $A$  点处以  $z$  轴正方向为定向)。

倘若直接使用测地曲率的公式,

$$\kappa_g = \sqrt{g} \left| \frac{\frac{du^1(s)}{ds}}{\frac{du^2(s)}{ds}} \frac{\frac{d^2u^1(s)}{ds^2}}{\frac{d^2u^2(s)}{ds^2}} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} \right|$$

或

$$\kappa_g = \frac{\sqrt{g}}{|\vec{r}'(t)|^3} \left| \frac{\frac{du^1(t)}{dt}}{\frac{du^2(t)}{dt}} \frac{\frac{d^2u^1(t)}{dt^2}}{\frac{d^2u^2(t)}{dt^2}} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{du^\alpha(t)}{dt} \frac{du^\beta(t)}{dt} \right|$$

不论是否使用弧长参数, 都需要先将曲面写成参数形式, 再将曲线写成  $(u(t), v(t))$  的形式, 后续的计算还要涉及到 Christoffel 记号, 是非常复杂的。

实际上, 例题中的曲线作为一条平面曲线, 其曲率以及主法向量, 次法向量都是非常容易求出的, 而椭球面自身的法向量, 也非常容易求出。所以, 我们应该使用测地曲率的几何意义  $\kappa_g = \kappa \cos \theta$  来进行求解。

重点是求出曲线

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \end{cases}$$

参数方程。令  $t = \frac{z}{c}$ , 可将  $x, y$  解出

$$\vec{r}(t) = \left( a \frac{1 + \sqrt{1 - 2t^2}}{2}, b \frac{1 - \sqrt{1 - 2t^2}}{2}, ct \right)$$

当然, 令  $2t^2 = \sin^2 \psi$  还可以进一步写成

$$\vec{r}(\psi) = \left( a \cos^2 \frac{\psi}{2}, b \sin^2 \frac{\psi}{2}, c \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \right)$$

我们这里不妨选用第二个参数表达式来计算曲率,

$$\vec{r}' = \left( -\frac{a}{2} \sin \psi, \frac{b}{2} \sin \psi, c \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi \right)$$

$$\vec{r}'' = \left( -\frac{a}{2} \cos \psi, \frac{b}{2} \cos \psi, -c \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \right)$$

于是

$$\kappa(\psi) = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3} = \frac{|(\frac{\sqrt{2}}{4}bc, \frac{\sqrt{2}}{4}ac, 0)|}{(\frac{a^2+b^2}{4} \sin^2 \psi + \frac{c^2}{2} \cos^2 \psi)^{\frac{3}{2}}}$$

代入  $\psi = 0$ , 有

$$\kappa = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c^2}$$

注意, 还要求出夹角。理论上, 根据  $\kappa_g = \kappa \cos \theta$ ,  $\theta$  为  $\vec{\beta}$  和  $\vec{e}_2$  的夹角。但是此时  $\vec{e}_2$  并不容易求出 (真的要求出的话, 需要  $\vec{\alpha}$  和  $\vec{n}$  外积), 所以, 我们转而考虑  $\vec{\gamma}$  和  $\vec{n}$  的夹角。此时,  $\vec{n} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{\gamma} = (\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0)$ 。最终,  $\kappa_g = \frac{b}{c^2}$ 。

若要使用平面曲线的相对曲率公式  $\kappa_r(s) = \left| \begin{array}{cc} x'(s) & y'(s) \\ x''(s) & y''(s) \end{array} \right|$ , 需要选取一个新的直角标架, 反而比较麻烦。此外, 由于这里的曲线是两张曲面的交线, 我们也可以利用利用曲线普通方程求解曲率的方法 (参考习题)。

最后, 我们回到曲面上曲线上标架场的运动公式

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_1(s)}{ds} &= \kappa_g \vec{e}_2 + \kappa_n \vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_2(s)}{ds} &= -\kappa_g \vec{e}_1 + \tau_g \vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_3(s)}{ds} &= -\kappa_n \vec{e}_1 - \tau_g \vec{e}_2 \end{aligned}$$

显然, 和三维欧氏空间中的曲线论基本定理雷同: 如果曲面上曲线的测地曲率, 测地挠率, 以及法曲率确定, 那么这条曲线就是确定的。当然, 我们知道实际上测地挠率和法曲率和曲线无关, 是由曲面决定的。也就是说, 给定初始点和切向量, 表面上的曲线完全由弧长和测地曲率所决定。这一点和平面曲线完全由弧长参数下的相对曲率决定是一致的。我们在第8.6节还会得到一个曲面上曲线由测地曲率决定的显式表达式。

## 8.4 预测地线和测地线

回忆, 平面曲线的运动方程:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}'(s) &= \kappa_r(s)\vec{\beta}(s) \\ \vec{\beta}'(s) &= -\kappa_r(s)\vec{\alpha}(s)\end{aligned}$$

和 Darboux 标架运动方程对比:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_1(s)}{ds} &= \kappa_g\vec{e}_2 + \kappa_n\vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_2(s)}{ds} &= -\kappa_g\vec{e}_1 + \tau_g\vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_3(s)}{ds} &= -\kappa_n\vec{e}_1 - \tau_g\vec{e}_2\end{aligned}$$

如果曲面为平面, 也就是法向量  $\vec{n}$  固定, 由第 3 式知  $\kappa_n, \tau_g$  均为零。平面曲线的相对曲率  $\kappa_r$ , 对应曲面上曲线的测地曲率  $\kappa_g$ 。同时, 我们知道, 平面上若  $\kappa_r \equiv 0$ , 则曲线为直线。自然可引入

定义 8.2. 在正则参数曲面  $S$  上的正则参数曲线  $(u(t), v(t))$ , 如果满足测地曲率恒等于零, 即

$$\kappa_g = \frac{\sqrt{g}}{|\vec{r}'(t)|^3} \left| \begin{array}{cc} \frac{du^1(t)}{dt} & \frac{d^2u^1(t)}{dt^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{du^\alpha(t)}{dt} \frac{du^\beta(t)}{dt} \\ \frac{du^2(t)}{dt} & \frac{d^2u^2(t)}{dt^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^2 \frac{du^\alpha(t)}{dt} \frac{du^\beta(t)}{dt} \end{array} \right| = 0$$

则称为曲面  $S$  上的预测地线 (pregeodesic)。

简而言之, 预测地线相当于平面中的直线在曲面上的推广。这里需要特别注意的是预测地线并不需要取弧长参数。

## 8.4.1 弧长参数下的测地线方程

我们自然很关心, 什么样的曲线是预测地线。根据定义, 若曲线对应的

$$\kappa_g = \frac{\sqrt{g}}{|\vec{r}'(t)|^3} \left| \begin{array}{cc} \frac{du^1(t)}{dt} & \frac{d^2u^1(t)}{dt^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{du^\alpha(t)}{dt} \frac{du^\beta(t)}{dt} \\ \frac{du^2(t)}{dt} & \frac{d^2u^2(t)}{dt^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^2 \frac{du^\alpha(t)}{dt} \frac{du^\beta(t)}{dt} \end{array} \right| = 0$$

则为预测地线。当然, 正则参数曲线总能取回到弧长参数, 根据我们在上一节的讨论, 也就意味着

$$\kappa_g = \sqrt{g} \left| \begin{array}{cc} \frac{du^1(s)}{ds} & \frac{d^2u^1(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} \\ \frac{du^2(s)}{ds} & \frac{d^2u^2(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^2 \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} \end{array} \right| = 0$$

也成立。但是不论是弧长参数，还是非弧长参数，条件都太复杂了；更重要的是，作为可微曲线，点点都要满足测地曲率为零这一关系，对曲线的限制远比想象中的要大得多。回到 Darboux 标架运动方程：

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_1(s)}{ds} &= \kappa_g \vec{e}_2 + \kappa_n \vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_2(s)}{ds} &= -\kappa_g \vec{e}_1 + \tau_g \vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_3(s)}{ds} &= -\kappa_n \vec{e}_1 - \tau_g \vec{e}_2\end{aligned}$$

若有  $\kappa_g = 0$ ，则变为

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_1(s)}{ds} &= \kappa_n \vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_2(s)}{ds} &= \tau_g \vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_3(s)}{ds} &= -\kappa_n \vec{e}_1 - \tau_g \vec{e}_2\end{aligned}$$

来看运动方程中的第一个等式：

$$\frac{d\vec{e}_1(s)}{ds} = \kappa_n \vec{e}_3$$

即

$$\frac{d(\vec{r}_\gamma \frac{du^\gamma(s)}{ds})}{ds} = \kappa_n \vec{n}$$

再利用链式求导法则和曲面自然标架运动公式有

$$\sum_{\gamma=1}^2 \left( \frac{d^2 u^\gamma(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} \right) \vec{r}_\gamma + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 b_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} \vec{n} = \kappa_n \vec{n}$$

注意到此时  $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n}\}$  实际上是曲面的自然标架，故

$$\begin{cases} \frac{d^2 u^\gamma(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} = 0, & \gamma = 1, 2 \\ \sum_{\alpha, \beta=1}^2 b_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} = \kappa_n \end{cases}$$

然而

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^2 b_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} & \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} \\ \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} = \kappa_n$$

也就是说充要条件中第二个式子是自动满足的。这一点非常容易理解，因为  $\kappa_n$  只和切方向相关，反映的是曲面的性质，与曲线无关。

我们还需要来看和测地曲率相关的运动方程中的第二个式子:

$$\frac{d\vec{e}_2(s)}{ds} = \tau_g \vec{e}_3$$

即

$$\frac{d(\vec{n} \times \sum_{\gamma=1}^2 \vec{r}_\gamma \frac{du^\gamma(s)}{ds})}{ds} = \tau_g \vec{n}$$

左端展开有:

$$\sum_{\gamma,\eta=1}^2 \vec{n}_\eta \times \vec{r}_\gamma \frac{du^\gamma(s)}{ds} \frac{du^\eta(s)}{ds} + \sum_{\gamma,\eta=1}^2 \vec{n} \times \vec{r}_{\gamma\eta} \frac{du^\gamma(s)}{ds} \frac{du^\eta(s)}{ds} + \sum_{\gamma=1}^2 \vec{n} \times \vec{r}_\gamma \frac{d^2u^\gamma(s)}{ds^2} = \tau_g \vec{n}$$

左右两端同时和  $\vec{n}, \vec{r}_\xi$  做内积。注意到和  $\vec{n}$  做内积时左端自然得到测地挠率的表达式, 恒成立。只需要关心和  $\vec{r}_\xi$  做内积。

$$\sum_{\gamma,\eta=1}^2 (\vec{n}, \vec{r}_{\gamma\eta}, \vec{r}_\xi) \frac{du^\gamma(s)}{ds} \frac{du^\eta(s)}{ds} + \sum_{\gamma=1}^2 (\vec{n}, \vec{r}_\gamma, \vec{r}_\xi) \frac{d^2u^\gamma(s)}{ds^2} = 0$$

而

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma,\eta=1}^2 (\vec{n}, \vec{r}_{\gamma\eta}, \vec{r}_\xi) \frac{du^\gamma(s)}{ds} \frac{du^\eta(s)}{ds} &= \sum_{\alpha,\beta=1}^2 (\vec{n}, \vec{r}_{\alpha\beta}, \vec{r}_\xi) \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^2 (\vec{n}, \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{r}_\gamma, \vec{r}_\xi) \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 (\vec{n}, \vec{r}_\gamma, \vec{r}_\xi) \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} \end{aligned}$$

于是上式变为

$$\sum_{\gamma=1}^2 (\vec{n}, \vec{r}_\gamma, \vec{r}_\xi) \left( \frac{d^2u^\gamma(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} \right) = 0, \quad \xi = 1, 2$$

同时, 注意到  $(\vec{n}, \vec{r}_\gamma, \vec{r}_\xi)$  只有  $\xi \neq \gamma$  时才非零, 实际上并不需要做和, 故和之前从运动方程中第一个式子出发的推导有相同的关系式

$$\frac{d^2u^\gamma(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} = 0, \quad \gamma = 1, 2 \quad (8.7)$$

其实心思灵敏的读者一定早已觉察出这样的验证是无用功。因为已经知道单位正交标架的运动公式中的系数矩阵是反对称的, 第一个式子中已有  $\tau_g = 0$ , 第二个式子中  $\tau_g = 0$  必然自动成立。

最后, 运动方程中的第三个式子与测地曲率无关, 恒成立(测地挠率是描述 Weingarten 映射和对角矩阵的差异)。

定义 8.3. 方程

$$\frac{d^2 u^\gamma(s)}{ds^2} + \sum_{\gamma, \eta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} = 0, \quad \gamma = 1, 2$$

称为弧长参数下的测地线方程(组)。满足这一方程的曲线称为弧长参数下的测地线。

反过来, 曲线满足弧长参数下的测地线方程, 即(8.7)式成立, 则显然有

$$\kappa_g = \sqrt{g} \left| \begin{array}{cc} \frac{du^1(s)}{ds} & \frac{d^2 u^1(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} \\ \frac{du^2(s)}{ds} & \frac{d^2 u^2(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^2 \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} \end{array} \right| = 0$$

换言之,

- 预测地线一定可以取到弧长参数, 成为弧长参数下的测地线;
- 弧长参数下的测地线一定也是预测地线。

从而今后在弧长参数下, 我们不再区分预测地线和测地线, 统称为弧长参数下的测地线。

## 8.4.2 一般参数下的测地线方程

上一小节我们已经知道, 限制在弧长参数范畴, 预测地线和测地线是没有区别的。现在我们对非弧长参数, 做类似的讨论。对于预测地线, 已知有

$$\kappa_g = \sqrt{g} \left| \begin{array}{cc} \frac{du^1(s)}{ds} & \frac{d^2 u^1(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} \\ \frac{du^2(s)}{ds} & \frac{d^2 u^2(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^2 \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} \end{array} \right| = 0$$

可换成普通参数  $t$ ,

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{du^1(t)}{dt} \frac{dt}{ds} & \frac{d^2 u^1(t)}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{du^1(t)}{dt} \frac{d^2 t}{ds^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{du^\alpha(t)}{dt} \frac{du^\beta(t)}{dt} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \\ \frac{du^2(t)}{dt} \frac{dt}{ds} & \frac{d^2 u^2(t)}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{du^2(t)}{dt} \frac{d^2 t}{ds^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^2 \frac{du^\alpha(t)}{dt} \frac{du^\beta(t)}{dt} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \end{array} \right| = 0$$

利用行列式性质, 等价于

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{du^1(t)}{dt} & \frac{d^2u^1(t)}{dt^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{du^\alpha(t)}{dt} \frac{du^\beta(t)}{dt} \\ \frac{du^2(t)}{dt} & \frac{d^2u^2(t)}{dt^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^2 \frac{du^\alpha(t)}{dt} \frac{du^\beta(t)}{dt} \end{array} \right| = 0$$

这意味方程

$$\frac{d^2u^\gamma(t)}{dt^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\alpha(t)}{dt} \frac{du^\beta(t)}{dt} = 0, \quad \gamma = 1, 2 \quad (8.8)$$

也可以导出  $\kappa_g = 0$ 。因此, 我们把方程(8.8)称为一般参数下的测地线方程, 或直接简称为测地线方程。满足测地线方程(8.8)的曲线称为测地线。显然, 测地线一定是预测地线。但是反过来, 一般参数下的预测地线, 并不一定满足测地线方程。这是因为, 对于测地线而言,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{\gamma=1}^2 \frac{du^\gamma}{dt} \vec{r}_\gamma \right) \\ &= \sum_{\gamma=1}^2 \left( \frac{d^2u^\gamma(t)}{dt^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\alpha(t)}{dt} \frac{du^\beta(t)}{dt} \right) \vec{r}_\gamma + \sum_{\alpha,\beta=1}^2 b_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha(t)}{dt} \frac{du^\beta(t)}{dt} \vec{n} \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^2 b_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha(t)}{dt} \frac{du^\beta(t)}{dt} \vec{n} \end{aligned}$$

从而

$$\vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'(t) = 0$$

故  $|\vec{r}'(t)|$  为常数。而一般参数下的预测地线的参数可以取任何正则参数。用式子来表达, 就是对于同一个参数  $t$  而言

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{du^1(t)}{dt} & \frac{d^2u^1(t)}{dt^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{du^\alpha(t)}{dt} \frac{du^\beta(t)}{dt} \\ \frac{du^2(t)}{dt} & \frac{d^2u^2(t)}{dt^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^2 \frac{du^\alpha(t)}{dt} \frac{du^\beta(t)}{dt} \end{array} \right| = 0$$

⇓ ↑

$$\frac{d^2u^\gamma(t)}{dt^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\alpha(t)}{dt} \frac{du^\beta(t)}{dt} = 0, \quad \gamma = 1, 2$$

为了把预测地线和测地线之间的关系解释的更清楚一些, 我们以弧长参数下的测地线作为标尺来说明。

首先, 如果曲线满足一般的测地线方程(8.8), 则有  $|\vec{r}'(t)| = C$ , 做参数变换  $s = |\vec{r}'(t)|t = Ct$  得到弧长参数。令  $t = \frac{s}{C}$  代入方程 (8.8) 中得到弧长参数下测地线的方

程(8.7)。也就是对于测地线方程而言, 参数是普通参数或者弧长参数没有什么实质的不同, 因为只要满足测地线方程, 曲线的切向量模长就是常数, 曲线的参数就一定是弧长参数的常数倍。

其次, 如果曲线满足弧长参数下的测地线方程(8.7), 做任意一个正则参数变换  $t = t(s)$  并代入方程(8.7)中有:

$$\frac{d^2 u^\gamma(t)}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{du^\gamma(t)}{dt} \frac{d^2 t}{ds^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\alpha(t)}{dt} \frac{du^\beta(t)}{dt} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0, \quad \gamma = 1, 2$$

这并非是非弧长参数下的测地线方程。

这里很多初学的同学会有些困惑, 实际上大家只需要明白的是: 测地线(满足测地线方程)会自动赋予曲线一个好的正则参数(切向量模长恒定); 而预测地线强调的点的集合, 参数可以是任意正则参数。一句话, 作为点集, 预测地线和测地线没有区别, 但是两者的参数化方式不同。

同时, 因为我们本来就希望曲线具有好的参数化以简化运算, 因此以后我们默认研究的都是测地线, 而非预测地线。

### 8.4.3 测地线的存在唯一性

**一般的曲面上是否存在测地线? 有的话有几条?** 我们需要来看测地线方程解的存在性和唯一性。

$$\frac{d^2 u^\gamma(t)}{dt^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\alpha(t)}{dt} \frac{du^\beta(t)}{dt} = 0, \quad \gamma = 1, 2$$

这是二阶拟线性常微分方程组, 求解需要给定初始值以及初始的一阶导数值, 相当于给定出发点  $p$  和出发点处的一个切向量  $\vec{v}$ 。

**定理 8.4.** 对于曲面  $S$  上的任意一点  $p$  和曲面  $S$  在点  $p$  的任意一个单位切向量  $\vec{v}$ , 在曲面上必存在唯一的一条以弧长为参数的测地线  $C$  通过点  $p$ , 并且在点  $p$  以  $\vec{v}$  为它的切向量。

不难注意到, 如果  $\vec{v}$  不是单位向量, 类似的定理也成立, 只是这时它不是弧长参数, 而是弧长参数的常数倍 ( $|\vec{v}|$  倍)。

**例 8.5.** 已知曲面第一基本形式为  $I = (du)^2 + u^2(dv)^2$ , 求曲面上测地线。

这里  $(u, v)$  实际上就相当于平面上的极坐标。

解. 先求 Christoffel 记号。由于是正交参数系, 有

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \log E}{\partial u} = 0, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} \frac{\partial \log E}{\partial v} = 0, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2E} \frac{\partial G}{\partial u} = -u \\ \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial v} = 0, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial \log G}{\partial u} = \frac{1}{u}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \log G}{\partial v} = 0 \end{aligned}$$

测地线方程为

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} - u \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 = 0 \\ \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{2}{u} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} = 0 \end{cases}$$

先来看第二个方程

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{2}{u} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} = 0$$

令  $f = \frac{dv}{dt}$ , 方程改写为

$$\frac{df}{dt} + \frac{2}{u} \frac{du}{dt} f = 0$$

添加积分因子有

$$u^2 \frac{df}{dt} + 2u \frac{du}{dt} f = 0$$

于是

$$\frac{d}{dt}(u^2 f) = 0$$

令  $u^2 f = A$ , 有  $f = \frac{A}{u^2}$ , 代回到第一个方程, 有

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{A^2}{u^3} = 0$$

这是一个非线性的二阶自治常微分方程。处理高阶线性常微分方程有固定的策略, 化为方程组降阶:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{A^2}{u^3} \end{cases}$$

两方程相除, 有

$$\frac{dy}{du} = \frac{A^2}{yu^3}$$

分离变量后求解得到

$$y = \pm \sqrt{B - \frac{A^2}{u^2}}$$

于是

$$\frac{du}{dt} = \pm \sqrt{B - \frac{A^2}{u^2}}$$

继续使用分离变量法求解

$$\frac{du}{\sqrt{B}\sqrt{1 - \frac{A^2}{Bu^2}}} = \pm dt$$

令  $\tilde{u} = \frac{\sqrt{Bu}}{A}$ , 有

$$\frac{A}{B} \frac{\tilde{u}d\tilde{u}}{\sqrt{\tilde{u}^2 - 1}} = \pm dt$$

于是

$$\frac{A}{B} \sqrt{\tilde{u}^2 - 1} = C \pm t$$

即

$$\tilde{u}^2 = \frac{B^2(t \pm C)^2}{A^2} + 1$$

进而

$$u^2 = B(t \pm C)^2 + \frac{A^2}{B}$$

由于  $t$  只是参数, 不妨令  $\tilde{t} = t \pm C$ , 且简单起见, 仍然把  $\tilde{t}$  记为  $t$ , 有

$$u^2 = Bt^2 + \frac{A^2}{B} \quad (8.9)$$

根据  $\frac{dv}{dt} = f = \frac{A}{u^2}$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{AB}{B^2t^2 + A^2}$$

此时关于  $v$  的积分是大家所熟知的:

$$v = \int \frac{AB}{B^2t^2 + A^2} dt = \int \frac{1}{(\frac{Bt}{A})^2 + 1} d\frac{Bt}{A} = \arctan\left(\frac{Bt}{A}\right) + C \quad (8.10)$$

最终, 得到测地线的参数方程为

$$\begin{cases} u = \pm \sqrt{Bt^2 + \frac{A^2}{B}} \\ v = \arctan\left(\frac{Bt}{A}\right) + C \end{cases}$$

方程中的常数可以由给定点, 以及给定点处的切向量确定。

现在我们希望消去参数  $t$ 。首先(8.10)式等价于

$$\tan(v - C) = \frac{Bt}{A}$$

再与(8.9)式联立得

$$\frac{B}{A^2}u^2 = \tan^2(v - C) + 1 = \sec^2(v - C)$$

最终有

$$u \cos(v - C) = \frac{A}{\sqrt{B}}$$

这是极坐标系下的直线方程。 □

可见即便有理论上的存在性和唯一性，一般的测地线方程仍然是非常难解的（远比运动方程难解，运动方程只是一阶的方程组，而且更重要是运动方程是线性的，而测地线方程是非线性的）。我们自然希望能在一些相对简单的情形下化简方程。这便是8.6节的内容。

#### 8.4.4 测地线的几何意义

给出测地线的定义之后，最自然的想法是直接根据定义，导出测地线所满足的关系式，进而找出全部的测地线。然而，这样做就涉及到了列出测地线所满足的方程并求解，是一个复杂的过程。所以，我们也希望能从更几何的角度来理解并判定测地线。

已经说明，有  $\kappa_g = \kappa \cos \theta$ ，其中  $\theta$  是  $\vec{\beta}$  和  $\vec{e}_2$  的夹角。于是

**命题 8.6.** 曲面  $S$  上的一条曲线  $C$  是测地线，当且仅当它是一条直线，或者它的主法向量处处是曲面  $S$  的法向量。

- 所谓主法向量处处是曲面  $S$  的法向量，几何上即曲线完全顺着曲面弯；
- 这意味着测地线，就是忽略掉外在曲面所造成的影响，曲线自主的弯曲程度为零，即表面上的“直线”。

**例 8.7.** 试证：旋转面  $S$  上的经线是该表面上的测地线。

我们试图通过证明如下命题来进一步探究测地线的几何意义。

**命题 8.8.** 如果在曲面  $S$  上运动的质点  $p$  只受到将它约束在曲面  $S$  上的力的作用，而不受任何其他外力的作用，则点  $p$  在力的作用下的轨迹  $C$  是曲面上的测地线。

证明. 设质点  $p$  的运动方程（轨迹）为  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ，根据题意，它是  $S$  上的一条曲线。根据牛顿第二定律，

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2}$$

其中， $m$  是质量， $\mathbf{F}$  与曲面法向量  $\vec{n}$  共线。因为  $\mathbf{F}$  的具体形式未知，直接求解这一常微分方程是不现实的，我们尝试利用之前测地线性质的命题来给出证明。

观察方程

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2}$$

注意，这里的参数  $t$  并不一定是曲线的弧长参数。考虑一种最极端的情形，如果  $t$  为弧长参数，则  $\frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \kappa \beta$ ，据题意，主法向量  $\beta$  就是  $\vec{n}$ ，自然得证。

但一般而言  $t$  并非弧长参数，方程两边同时与切向量  $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$  做内积，有

$$\frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{1}{m} \mathbf{F} \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 0$$

于是

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 0$$

这说明

$$\left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right| = \text{常数}$$

也就是参数  $t$  与弧长参数  $s$  只差一个常数倍。同样， $\frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2}$  和曲线的曲率向量也差常数倍，得证。□

现在我们可以更形象地解释为何称为“测地线”：地球是圆的，两人各拿绳子的一端，紧贴地面拉紧。绳子除自身张力外，只受地表的支撑力，且支撑力作为约束力与球面垂直（实际上还受到地球的引力，但是一方面对于理想绳而言地球引力可以忽略，另一方面地球引力也与球地表面垂直）。此时绳子的轨迹就是测地线！它确实是用来“测地”的。

此外，在之前的例子当中，我们发现，对于只受曲面垂直方向力的作用的点的轨迹，不论是否取弧长参数，我们都有  $\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \text{const}$ 。这和我们上一小节中说明满足测地线方程的曲线切向量模场为常数相吻合。



图 8.1: 底比斯古墓壁画, 约公元前 1415 年

## 8.5 协变导数和平行移动

回顾一下我们引入测地线的过程:

1. 首先需要的是曲面上与曲面相容的标架场;
2. 然后引出测地曲率;
3. 最终由测地曲率为零导出测地线的定义及方程。

这样的引入路径有很明显的不足:

- 虽然我们最后说明了测地线的方程完全由内蕴的几何量决定, 但是一开始却需要外在的与曲面相容的标架;
- 测地曲率的表达式非常复杂, 导致推导测地线方程时也非常复杂。

我们有必要从一个更内蕴, 更本质的角度来导入测地线, 同时这样的方式也是更简单明了的。

## 8.5.1 协变导数的引入与严格定义

我们在推导测地线方程时，使用了标架的运动公式

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_1(s)}{ds} &= \kappa_g \vec{e}_2 + \kappa_n \vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_2(s)}{ds} &= -\kappa_g \vec{e}_1 + \tau_g \vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_3(s)}{ds} &= -\kappa_n \vec{e}_1 - \tau_g \vec{e}_2\end{aligned}$$

当  $\kappa_g \equiv 0$ ，变为

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_1(s)}{ds} &= \kappa_n \vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_2(s)}{ds} &= \tau_g \vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_3(s)}{ds} &= -\kappa_n \vec{e}_1 - \tau_g \vec{e}_2\end{aligned}$$

实际上只需要处理第一个方程

$$\frac{d\vec{e}_1(s)}{ds} = \kappa_n \vec{e}_3$$

我们来重新分析对这一方程的处理过程。这一方程可改写为

$$\frac{d(\sum_{\gamma=1}^2 \vec{r}_\gamma \frac{du^\gamma(s)}{ds})}{ds} = \kappa_n \vec{n}$$

进而得到

$$\sum_{\gamma=1}^2 \left( \frac{d^2 u^\gamma(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} \right) \vec{r}_\gamma + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 b_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} \vec{n} = \kappa_n \vec{n}$$

现在来比较基底  $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n}\}$  前的系数，注意到

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^2 b_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} \vec{n} = \kappa_n \vec{n}$$

恒成立，从而得到测地线方程

$$\frac{d^2 u^\gamma(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} = 0 \quad \gamma = 1, 2$$

总之，回过头来审视方程

$$\frac{d(\sum_{\gamma=1}^2 \vec{r}_\gamma \frac{du^\gamma(s)}{ds})}{ds} = \kappa_n \vec{n}$$

实际上意味着向量  $\frac{d(\sum_{\gamma=1}^2 \vec{r}_\gamma \frac{du^\gamma(s)}{ds})}{ds}$  在切空间  $TS$  上的分量为零。由于  $\vec{n}$  与  $TS$  垂直，也可以理解为向量  $\frac{d(\sum_{\gamma=1}^2 \vec{r}_\gamma \frac{du^\gamma(s)}{ds})}{ds}$  向  $TS$  的正交投影为零。

在曲面的标架  $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n}\}$  中， $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  是和第一类基本量密切相关的（或者说完全被第一类基本量所描述）， $\vec{n}$  与第一类基本量无关，但是和第二类基本量密切相关。

向  $TS$  垂直投影，可以理解为限制在曲面自身内部，把和外在几何相关的量忽略掉，只保留内蕴几何相关信息。也就是作为测地线，可以认为“限制”在曲面上， $\vec{r}'$  “为零”，即  $\vec{r}'$  为“常向量”，类比于欧氏空间中的直线。

为了更好地描述这种限制于曲面的运算，我们引入一个新的概念，即所谓的协变导数。首先，我们在第三章中定义了曲面上的切向量场。改换为张量记号，在曲面的自然标架下  $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n}\}$  下，切向量场可以写为

$$X(u^1, u^2) = \sum_{\alpha=1}^2 x^\alpha(u^1, u^2) \vec{r}_\alpha(u^1, u^2)$$

设  $C: u^\alpha = u^\alpha(t)$  是曲面  $S$  上的曲线，记  $X(t)$  是曲面  $S$  上切向量场  $X(u^1, u^2)$  在曲线  $C$  上的限制，即

$$X(t) = \sum_{\alpha=1}^2 x^\alpha(u^1(t), u^2(t)) \vec{r}_\alpha(u^1(t), u^2(t))$$

简单地看， $X(t)$  是一个以  $t$  为自变量的向量函数，这样的向量函数自然可以考虑关于自变量  $t$  求导数，然而此时  $\frac{dX(t)}{dt}$  是沿曲线  $C$  上欧氏空间  $E^3$  中的一个向量场，一般说来并不落在曲面  $S$  的切空间中，不是曲面的切向量场。为了能够内蕴地求切向量场的导数，我们将  $\frac{dX(t)}{dt}$  正交投影到曲面相应的切空间上，引入

定义 8.9.

$$\frac{DX(t)}{dt} = \left(\frac{dX(t)}{dt}\right)_\top = \frac{dX(t)}{dt} - \left(\frac{dX(t)}{dt} \cdot \vec{n}\right) \vec{n}$$

称为切向量场  $X(t)$  沿曲线  $C$  的协变导数。

目前，我们现在都是在限制在曲线上考虑协变导数，实际上在第三章里我们就探讨过可以用方向导数替换沿曲线求导。因此，我们一样可以考虑切向量场关于某个切向量求协变导数。具体来看，假设  $X$  是曲面  $S$  上的切向量场， $Y$  是  $p$  点处的切向量，记  $\frac{\partial X}{\partial Y}$

为切向量场  $X$  关于切向量  $Y$  在  $p$  点处的方向导数, 规定切向量场  $X$  关于切向量  $Y$  的协变导数为

$$D_Y X = \left( \frac{\partial X}{\partial Y} \right)^\top = \frac{\partial X}{\partial Y} - \left( \frac{\partial X}{\partial Y} \cdot \vec{n} \right) \vec{n}$$

而且很容易验证, 如果存在曲面上过  $p$  点的曲线  $C: (u(t), v(t))$ , 以  $Y$  为曲线在  $p$  点处的切向量, 则有

$$D_Y X = \frac{DX(u(t), v(t))}{dt}$$

大家不妨把协变导数的这一表达式和方向导数的表达式

$$\frac{\partial X}{\partial Y} = \frac{dX(u(t), v(t))}{dt}$$

做对比, 可见通过曲线定义的协变导数和通过方向导数定义的协变导数是相容的。但是通过方向导数定义的协变导数应用范围显然更广一些。后续第十章中, 我们会用到方向导数和相应形式的协变导数, 目前这一章内容, 仅仅考虑曲线上的协变导数就足够了。

## 8.5.2 协变导数的性质与具体表达式

向量场的协变导数和向量函数的普通导数的性质类似。假定  $X(t), Y(t)$  都是曲面上沿着曲线  $C$  的切向量场, 根据定义不难验证

1.  $\frac{D}{dt}(X(t) + Y(t)) = \frac{D}{dt}X(t) + \frac{D}{dt}Y(t)$
2.  $\frac{D}{dt}(f(t)X(t)) = \frac{df}{dt}X(t) + f(t)\frac{D}{dt}X(t)$
3.  $\frac{d}{dt}(X(t) \cdot Y(t)) = \frac{D}{dt}X(t) \cdot Y(t) + X(t) \cdot \frac{D}{dt}Y(t)$
4. 将曲线  $C$  重新参数化, 令  $t = t(s)$ , 则有

$$\frac{D}{ds}X(t(s)) = \left( \frac{D}{dt}X(t) \right) t'(s) \quad (8.11)$$

现在我们来推导协变导数的具体表达式。设  $X(t) = x^\alpha(t)\vec{r}_\alpha(u^1(t), u^2(t))$ , 已经知道

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^2 \frac{dx^\alpha}{dt} \vec{r}_\alpha + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 x^\alpha \vec{r}_{\alpha\beta} \frac{du^\beta}{dt} \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 \frac{dx^\alpha}{dt} \vec{r}_\alpha + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 x^\alpha \left( \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{r}_\gamma + b_{\alpha\beta} \vec{n} \right) \frac{du^\beta}{dt} \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 \frac{dx^\alpha}{dt} \vec{r}_\alpha + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 (x^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\beta}{dt}) \vec{r}_\gamma + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 (x^\alpha b_{\alpha\beta} \frac{du^\beta}{dt}) \vec{n} \\ &= \sum_{\gamma=1}^2 \frac{dx^\gamma}{dt} \vec{r}_\gamma + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 (x^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\beta}{dt}) \vec{r}_\gamma + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 (x^\alpha b_{\alpha\beta} \frac{du^\beta}{dt}) \vec{n} \\ &= \sum_{\gamma=1}^2 \left( \frac{dx^\gamma}{dt} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 x^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\beta}{dt} \right) \vec{r}_\gamma + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 (x^\alpha b_{\alpha\beta} \frac{du^\beta}{dt}) \vec{n} \end{aligned}$$

于是

$$\frac{DX(t)}{dt} = \sum_{\gamma=1}^2 \left( \frac{dx^\gamma}{dt} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 x^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\beta}{dt} \right) \vec{r}_\gamma = \sum_{\alpha=1}^2 \left( \frac{dx^\alpha}{dt} + \sum_{\beta, \gamma=1}^2 x^\beta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{du^\gamma}{dt} \right) \vec{r}_\alpha$$

从表达式不难看出, 协变导数只和曲面的第一类基本量有关, 确实是内蕴几何研究的范畴。

### 8.5.3 平行向量场

定义 8.10.  $X(t)$  是曲面上沿着曲线  $C$  的切向量场, 如果

$$\frac{DX(t)}{dt} = \vec{0}$$

则称切向量场  $X(t)$  沿曲线  $C$  是平行的。

很容易看出平行向量场有如下性质:

- 根据 (8.11) 式, 平行向量场与正则曲线的容许参数变换无关。
- 根据协变导数性质 3, 对平行向量场  $X(t)$  有

$$\frac{d}{dt}(X(t) \cdot X(t)) = \frac{DX(t)}{dt} \cdot X(t) + X(t) \cdot \frac{DX(t)}{dt} = 0$$

也就是平行向量场的长度不变, 是“常”向量。

我们进一步从方程角度研究平行向量场的性质。根据协变导数的表达式, 我们知道曲线  $C$  上的向量场  $X(t) = x^\alpha(t)\vec{r}_\alpha(u^1(t), u^2(t))$  平行的充分必要条件为

$$\frac{dx^\alpha}{dt} + \sum_{\beta, \gamma=1}^2 x^\beta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{du^\gamma}{dt} = 0, \quad \alpha = 1, 2$$

其中  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(u^1(t), u^2(t))$ ,  $\frac{du^\gamma(t)}{dt}$  都是  $t$  的已知函数。这是一个关于  $x^\alpha(t)$  的一阶线性常微分方程组。这意味着, 在  $t=0$  处 (即在  $(u^1(0), u^2(0))$  点), 给定初值  $(x^1(0), x^2(0))$  (初始切向量  $X(0)$ ), 必然有沿曲线的解 (沿曲线的平行向量场  $X(t)$ )。

例 8.11. 在平面上, 第一基本形式为  $du^2 + dv^2$ 。因为所有的  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  均为零, 平行向量场的方程变为

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = 0, \quad \alpha = 1, 2$$

意味着此时的平行向量场就是通常的常向量场。

### 8.5.4 通过协变导数引入测地线

有了这些准备工作后, 我们来重新审视测地线。从测地曲率的角度出发来看, 已经知道, 下列事实等价

1. 曲线  $C$  的测地曲率为零,
2. 弧长参数下满足下述方程

$$\frac{d(\sum_{\gamma=1}^2 \vec{r}_\gamma \frac{du^\gamma(s)}{ds})}{ds} = \kappa_n \vec{n}$$

3. 在弧长参数下有

$$\frac{D(\sum_{\gamma=1}^2 \vec{r}_\gamma \frac{du^\gamma(s)}{ds})}{ds} = \vec{0}$$

4. 在任意相容参数下有

$$\frac{D(\sum_{\gamma=1}^2 \vec{r}_\gamma \frac{du^\gamma(t)}{dt})}{dt} = \vec{0}$$

5. 满足方程

$$\frac{d^2 u^\gamma}{dt^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\alpha}{dt} \frac{du^\beta}{dt} = 0, \quad \gamma = 1, 2$$

也就是说, 所谓测地线, 从协变导数的角度出发来看, 就是切向量场平行的曲线。我们可以从这个角度重新定义测地线:

定义 8.12. 如果曲面  $S$  上的曲线  $C: u^\alpha = u^\alpha(t)$ , 自身的切向量场沿曲线是平行的, 即

$$\frac{D(\sum_{\gamma=1}^2 \vec{r}_\gamma \frac{du^\gamma(t)}{dt})}{dt} = \vec{0}$$

则它是测地线。

显然这一定义与满足测地线方程(8.8)等价。这样定义最大的好处在于: 完全的内蕴的角度, 无需外在的曲面上的标架场, 只需要内蕴的抽象的第一基本形式即可。

还有很多其他的好处

- 可以直接看出测地线的切向量模长恒为常数;
- 参数变换关系清晰明了: 平行的曲线切向量场长度固定, 意味着测地线的不同参数天然就差一个倍数;
- 直接得到测地线方程, 方便我们从方程的角度研究测地线, 省去了由测地曲率为零推导测地线方程的复杂过程;
- 反过来, 若满足测地线方程, 测地曲率  $\tau_g = (\vec{n}'(s), \vec{r}'(s), \vec{n}(s))$  为零是显然的。

而有这么多的好处, 根本原因在于我们采用了更本质, 更内蕴的观点来研究测地线。

最后我们提醒大家注意一点: 测地线的切向量场是特殊的平行向量场, 但求平行向量场和求测地线两者仍有一定的区别:

- 对于曲线上的平行向量场而言, 曲线是固定已知的, 需要求解的只是向量场而已; 但测地线本身是未知的, 曲线是需要求解的对象;
- 反映在方程上, 平行向量场的方程

$$\frac{dx^\gamma}{dt} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 x^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\beta}{dt} = 0, \quad \gamma = 1, 2$$

中  $\frac{du^\beta}{dt}$  是已知的, 方程是关于  $x^\gamma(t)$  的一阶线性常微分方程; 测地线的方程

$$\frac{d^2u^\gamma}{dt^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\alpha}{dt} \frac{du^\beta}{dt} = 0, \quad \gamma = 1, 2$$

是关于  $u^\alpha(t)$  的二阶非线性常微分方程。

## 8.6 切向辐角下的测地曲率和协变导数的 Liouville 公式, 以及测地线方程

测地曲率和测地线, 表达式和方程都十分复杂。回忆, 在平面曲线的情形, 如果采用方向角  $\theta$  作为参数, 则有

$$\kappa_r(s) = \frac{d\theta(s)}{ds}$$

进而平面曲线相应的方程也得到大大简化。

我们希望利用曲线之间的夹角, 将测地曲率  $\kappa_g$  和测地线的方程也写成比较简单的表达式。

### 8.6.1 测地曲率的 Liouville 公式

**定理 8.13.** 设  $(u, v)$  是曲面  $S$  上的正交参数系, 第一基本形式为  $I = E(du)^2 + G(dv)^2$ 。 $C: u = u(s), v = v(s)$  是曲面上的一条曲线,  $s$  为弧长参数。假定曲线  $C$  与  $u$ -曲线的夹角是  $\theta$ , 则

$$\kappa_g = \frac{d\theta(s)}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \log E}{\partial v} \cos \theta + \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \log G}{\partial u} \sin \theta \quad (8.12)$$

这一测地曲率的表达式称为 **Liouville 公式**。

这里的角度  $\theta$ , 也称为曲线  $C$  的**切向辐角**。接下来开始定理的证明。若直接把原有的测地曲率的表达式(8.6)改写为有关  $\theta$  的表达式, 因为要涉及到 Christoffel 符号, 运算会非常复杂。回到最开始的出发点,

$$\frac{d\vec{e}_1(s)}{ds} = \kappa_g \vec{e}_2 + \kappa_n \vec{e}_3$$

此时,

$$\kappa_g = \frac{d\vec{e}_1(s)}{ds} \cdot \vec{e}_2$$

我们希望: 不对  $\vec{r}(s)$  或  $\vec{r}'(s)$  链式法则求导, 而是通过和  $\theta$  关联的方式得到  $\vec{e}_2$  和  $\frac{d\vec{e}_1(s)}{ds}$ 。已经知道  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  垂直, 但是并非单位向量。为了计算更简便, 将其单位化。

$$\vec{\alpha}_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \vec{r}_u, \quad \vec{\alpha}_2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \vec{r}_v$$

此时,

$$\vec{e}_1 = \cos \theta \vec{\alpha}_1 + \sin \theta \vec{\alpha}_2$$

再来计算

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_1(s)}{ds} &= \frac{d}{ds} (\cos \theta \vec{\alpha}_1 + \sin \theta \vec{\alpha}_2) \\ &= \frac{d\theta}{ds} (-\sin \theta \vec{\alpha}_1 + \cos \theta \vec{\alpha}_2) + \cos \theta \frac{d\vec{\alpha}_1}{ds} + \sin \theta \frac{d\vec{\alpha}_2}{ds} \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \vec{e}_2 &= -\sin \theta \vec{\alpha}_1 + \cos \theta \vec{\alpha}_2 \\ \frac{d\vec{e}_1(s)}{ds} &= \frac{d\theta}{ds} \vec{e}_2 + \cos \theta \frac{d\vec{\alpha}_1}{ds} + \sin \theta \frac{d\vec{\alpha}_2}{ds} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \frac{d^2 \vec{r}(s)}{ds^2} \cdot \vec{e}_2 = \frac{d\theta}{ds} + \cos \theta \frac{d\vec{\alpha}_1}{ds} \cdot \vec{e}_2 + \sin \theta \frac{d\vec{\alpha}_2}{ds} \cdot \vec{e}_2 \\ &= \frac{d\theta}{ds} + \cos^2 \theta \frac{d\vec{\alpha}_1}{ds} \cdot \vec{\alpha}_2 - \sin^2 \theta \frac{d\vec{\alpha}_2}{ds} \cdot \vec{\alpha}_1 \\ &= \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\vec{\alpha}_1}{ds} \cdot \vec{\alpha}_2 \end{aligned}$$

至此才把  $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$  的具体表达式代入:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\alpha}_1}{ds} &= \frac{d(\frac{1}{\sqrt{E}} \vec{r}_u)}{ds} = \frac{d\frac{1}{\sqrt{E}}}{ds} \vec{r}_u + \frac{1}{\sqrt{E}} \left( \frac{du}{ds} \vec{r}_{uu} + \frac{dv}{ds} \vec{r}_{uv} \right) \\ \frac{d\vec{\alpha}_1}{ds} \cdot \vec{\alpha}_2 &= \frac{1}{\sqrt{EG}} \left( \frac{du}{ds} \vec{r}_{uu} \cdot \vec{r}_v + \frac{dv}{ds} \vec{r}_{uv} \cdot \vec{r}_v \right) \end{aligned}$$

如果直接代入曲面运动公式, 因为需要计算出 Christoffel 符号, 不难预期计算过程较为复杂。注意到此时  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  虽然并不是单位正交标架, 但仍是正交标架。从而<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\vec{r}_{uu} \cdot \vec{r}_v &= \frac{\partial}{\partial u}(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) - \vec{r}_u \cdot \vec{r}_{vu} = -\vec{r}_u \cdot \vec{r}_{uv} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v}(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u) = -\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}\end{aligned}$$

$$\vec{r}_{uv} \cdot \vec{r}_v = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u}(\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v) = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}$$

代入可得:

$$\kappa_g = \frac{d\theta(s)}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( E_v \frac{du}{ds} - G_u \frac{dv}{ds} \right)$$

注意到

$$\vec{e}_1 = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds} = \sqrt{E} \frac{du}{ds} \vec{\alpha}_1 + \sqrt{G} \frac{dv}{ds} \vec{\alpha}_2$$

比较可得  $\cos \theta = \sqrt{E} \frac{du}{ds}, \sin \theta = \sqrt{G} \frac{dv}{ds}$ 。最终有

$$\kappa_g = \frac{d\theta(s)}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \log E}{\partial v} \cos \theta + \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \log G}{\partial u} \sin \theta$$

不难看出, 能得到简化的结果的根本原因在于:

- 已经选用了正交参数系;
- 用单位正交基  $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$  代替单位正交基  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  来计算, 两组基相差一个转角  $\theta$ , 结果中自然会涉及到  $\theta$ ;
- $\vec{e}_2$  可以通过  $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$  表示, 不涉及到  $\vec{n} \times \vec{e}_1$ , 完全内蕴的计算。

实际上, 正如我们在这一小节中定理证明的开始提到的, 也可以直接将测地曲率的表达式

$$\kappa_g = \sqrt{g} \left| \begin{array}{cc} \frac{du^1(s)}{ds} & \frac{d^2u^1(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} \\ \frac{du^2(s)}{ds} & \frac{d^2u^2(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^2 \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} \end{array} \right|$$

改写为 Liouville 公式, 只是计算比较繁琐, 感兴趣的同学可以参考附录 J。

<sup>1</sup>当然, 也可以直接回忆正交参数系下 Christoffel 记号  $\Gamma_{211}$  和  $\Gamma_{212}$  的表达式。

对于一般曲面上的一般的曲线, 用 Liouville 公式

$$\kappa_g = \frac{d\theta(s)}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \log E}{\partial v} \cos \theta + \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \log G}{\partial u} \sin \theta$$

来计算测地曲率, 因为切向辐角  $\theta$  难于确定, 仍然是比较复杂的。但是有两类特殊的曲线,

- $u$ - 曲线,  $\theta \equiv 0$ ,  $\kappa_{g1} = -\frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \log E}{\partial v}$ ;
- $v$ - 曲线,  $\theta \equiv \frac{\pi}{2}$ ,  $\kappa_{g2} = \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \log G}{\partial u}$ 。

进而有

$$\kappa_g = \frac{d\theta}{ds} + \kappa_{g1} \cos \theta + \kappa_{g2} \sin \theta \quad (8.13)$$

我们将 (8.13) 式和平面曲线中的表达式  $\kappa_r(s) = \frac{d\theta(s)}{ds}$  比较:

- 一方面, 在平面的直角坐标系下, 自然有  $\kappa_{g1} = \kappa_{g2} = 0$ , 即平面曲线的相对曲率是测地曲率的特例;
- 反之, 若有  $\kappa_{g1} = \kappa_{g2} = 0$ , 则必有  $E$  只与  $u$  相关,  $G$  只与  $v$  相关, 也就是曲面的第一基本形式可以写成:

$$I = E(u)(du)^2 + G(v)(dv)^2$$

令  $d\tilde{u} = \sqrt{E(u)}du, d\tilde{v} = \sqrt{G(v)}dv$ , 则第一基本形式变为标准的

$$I = (d\tilde{u})^2 + (d\tilde{v})^2$$

故这样的曲面一定可以和平面建立保长映射。

最后, 大家要注意将 (8.13) 式和曲面法曲率和主曲率之间的 Euler 公式(3.12)区别开来。

### \*8.6.2 曲线测地曲率和曲面 Gauss 曲率的潜在关联

注意到测地曲率表达式

$$\kappa_g = \frac{d\theta(s)}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( E_v \frac{du}{ds} - G_u \frac{dv}{ds} \right)$$

中所有项都包含对  $s$  的导数, 可以改写为

$$\kappa_g = \frac{d\theta(s) - \frac{1}{2\sqrt{EG}}(E_v du - G_u dv)}{ds}$$

可构造一个只和曲面有关的微分形式

$$\omega = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}(E_v du - G_u dv) = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} du + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} dv$$

使得

$$\kappa_g = \frac{d\theta(s)}{ds} + \frac{\omega}{ds}$$

特别的, 在曲线和  $r_u$  夹角不变的情况下, 有

$$\kappa_g = \frac{\omega}{ds}$$

比如,  $u$ -曲线和  $v$ -曲线均属于上述特殊的情形:

$$\kappa_{g1} = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}} = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}, \quad \kappa_{g2} = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}} = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}}$$

而此时, 我们可以隐约感觉到  $\kappa_{g1}$  和  $\kappa_{g2}$  的表达式, 和 Gauss 曲率

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left( \left( \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left( \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u \right)$$

的表达式有一定的相似之处, 区别在于一个只有一阶导数, 而另外一个包含了二阶导数。如果大家了解外微分运算话很容易将  $\omega$  和 Gauss 曲率  $K$  联系起来<sup>1</sup>:

$$d\omega = K\sqrt{EG}du \wedge dv$$

可见, 曲线的测地曲率, 特别是测地曲率表达式中的微分形式  $\omega$ , 和曲面的 Gauss 曲率有着密切的关系。这种关系, 在后来我们处理 Gauss-Bonnet 公式时, 会发挥巨大的作用。

### 8.6.3 切向辐角下测地线的方程

已经知道在曲面  $S$  上取正交参数系  $(u, v)$ , 曲线  $C$  与  $u$ -曲线的夹角是  $\theta$ , 则曲线测地曲率为

$$\kappa_g = \frac{d\theta(s)}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \log E}{\partial v} \cos \theta + \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \log G}{\partial u} \sin \theta$$

<sup>1</sup>实际上, 这里的  $\omega$  就是活动标架法中的联络系数 1 形式, 感兴趣的同学可以参考<sup>[18]</sup>的 5.2 节。

故此时测地线满足

$$\frac{d\theta(s)}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \log E}{\partial v} \cos \theta - \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \log G}{\partial u} \sin \theta$$

表面上看是  $\theta$  关于  $s$  的常微分方程, 但等式右端含包含了  $E, G$  对  $v, u$  的导数, 且  $u, v$  和  $s$  的关系也未知, 实际上还需要包含  $u, v$  和  $s$  的额外方程。因为  $\cos \theta = \sqrt{E} \frac{du(s)}{ds}$ ,  $\sin \theta = \sqrt{G} \frac{dv(s)}{ds}$ , 有

$$\begin{cases} \frac{du(s)}{ds} = \frac{1}{\sqrt{E}} \cos \theta \\ \frac{dv(s)}{ds} = \frac{1}{\sqrt{G}} \sin \theta \\ \frac{d\theta(s)}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \log E}{\partial v} \cos \theta - \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \log G}{\partial u} \sin \theta \end{cases}$$

切向辐角表达的测地线方程, 虽然比原始的测地线方程(8.8)简化了一些, 仍然是比较难解的。不过在一些特殊的情形下可以较为方便地解出。

例 8.14. 求旋转面  $S: \vec{r} = (u \cos v, u \sin v, f(u))$  上的测地线。

我们之前已经初步研究过旋转面上的测地线, 知道经线是测地线, 但这只是固定切方向出发的测地线, 现在我们需要知道所有其他方向的测地线的形式。

解. 因为测地线是曲面的内蕴几何, 故只需要计算曲面的第一基本形式

$$I = (1 + (f'(u))^2)(du)^2 + u^2(dv)^2$$

注意到旋转面的第一基本形式已经是正交的, 回忆在正交参数系下, 利用测地线和  $u$ -曲线的夹角, 测地线方程可以简化为

$$\begin{cases} \frac{du(s)}{ds} = \frac{1}{\sqrt{E}} \cos \theta \\ \frac{dv(s)}{ds} = \frac{1}{\sqrt{G}} \sin \theta \\ \frac{d\theta(s)}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \log E}{\partial v} \cos \theta - \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \log G}{\partial u} \sin \theta \end{cases}$$

具体代入, 有

$$\begin{cases} \frac{du(s)}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+(f'(u))^2}} \cos \theta \\ \frac{dv(s)}{ds} = \frac{1}{u} \sin \theta \\ \frac{d\theta(s)}{ds} = -\frac{1}{u\sqrt{1+(f'(u))^2}} \sin \theta \end{cases}$$

这是一个非线性的常微分方程组。**最关键, 也是最难的一步, 如何来求解这一方程?** 注意观察, 除了  $(u, v)$ , 实际上  $\theta$  也是  $s$  的函数。换言之, 一条曲面上的曲线, 理论上只要包含一个参数两个函数即可, 故我们需要对上述方程消参。

注意到整个方程的右端, 都没有显式地出现  $s$ 。自然考虑消去参数  $s$ 。此时, 对应式子相除, 相当于在  $u, v, \theta$  中选定一个作为曲线的参数, 有三种不同的组合。我们最终希望可以把测地线表示为  $u, v$  之间的关系, 同时希望得到的方程尽量简单, 故只有一种组合符合要求

$$\begin{cases} \frac{dv}{du} = \frac{\sqrt{1 + (f'(u))^2}}{u} \tan \theta \\ \frac{d\theta}{du} = -\frac{1}{u} \tan \theta \end{cases}$$

先来求解较为简单的第二个方程。分离变量, 有

$$\operatorname{ctg} \theta d\theta = -\frac{du}{u}$$

可改写为

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta = -\frac{du}{u}$$

即

$$\frac{1}{\sin \theta} d \sin \theta = -\frac{du}{u}$$

可解得  $u \sin \theta = c$ , 其中  $c$  为常数。

再转到第一个方程

$$\frac{dv}{du} = \frac{\sqrt{1 + (f'(u))^2}}{u} \tan \theta$$

由  $u \sin \theta = c$ , 可得  $\sin \theta = \frac{c}{u}$ , 进而解出

$$\tan \theta = \pm \frac{c}{\sqrt{u^2 - c^2}}$$

代入, 得到

$$\frac{dv}{du} = \pm \frac{c\sqrt{1 + (f'(u))^2}}{u\sqrt{u^2 - c^2}}$$

最终

$$v(u) = v_0 \pm \int_{u_0}^u \frac{c\sqrt{1 + (f'(t))^2}}{t\sqrt{t^2 - c^2}} dt$$

其中  $|c| \leq u_0$ 。当  $c$  取不同值时, 表示过  $(u_0, v_0)$  点的各个方向的测地线。特别的,

- 当  $u_0 = |c|$  时, 积分式为一个收敛的广义积分, 这样的测地线初始斜率无穷大, 表示初始切向量为纬线方向的测地线 (测地线本身不是纬线, 只是和纬线相切); 回到方程  $u_0 \sin \theta_0 = c$  可以看得更清晰: 此时  $\sin \theta_0 = \pm 1$ ,  $\theta_0 = \pm \frac{\pi}{2}$ 。
- 我们之前有说明, 旋转面的经线, 也就是  $u$ - 曲线为测地线。在上述积分式中取  $c = 0$  就对应这一特殊情况。需要注意的是在分离变量求解常微分方程  $\frac{d\theta}{du} = -\frac{1}{u} \tan \theta$  时, 默认  $\tan \theta$  不能恒为零; 我们在解  $u \sin \theta = c$  中添加这一退化情形, 即  $u$ - 曲线, 对应  $c$  和  $\sin \theta$  恒为零。

□

现在我们来考察旋转面当中的一种特殊情况:  $f'(u) = 0$ 。此时

$$I = (du)^2 + u^2(dv)^2$$

也就是平面上的极坐标。此时积分

$$v(u) = v_0 + \int_{u_0}^u \frac{c}{t\sqrt{t^2 - c^2}} dt = v_0 + \arcsin \frac{c}{u}$$

于是

$$u \sin(v - v_0) = c$$

即

$$u \sin v \cos v_0 - u \cos v \sin v_0 = c$$

极坐标系下的直线方程。

实际上在这种特殊情形下, 完全没有必要计算复杂的积分, 回到初始的方程组中以求快捷地出解的形式:

$$\begin{cases} \frac{du(s)}{ds} = \cos \theta \\ \frac{dv(s)}{ds} = \frac{1}{u} \sin \theta \\ \frac{d\theta(s)}{ds} = -\frac{1}{u} \sin \theta \end{cases}$$

第二和第三个方程消参, 得到

$$\frac{d\theta}{dv} = -1$$

即  $v + \theta = c_0$ , 或  $\theta = c_0 - v$ 。于是

$$\frac{du}{dv} = u \cot(c_0 - v)$$

直接求解

$$\frac{du}{u} = \cot(c_0 - v)dv$$

得到

$$u \cos(c_0 - v) = C$$

对比之前的例题8.5, 与直接用测地线方程求解相比, 利用 Liouville 公式要简单得多! 根本原因是切向辐角(方向角)的方程组是一阶的, 相当于对初始二阶测地线方程组已经进行了降阶。

最后, 我们想说的是, 切向辐角下的测地线方程, 可以很容易地推广, 用来研究曲面上测地曲率不为零的曲线。同样假定是正交参数系, 若曲面上曲线的测地曲率为  $\kappa_g$ , 则根据 Liouville 公式(8.12), 此时的曲线满足如下方程

$$\begin{cases} \frac{du(s)}{ds} = \frac{1}{\sqrt{E}} \cos \theta \\ \frac{dv(s)}{ds} = \frac{1}{\sqrt{G}} \sin \theta \\ \frac{d\theta(s)}{ds} = \kappa_g + \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \log E}{\partial v} \cos \theta - \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \log G}{\partial u} \sin \theta \end{cases}$$

换言之, 给定初值的前提下, 表面上的曲线被弧长和测地曲率决定。大家务必将这一方程组和平面曲线在夹角  $\theta$  下的运动方程(2.10)做比较。

#### 8.6.4 协变导数的 Liouville 公式

在之前的两个小节中我们已经知道切向辐角下的测地曲率和测地线方程都有很大程度的简化, 而测地线是特殊的具有平行切向量场的曲线。自然希望使用切向辐角  $\theta$ , 可以简化平行向量场的方程, 乃至协变导数的表达式。

和推导 Liouville 公式时的设定一致: 取正交参数系,  $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2$  是  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  的单位化。注意到

1. 如果切向量场  $X$  是平行向量场,  $|X|$  为常数。

$$2. \frac{D(fX)}{dt} = \frac{df}{dt}X + f \frac{DX}{dt}$$

我们最终要研究的情形就是平行向量场, 同时, 任何一个向量场都可以改写为  $X = |X|X^0$ ,  $X^0$  是  $X$  的单位化, 也就是普通向量场的协变导数都可以用单位向量场的协变导数表示。

所以我们干脆局限于讨论  $X$  是一个单位长度切向量场的特殊情形。假定  $X$  和  $\vec{\alpha}_1$  的夹角为  $\theta$ , 则有

$$X = \cos \theta \vec{\alpha}_1 + \sin \theta \vec{\alpha}_2$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \frac{d}{dt} (\cos \theta \vec{\alpha}_1 + \sin \theta \vec{\alpha}_2) \\ &= \frac{d\theta}{dt} (-\sin \theta \vec{\alpha}_1 + \cos \theta \vec{\alpha}_2) + \cos \theta \frac{d\vec{\alpha}_1}{dt} + \sin \theta \frac{d\vec{\alpha}_2}{dt} \end{aligned}$$

再注意到

1.  $X$  是个单位向量场,  $\frac{dX}{dt}$  与  $X$  垂直。

$$2. \frac{DX}{dt} = \frac{dX}{dt} - \left(\frac{dX}{dt} \cdot \vec{n}\right) \vec{n}$$

所以,  $\frac{DX}{dt}$  只在切平面中, 与  $X$  垂直的方向上有分量。在切平面中, 将  $X$  右旋  $90^\circ$  得到  $X^\perp$ , 即

$$X^\perp = -\sin \theta \vec{\alpha}_1 + \cos \theta \vec{\alpha}_2$$

于是

$$\frac{DX}{dt} = \left(\frac{DX}{dt} \cdot X^\perp\right) X^\perp = \left(\frac{dX}{dt} \cdot X^\perp\right) X^\perp$$

要想确定向量场  $X$  的协变导数, 我们只需要来计算

$$\frac{dX}{dt} \cdot X^\perp = \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{\alpha}_1}{dt} \cdot \vec{\alpha}_2 = \frac{d\theta(t)}{dt} - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( E_v \frac{du}{dt} - G_u \frac{dv}{dt} \right)$$

特别的, 当  $t$  取弧长参数  $s$  时, 有

$$\frac{dX}{ds} \cdot X^\perp = \frac{d\theta(s)}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( E_v \frac{du}{ds} - G_u \frac{dv}{ds} \right)$$

最终得到切向辐角下协变导数的表达式。

曲线测地曲率的 Liouville 公式实际上是上式的一个特殊情况, 取向量场为曲线的单位切向量场, 即  $X = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{e}_1$ ,  $X^\perp = \vec{e}_2$ 。由测地曲率的定义有

$$\kappa_g = \frac{d\vec{e}_1(s)}{ds} \cdot \vec{e}_2 = \frac{d\theta(s)}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( E_v \frac{du}{ds} - G_u \frac{dv}{ds} \right)$$

这里  $\theta(s)$  是曲线和  $\vec{r}_u$  之间的夹角。

与曲线测地曲率的 Liouville 公式对比之后, 我们可以类似地定义  $\kappa_g(X) = \frac{dX}{ds} \cdot X^\perp$  为向量场  $X$  沿曲线的测地曲率。 $\kappa_g(X) = 0$  的向量场就是平行向量场。于是

$$\frac{d\theta(s)}{ds} = \kappa_g(X) + \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( E_v \frac{du}{ds} - G_u \frac{dv}{ds} \right)$$

这一公式可以理解为:

- $\theta$  的变化, 也就是切向量转动, 驱动力由两方面提供: 一方面是源自切向量场的测地曲率  $\kappa_g(X)$ , 另一方面是源自与切向量场自身无关, 曲面上曲线的  $\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( E_v \frac{du}{ds} - G_u \frac{dv}{ds} \right)$ 。

- 作为一种特殊情况, 沿着曲线  $C$  的单位向量场  $X$  是平行向量场的充要条件为

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( E_v \frac{du}{dt} - G_u \frac{dv}{dt} \right)$$

可以理解为向量场的转动完全被曲线决定, 切向量场没有“内在”的转动, 是“平行”的。

最后, 我们为了避免与曲线的测地曲率混淆, 一般还是直接使用  $\frac{dX}{ds} \cdot X^\perp$ , 来代表曲线上向量场的测地曲率  $\kappa_g(X)$ 。

### 8.6.5 向量场测地曲率的进一步理解

简便起见, 曲线取弧长参数  $s$ 。之前已经证明了, 对于和  $\vec{r}_u$  夹角为  $\theta$  的单位向量场  $X$ , 有

$$\frac{dX}{ds} \cdot X^\perp = \frac{d\theta(s)}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( E_v \frac{du}{ds} - G_u \frac{dv}{ds} \right)$$

注意到

$$-\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( E_v \frac{du}{ds} - G_u \frac{dv}{ds} \right)$$

只和曲线有关, 若有另外一个单位向量场  $Y$  和  $\vec{r}_u$  夹角为  $\phi$ ,

$$\frac{dY}{ds} \cdot Y^\perp = \frac{d\phi(s)}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( E_v \frac{du}{ds} - G_u \frac{dv}{ds} \right)$$

记  $\psi = \theta - \phi$ , 则有

$$\frac{dX}{ds} \cdot X^\perp - \frac{dY}{ds} \cdot Y^\perp = \frac{d\psi(s)}{ds} \quad (8.14)$$

我们来看上述式子的特殊情况。取  $X$  为曲线自身的切向量  $\frac{d\vec{r}}{ds}$ ，取  $Y$  为某一单位平行向量场。即

$$\frac{dX}{ds} \cdot X^\perp = \kappa_g, \quad \frac{dY}{ds} \cdot Y^\perp = 0$$

此时(8.14)式变为

$$\kappa_g = \frac{d\psi(s)}{ds}$$

即一条曲线的测地曲率，等于这条曲线的切向量和一个平行向量场的夹角关于弧长参数的变化率。大家不难发现，这几乎复刻了平面曲线  $\kappa_r = \frac{d\theta}{ds}$  的结果。

## 8.7 测地坐标系和常曲率曲面

通过之前的学习，我们看到曲面上的测地线相当于平面上的直线。在平面上，我们当然使用由正交直线构成的直角坐标系。在曲面上，我们也自然希望能有由测地线构成的参数系。

**曲面上能否有两族相互正交的测地线呢？**不妨设为  $u$ -曲线和  $v$ -曲线是相互正交的测地线。我们在8.6.1小节中计算了正交参数系下的坐标曲线的测地曲率：

- $u$ -曲线,  $\theta \equiv 0$ ,  $\kappa_{g1} = -\frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \log E}{\partial v}$ ;
- $v$ -曲线,  $\theta \equiv \frac{\pi}{2}$ ,  $\kappa_{g2} = \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \log G}{\partial u}$ 。

倘若  $u$ -曲线和  $v$ -曲线均为测地线，则有  $\frac{\partial E}{\partial v} \equiv \frac{\partial G}{\partial u} \equiv 0$ 。已经说明这样的曲面一定可以和平面建立保长映射。换言之，只要曲面的 Gauss 曲率不是恒为零，就不可能存在相互垂直的测地参数曲线网。退而求其次，在参数曲线网中，只要求  $u$ -曲线为测地线，而  $v$ -曲线仅仅与  $u$ -曲线正交，不一定为测地线。这样的  $(u, v)$  称作**测地坐标系**。接下来，我们具体来构造两类测地坐标系。

### 8.7.1 测地平行坐标系

构造步骤如下：

1. 在曲面  $S$  上取定一条测地线  $C$ ，以参数  $v$  作为弧长参数。曲线  $C$  上有和曲面相容的单位正交标架场  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ 。

2. 考虑  $C$  上的向量场  $\vec{e}_2$ , 过曲线  $C$  上任一点, 有以单位向量  $\vec{e}_2$  为初始切向量的测地线, 设这些测地线以  $u$  为弧长参数。
3. 记这一族测地线为  $\Sigma$ ,  $\Sigma$  覆盖了曲线  $C$  的邻域  $U$  (证明较困难, 直接承认结论), 存在参数系  $(u, v)$ 。

根据构造过程, 此时每一条  $v = \text{const}$  的  $u$ -曲线都是测地线, 但是只有  $u = 0$  对应测地线  $v$ -曲线  $C$  和  $u$ -曲线正交。我们希望能够说明其他的  $v$ -曲线也和  $u$ -曲线正交。

记此时曲面的参数方程为  $\vec{r}(u, v)$ 。我们要说明  $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0$ 。考虑

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)}{\partial u} = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{r}_v + \vec{r}_u \cdot \vec{r}_{vu}$$

最直接的想法是代入运动公式计算  $\vec{r}_{uu}$  和  $\vec{r}_{vu}$ , 可想而知, 会出现 Christoffol 记号, 计算是很麻烦的。

我们希望直接利用测地线的性质来简化计算, 回忆: 测地线等价于

$$\frac{d^2 \vec{r}(s)}{ds^2} = \frac{d(\sum_{\gamma=1}^2 \vec{r}_\gamma \frac{du^\gamma(s)}{ds})}{ds} = \kappa_n \vec{n}$$

这里的参数  $u$  就是弧长参数, 从而有

$$\vec{r}_{uu} = \kappa_n \vec{n}$$

进而  $\vec{r}_{uu} \cdot \vec{r}_v = 0$ 。

如果想不到直接利用测地线的性质, 利用测地线方程计算 Christoffol 记号的值也是可行的。根据曲面上自然标架的运动公式:

$$\vec{r}_{uu} = \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{11}^\gamma \vec{r}_\gamma + b_{11} \vec{n}$$

于是

$$\vec{r}_{uu} \cdot \vec{r}_v = \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{11}^\gamma g_{\gamma 2}$$

需要根据测地线的性质计算出  $\Gamma_{11}^\gamma$ 。回忆测地线满足的方程:

$$\frac{d^2 u^\gamma}{ds^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} = 0, \quad \gamma = 1, 2$$

此时,  $s = u$ ,  $v = v_0$ , 于是对  $\gamma = 1, 2$  都有  $\Gamma_{11}^\gamma = 0$ 。同样可以说明  $\vec{r}_{uu} \cdot \vec{r}_v = 0$ 。

再根据  $u$ -曲线都是测地线,  $|\vec{r}_u|$  恒为常数 1, 从而

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_{vu} = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_{uv} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u)}{\partial v} = 0$$

综合可得  $\frac{\partial F}{\partial u} = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{r}_v + \vec{r}_u \cdot \vec{r}_{vu} = 0$ 。但是根据构造过程, 在  $u = 0$  时,  $F(0, v) = 0$ , 对任意的  $v$  都成立。从而有  $F(u, v) \equiv 0$ 。

此时, 曲面的第一基本形式为

$$I = (du)^2 + G(u, v)(dv)^2$$

且在  $u = 0$  时, 参数  $v$  是曲线  $C$  的弧长参数。因此

$$G(0, v) = 1$$

又曲线  $C: u = 0$  本身是测地线, 它的测地曲率

$$\kappa_{g2}|_{u=0} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log G}{\partial u} \Big|_{u=0} = 0$$

从而

$$G_u(0, v) = 0$$

于是有: 我们构造出的参数系  $(u, v)$ , 使得曲面的第一基本形式为

$$I = (du)^2 + G(u, v)(dv)^2$$

其中, 函数  $G(u, v)$  满足条件

$$G(0, v) = 1, G_u(0, v) = 0$$

这样的参数系  $(u, v)$  称为**测地平行坐标系**。

反过来, 如果有一个参数系  $(u, v)$ , 它对应的第一基本形式满足上面的条件, 那么这时  $(u, v)$  是正交参数系, 且  $u = 0$  的  $v$ -曲线, 以及所有的  $u$ -曲线都是测地线。

**命题 8.15.** 在曲面  $S$  的每一点附近的小邻域内必定存在测地平行坐标系  $(u, v)$ , 使得曲面的第一基本形式为

$$I = (du)^2 + G(u, v)(dv)^2$$

其中, 函数  $G(u, v)$  满足条件

$$G(0, v) = 1, G_u(0, v) = 0$$

不难发现，测地平行坐标系有如下性质：

- 第一基本形式的样式保证了所有的  $u$ -曲线均为测地线；
- 只有  $u = 0$  的  $v$ -曲线  $C$  是测地线，其他  $v$ -曲线并非测地线；
- 平面上的测地平行坐标系就是通常的直角坐标系。

测地平行坐标系是一种特殊的测地坐标系，我们接着研究其他特殊形式的测地坐标系。

### 8.7.2 测地极坐标系

现在我们从曲面上一点  $p$  出发，来构造测地线族  $\Sigma$ ，以及和  $\Sigma$  正交的另一族轨线。考虑  $T_{*p}S$  上的单位切向量  $\vec{v}$ ，以  $\vec{v}$  为初值，可以构造弧长参数为  $s$  的测地射线  $\gamma_{\vec{v}}(s)$ 。由于全体单位切向量的终点恰好构成一个单位圆周，故可以选取一个基准单位向量  $\vec{e}_1$ ，以及和它垂直的构成右手正交标架的  $\vec{e}_2$ ，使得  $\vec{v} = \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2$ 。于是，我们可以将  $\gamma_{\vec{v}}(s)$  记为  $\gamma_{\theta}(s)$ 。

当  $s$  取  $[0, +\infty)$  中一部分（不一定能取到正无穷）， $\theta$  取遍  $[0, 2\pi)$  时，得到测地线族  $\Sigma$ ， $\Sigma$  覆盖了点  $p$  的邻域。此时  $(s, \theta)$  构成了曲面的曲纹坐标，我们称其为**测地极坐标系**。记对应的参数方程为  $\vec{r}(s, \theta)$ 。

关于测地极坐标系，我们需要注意的是  $(s, \theta)$  只是曲纹坐标，和点并非一一对应。可以说明

- $\vec{r}_s$  在  $p$  点处无定义，但是  $\vec{r}_{\theta}|_{s=0} = \vec{0}$ ；
- 除去  $\theta = 0$  的这条测地线，曲面的参数方程  $\vec{r}(s, \theta)$  是正则的。

我们现在要来说明  $(s, \theta)$  也是正交参数系。即要说明  $F(s, \theta) = \vec{r}_s \cdot \vec{r}_{\theta} = 0$ 。证明方法和测地平行坐标系中的证明类似。

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial(\vec{r}_s \cdot \vec{r}_{\theta})}{\partial s} = \vec{r}_{ss} \cdot \vec{r}_{\theta} + \vec{r}_s \cdot \vec{r}_{\theta s} = \vec{r}_s \cdot \vec{r}_{s\theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\vec{r}_s \cdot \vec{r}_s)}{\partial \theta} = 0$$

也就是  $F(s, \theta)$  关于  $s$  是常数。区别在于此时  $F(0, \theta)$  并没有定义。但是

$$F(s, \theta) = (\vec{r}_s \cdot \vec{r}_\theta) = |\vec{r}_s| |\vec{r}_\theta| \cos \angle(\vec{r}_s, \vec{r}_\theta)$$

注意到  $\lim_{s \rightarrow 0} |\vec{r}_s| = 1$ ,  $\lim_{s \rightarrow 0} \vec{r}_\theta = \vec{r}_\theta(0, \theta) = \vec{0}$ , 有

$$\lim_{s \rightarrow 0} F(s, \theta) = 0$$

从而  $F(s, \theta) \equiv 0$ 。

此时曲面的第一基本形式可以写为：

$$I = ds^2 + G(s, \theta)d\theta^2$$

而且, 根据之前的讨论, 有

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s, \theta) = \lim_{s \rightarrow 0} (\vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\theta) = 0$$

实际上, 我们还可以得到  $G(s, \theta)$  更精细的性质。注意到在欧氏平面的极坐标系中,  $|\vec{r}_\theta(s, \theta)| = s$ , 测地极坐标系中也有类似关系成立, 即  $\lim_{s \rightarrow 0} (\sqrt{G(s, \theta)})_s = 1$ , 但严格证明这一关系需要引入指数映射以及法坐标系的概念, 复杂程度超出本讲义的范畴, 感兴趣的同学可以参考<sup>[19]</sup>。

总而言之

**命题 8.16.** 在曲面  $S$  的每一点附近的小邻域内必定存在测地极坐标系  $(s, \theta)$ , 使得曲面的第一基本形式为

$$I = (ds)^2 + G(s, \theta)(d\theta)^2$$

其中, 函数  $G(s, \theta)$  满足条件

$$\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{G(s, \theta)} = 0, \lim_{s \rightarrow 0} (\sqrt{G(s, \theta)})_s = 1$$

反过来, 如果有参数系  $(s, \theta)$  使得它对应的第一基本形式满足命题中的条件, 这样的参数系也一定是由一点出发的测地线族构成的。

测地极坐标系可以看作是平面上极坐标系的推广, 在很多微分几何问题的研究中, 比测地平行坐标系更有用。

下一小节中, 我们可以看到测地坐标系在研究常曲率曲面中的应用。

### 8.7.3 常曲率曲面

先回顾一下定义，Gauss 曲率为常数的曲面称为**常曲率曲面**。我们之前就有接触过常曲率曲面：

- 第四章中计算了常曲率旋转曲面的参数方程；
- 第五章中证明了无脐点的 Gauss 曲率为零的曲面一定是可展曲面，进而一定可以与平面建立保长对应。

现在我们利用更高级的工具，也就是测地坐标系，来更高效地研究常曲率曲面，特别是其内蕴几何。在曲面上取测地平行坐标系  $(u, v)$ ，于是第一基本形式为

$$I = (du)^2 + G(u, v)(dv)^2$$

其中，函数  $G(u, v)$  满足条件

$$G(0, v) = 1, G_u(0, v) = 0$$

根据 Gauss 曲率的内蕴表达式

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left( \left( \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left( \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u \right) = -\frac{1}{\sqrt{G}} (\sqrt{G})_{uu}$$

现在假定曲面  $S$  的 Gauss 曲率  $K$  是常数，上式可改写为：

$$(\sqrt{G})_{uu} + K\sqrt{G} = 0$$

也就是  $\sqrt{G}$  作为  $u$  的函数满足上述二阶常系数齐次线性方程。特别需要注意，由于实际上  $G$  不仅仅是  $u$  的函数，还和  $v$  有关。严格地讲，对于每一个给定的  $v_0$ ，有关于  $u$  的二阶常系数齐次线性方程：

$$(\sqrt{G(u, v_0)})_{uu} + K\sqrt{G(u, v_0)} = 0 \quad (8.15)$$

显然，这些方程对任意的  $v_0$  都是可解的。具体来看，其特征方程为

$$\lambda^2 + K = 0$$

根据  $K$  的不同符号, 方程 (8.15) 的通解为

$$\begin{aligned} K > 0, \sqrt{G} &= a(v_0) \cos(\sqrt{K}u) + b(v_0) \sin(\sqrt{K}u), \\ K = 0, \sqrt{G} &= a(v_0) + b(v_0)u, \\ K < 0, \sqrt{G} &= a(v_0) \cosh(\sqrt{-K}u) + b(v_0) \sinh(\sqrt{-K}u), \end{aligned}$$

且在  $u = 0$  时满足初始条件:

$$G(0, v_0) = 1, G_u(0, v_0) = 0$$

将通解代入初始条件, 可以确定系数。方程的解为

$$\begin{aligned} K > 0, \sqrt{G} &= \cos(\sqrt{K}u), \\ K = 0, \sqrt{G} &= 1, \\ K < 0, \sqrt{G} &= \cosh(\sqrt{-K}u). \end{aligned}$$

因此, 常曲率曲面在测地平行坐标系下的第一基本形式为

$$\begin{aligned} K > 0, I &= (du)^2 + \cos^2(\sqrt{K}u)(dv)^2, \\ K = 0, I &= (du)^2 + (dv)^2, \\ K < 0, I &= (du)^2 + \cosh^2(\sqrt{-K}u)(dv)^2. \end{aligned}$$

**定理 8.17.** 有相同常数 Gauss 曲率的任意两块曲面在局部上必定可以建立保长对应。

- 这一定理限定在“局部”才能建立保长对应, 直接原因是测地平行坐标系的存在是局部的, 但深层次的根本原因是在于曲面拓扑的影响。
- 大大推广了第六章中关于零曲率曲面的推论 7.9, 完全不需要有非脐点的限制, 就可以和平面建立保长对应。原因也很简单, 内蕴的问题, 用内蕴的工具——测地线, 来解决是最自然不过的。如果使用外在的工具, 如正交曲率线网, 极有可能引入额外不必要的限制。
- 用测地极坐标系也可以证明。

利用测地坐标系, 还可以研究常曲率曲面更细致的几何性质<sup>1</sup>, 比如测地圆周的周长等, 感兴趣的同学可以参考<sup>[19]</sup>。

<sup>1</sup>测地坐标系可以用来研究一般黎曼流形的性质, 常曲率曲面只是最简单的原型。

## 本章注记

测地线这一章内容，是整个课程中最重要的内容。其重要性主要体现在以下两个方面：

- 测地线，以及由测地线构成的测地坐标系，是研究内蕴几何的最重要的工具；
- 测地线是特殊的曲面上的曲线，这一章内容融合了之前关于曲线和曲面的全部知识，掌握了测地线，就可以更全面，更深刻地理解曲线论和曲面论；
- 在研究测地线的时候，我们引入了协变导数这一概念，协变导数还有一个更响亮的名字：联络<sup>a</sup>。协变导数在后续微分几何中出现的频率，甚至要高于测地线本身。

---

<sup>a</sup>参见 [19]。

测地线这一部分内容难度较高。学起来吃力的同学可以先复习一下平面曲线的内容，曲面上的曲线的很多知识点和平面曲线的知识点是相互对应的，可以视为平面曲线的推广。

考虑到适当的降低难度，我们这里没有从长度泛函的变分，Jacobi 场的角度来讨论测地线的极短性。虽然大部分本科教材 [18] [10] 对这一部分内容都有介绍，但是往往限于篇幅，不够全面；建议感兴趣的同学直接参考研究生教材 [19]。

最后再简单提一下协变导数，在更一般的黎曼流形上，我们更习惯于使用联络这一称谓。在后续黎曼几何的很多地方，都会遇到联络，而且会重现我们构造协变导数的过程，比如：

- 黎曼联络完全由流形上的度量决定，是内蕴的；
- 外围流形的联络可以诱导出子流形上的联络，即将外围联络垂直投影到子流形的切空间上。

如果同学们现阶段能够很好地理解协变导数的话，那么之后学习黎曼几何遇到联络这一概念时必然驾轻就熟。



## Chapter 9

# 高阶工具：解析函数和 Laplace 算子

### 9.1 保角映射

#### 9.1.1 保角映射的定义与判定

已经知道，两张曲面之间不一定能建立保长对应；建立保长对应的充分必要条件是相同的第二基本形式。放在平面这一特殊的曲面上，保长对应相当于是三角形的全等。我们同时也知道保长度自然也会保角度，能否放松要求，就像只要求三角形相似（保角），而不要求全等（保长）？于是引入

**定义 9.1.** 设  $\sigma: S_1 \rightarrow S_2$  是正则参数曲面间的一一对应，并且它和它的逆映射都是 3 次以上的连续可微映射。如果在每一点  $p \in S_1$ ，切映射  $\sigma_{*p}: T_p S_1 \rightarrow T_{\sigma(p)} S_2$  都保持切向量的夹角不变，即对于任意的  $X, Y \in T_p S_1$  都有

$$\angle(\sigma_{*p}(X), \sigma_{*p}(Y)) = \angle(X, Y)$$

则我们称  $\sigma$  为曲面  $S_1$  和  $S_2$  之间的保角对应。

我们希望判定具体给定的一个曲面间的映射  $\sigma$  是否是保角对应，但按定义每点都计算角度是件非常麻烦的事情。于是引入

**定理 9.2.** 假定正则参数曲面  $S_1$  和  $S_2$  的第一基本形式分别是  $I_1$  和  $I_2$ ，则  $\sigma: S_1 \rightarrow S_2$  是

保角对应的充分必要条件是：曲面  $S_1$  上存在正的连续函数  $\lambda$ ，使得

$$\lambda^2(u_1, v_1) \begin{pmatrix} E_1(u_1, v_1) & F_1(u_1, v_1) \\ F_1(u_1, v_1) & G_1(u_1, v_1) \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} E_2(u_2, v_2) & F_2(u_2, v_2) \\ F_2(u_2, v_2) & G_2(u_2, v_2) \end{pmatrix} J^T$$

其中

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial v_1} & \frac{\partial v_2}{\partial v_1} \end{pmatrix}$$

进一步，还有更强的形式

**定理 9.3.** 正则参数曲面  $S_1$  和  $S_2$  的第一基本形式分别为  $I_1$  和  $I_2$ ，则  $\sigma: S_1 \rightarrow S_2$  是保角对应的充分必要条件是：取曲面  $S_1$  和  $S_2$  上关于映射  $\sigma$  的适用参数系，均记为  $(u, v)$ ，使得这样的参数系下这两个曲面的第一类基本量成比例。即曲面  $S_1$  上存在正的连续函数  $\lambda$ ，使得

$$E_2(u, v) = \lambda^2(u, v)E_1(u, v)$$

$$F_2(u, v) = \lambda^2(u, v)F_1(u, v)$$

$$G_2(u, v) = \lambda^2(u, v)G_1(u, v)$$

这里我们只证明定理9.3，定理9.2和它等价是显然的。充分性的证明只要按定义验证即可，具体来看：对任意的  $X, Y \in T_p S_1$ ，有  $X = x_u \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u} + x_v \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v}$ ， $Y = y_u \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u} + y_v \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v}$ 。于是

$$\begin{aligned} \cos \angle(X, Y) &= \frac{X \cdot Y}{|X||Y|} \\ &= \frac{x_u y_u E_1 + (x_u y_v + x_v y_u) F_1 + x_v y_v G_1}{\sqrt{(x_u)^2 E_1 + 2x_u x_v F_1 + (x_v)^2 G_1} \sqrt{(y_u)^2 E_1 + 2y_u y_v F_1 + (y_v)^2 G_1}} \end{aligned}$$

要用到保角对应的条件，自然要考虑切映射。首先限制在切空间的基底上，由适用参数系的性质有：

$$\sigma_* \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u} = \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial u}, \quad \sigma_* \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v} = \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial v}$$

再根据切映射的线性， $\sigma_* \vec{X} = x_u \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial u} + x_v \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial v}$ ， $\sigma_* \vec{Y} = y_u \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial u} + y_v \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial v}$ ，故

$$\begin{aligned} \cos \angle(\sigma_* \vec{X}, \sigma_* \vec{Y}) &= \frac{\sigma_* \vec{X} \cdot \sigma_* \vec{Y}}{|\sigma_* \vec{X}| |\sigma_* \vec{Y}|} \\ &= \frac{x_u y_u E_2 + (x_u y_v + x_v y_u) F_2 + x_v y_v G_2}{\sqrt{(x_u)^2 E_2 + 2x_u x_v F_2 + (x_v)^2 G_2} \sqrt{(y_u)^2 E_2 + 2y_u y_v F_2 + (y_v)^2 G_2}} \end{aligned}$$

根据第一类基本量成比例，不难看出前后两个夹角相等。

必要性的证明相对复杂。由于  $\sigma$  是保角对应,  $\sigma$  必然非退化 (否则有非零向量映为零向量, 和保角相冲突)。可取  $S_1$  和  $S_2$  的适用坐标系, 不妨都记为  $(u, v)$ 。接下来我们来证明两组第一类基本量成比例。

设  $S_1$  和  $S_2$  的参数方程为  $\vec{r}_1(u, v)$  和  $\vec{r}_2(u, v)$ , 因为是适用参数系, 故

$$\sigma(\vec{r}_1(u, v)) = \vec{r}_2(u, v)$$

根据保角对应的条件, 有

$$\cos \angle \left( \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v} \right) = \cos \angle \left( \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial v} \right)$$

即

$$\frac{F_1}{\sqrt{E_1 G_1}} = \frac{F_2}{\sqrt{E_2 G_2}}$$

单独这一等式无法导出成比例的关系式。事实上保角对应保所有的角度, 因此我们可以选更多的角度。对任意的  $t$ , 有

$$\cos \angle \left( \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u}, t \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u} + \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v} \right) = \cos \angle \left( \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial u}, t \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial u} + \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial v} \right)$$

即

$$\frac{tE_1 + F_1}{\sqrt{E_1(t^2E_1 + 2tF_1 + G_1)}} = \frac{tE_2 + F_2}{\sqrt{E_2(t^2E_2 + 2tF_2 + G_2)}}$$

于是

$$\frac{t^2(E_1)^2 + 2tE_1F_1 + (F_1)^2}{t^2(E_1)^2 + 2tE_1F_1 + E_1G_1} = \frac{t^2(E_2)^2 + 2tE_2F_2 + (F_2)^2}{t^2(E_2)^2 + 2tE_2F_2 + E_2G_2}$$

分子减分母有

$$\frac{(F_1)^2 - E_1G_1}{t^2(E_1)^2 + 2tE_1F_1 + E_1G_1} = \frac{(F_2)^2 - E_2G_2}{t^2(E_2)^2 + 2tE_2F_2 + E_2G_2}$$

即

$$\frac{t^2(E_1)^2 + 2tE_1F_1 + E_1G_1}{g_1} = \frac{t^2(E_2)^2 + 2tE_2F_2 + E_2G_2}{g_2}$$

其中  $g_1 = E_1G_1 - (F_1)^2$ ,  $g_2 = E_2G_2 - (F_2)^2$ 。令  $f_1 = \frac{g_1}{E_1}$ ,  $f_2 = \frac{g_2}{E_2}$ , 有

$$\frac{t^2E_1 + 2tF_1 + G_1}{f_1} = \frac{t^2E_2 + 2tF_2 + G_2}{f_2}$$

由于上式对任意的  $t$  均成立, 可知

$$\frac{E_1}{f_1} = \frac{E_2}{f_2}, \quad \frac{F_1}{f_1} = \frac{F_2}{f_2}, \quad \frac{G_1}{f_1} = \frac{G_2}{f_2}$$

即

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{G_1}{G_2}$$

定理中的必要性得证。

对于给定曲面间的映射，可以通过之前的定理判定它是否为保角对应。但实际中我们遇到更多的情况是：给定了两个曲面，是否存在保角对应。为了避免参数变换时第一类基本量中出现复杂的 Jacobi 矩阵，我们往往使用第一类基本形式来替代第一类基本量，即

推论 9.4. 两个曲面能建立保角对应，充分必要条件为取到合适的坐标系，都记为  $(u, v)$ ，使得两者的第一基本形式差一个函数倍，即

$$I_2 = \lambda(u, v)I_1.$$

证明. 倘若能建立保角对应，根据之前的定理，

$$E_2(u, v) = \lambda^2(u, v)E_1(u, v)$$

$$F_2(u, v) = \lambda^2(u, v)F_1(u, v)$$

$$G_2(u, v) = \lambda^2(u, v)G_1(u, v)$$

自然有  $I_2 = \lambda(u, v)I_1$ 。

反之，如果有  $S_1$  和  $S_2$  上的公共的坐标系  $(u, v)$ ，使得  $I_2 = \lambda(u, v)I_1$ 。则我们可以构造  $S_1$  到  $S_2$  的映射  $\sigma$ ，

$$\sigma(\vec{r}_1(u, v)) = \vec{r}_2(u, v)$$

即取映射  $\sigma$  使得  $(u, v)$  为适用参数系。根据之前的定理可以验证必为保角对应。  $\square$

从以上的定理和推论来看：保长映射是特殊的保角映射；映射如果保长的话，必然也保角。

## 9.1.2 保角映射的例子与应用

例 9.5. 设  $D$  是  $\mathbb{C}$  上的区域，已知复函数  $f$  在  $D$  上解析，且  $f'(z) \neq 0$ 。若将函数  $f$  视为  $\mathbb{R}^2$  到  $\mathbb{R}^2$  的映射，则  $f$  为保角映射。

令  $w = f(z)$ , 其中  $z = u + iv$ ,  $w = \tilde{u} + i\tilde{v}$ 。此时  $(u, v)$  和  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  均可作为  $\mathbb{R}^2$  的坐标, 显然有  $E = G = 1, F = 0, \tilde{E} = \tilde{G} = 1, \tilde{F} = 0$ 。

此时  $f$  由二元函数组  $\begin{cases} \tilde{u}(u, v) \\ \tilde{v}(u, v) \end{cases}$  表示, 记它的 Jacobi 矩阵为  $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \end{pmatrix}$ , 于是

$$J \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} J^T = J J^T = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\right)^2 & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} & \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial v}\right)^2 \end{pmatrix}$$

而  $f(z)$  解析, 根据 Cauchy-Riemann 方程:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v}, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} = -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}$$

上式的右端可以写为

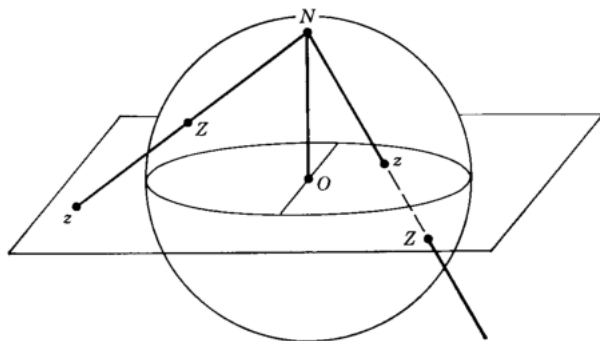
$$\left( \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial u}\right)^2 \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = |f'(z)|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

又  $|f'(z)| \neq 0$ , 根据定理9.2,  $f$  为保角映射。

上述例子其实就是我们在复变函数课程中学习过的所谓的共形映射:

**定义 9.6.** 设  $D_1, D_2$  为复平面  $\mathbb{C}$  上的两个区域, 如果解析函数  $f$  是区域  $D_1$  到  $D_2$  的双射 (一一且可逆), 且  $|f'(z)|$  在  $D_1$  上不为零, 则  $f$  构成的映射称为共形映射。

**例 9.7.** 在单位球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  上, 命  $N = (0, 0, 1)$ , 对于赤道平面上的任意一点  $p = (u, v, 0)$ , 可以作唯一一条直线过  $N, p$  两点, 它与球面有唯一的交点, 记为  $p'$ 。反之, 若有球面上  $p'$  点, 同样也可唯一确定平面上的点  $p$ 。也就是我们建立了除  $N$  点外球面和平面间的一一对应, 称为**球极投影**。



可以计算, 点  $p'$  的坐标<sup>1</sup>是:

$$x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \quad z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}$$

<sup>1</sup>这里的球极投影和复变函数中的球极投影是一致的, 记  $z = u + iv$ , 有

$$x = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{z - \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \quad z = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

也就是说，单位球面的参数方程除了

$$\vec{r}(\theta, \phi) = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta)$$

这个用经度纬度表示的形式外， $(u, v)$  也可以作为除  $N$  点外的球面的参数坐标，此时的参数方程可以写成如下形式：

$$\vec{r}(u, v) = \left( \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

不难得到参数  $(u, v)$  下单位球面的第一基本形式，

$$I = \frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2} (du^2 + dv^2)$$

此时，

- 球极投影表示为从球面的参数  $(u, v)$  映到平面的参数  $(u, v)$ ，即  $(u, v)$  是球极投影的适用参数系；
- 在适用参数系下，球面的第一类基本量与平面的第一基本量成比例。

根据定理9.3，球极投影是球面（除去北极点）到平面的保角对应。

例 9.8. 试建立球面和圆柱面之间的保角映射。

很难从几何角度构造出保角映射本身，我们尝试利用推论9.4，通过参数变换，将其中一张曲面的第一基本形式改写成另一张曲面的第一基本形式的倍数，进而设定适用参数系，得到用参数表达的保角对应。

首先比较球面和柱面的第一基本形式，

$$\text{球: } I = (d\theta)^2 + \cos^2 \theta (d\phi)^2$$

$$\text{柱: } \tilde{I} = (dh)^2 + (d\psi)^2$$

注意到不可能有  $d\psi = \cos \theta d\phi$ 。再注意到单变量的微分式必然是全微分，且在参数正则的要求下（刨去南北极点）有  $\cos \theta \neq 0$ ，从而考虑

$$I = \cos^2 \theta \left( \frac{1}{\cos^2 \theta} (d\theta)^2 + (d\phi)^2 \right)$$

令  $dh = \frac{1}{\cos \theta} d\theta$ ，有

$$h(\theta) = \int_0^\theta \frac{1}{\cos t} dt = \log \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

于是  $\sigma: \begin{cases} h = \log \tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) \\ \psi = \phi \end{cases}$  给出了保角对应。这样的保角对应称为 **Mercator 投影**。

**保角映射能有什么实际用处？** 绘制地图，用球极投影将地球面上的图形映到纸面上。然而并没有完全解决。

缺陷 1: 这里的球极投影定义域也非整个球面，需要去掉北极点，同时平面需要无限大。

缺陷 2: 注意到在参数  $(u, v)$  系下，球面的第一基本形式为：

$$I = \frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2} (du^2 + dv^2)$$

亦或再做参数变换后（相当于把平面从赤道平移至南极点）

$$I = \frac{1}{(u^2/4 + v^2/4 + 1)^2} (du^2 + dv^2)$$

其面积元为  $\frac{1}{(u^2/4 + v^2/4 + 1)^2} dudv$ ，这说明在平面的原点和南极点  $S$  附近，球极投影除了能保持形状外，大小也能基本保持，这样图形看起来和真实的效果差异不大。但是当远离南极点后，穿越赤道，甚至接近北极点，面积元前的系数迅速减小，投影后得到的图形与实际人的视觉感官就会有非常大的区别。

**如何解决这些问题？** 南北极还是用通常的球极投影这一保角对应。赤道附近要换用 Mercator 投影（现实中一副完整的世界地图由三部分构成）。根据 Mercator 投影的具体表达式

$$\sigma: \begin{cases} h = \log \tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) \\ \psi = \phi \end{cases}$$

它在赤道附近较为真实，越靠近南北极越失真（比如，地图上格陵兰岛的面积比非洲大陆都大）。

最后我们做一些概念的辨析，保角变换，有时也称为保形变换，共形变换。但这里的保形，共形并不是说整体的形状一样，而是仅仅是局部“保形”“共形”。具体来看

- 如果保角对应中的系数  $\lambda(u, v)$  为一常数 1，则此时的保角对应必为保长对应，它在适用参数系下的 Jacobi 矩阵整体上为单位矩阵 Id；换言之，保长对应整体上保证两个曲面一模一样。
- 如果保角对应中的系数  $\lambda(u, v)$  为某一正常数  $c \neq 1$ ，虽然此时的映射不是保长映射，但是我们可以将  $(u, v)$  放缩常数倍，构造一个新的保长映射；也就是两张曲面整体形状完全相同，大小不同，但是可以通过整体的放缩使得两张曲面相同。

- 如果保角对应中的系数  $\lambda(u, v)$  是变化的, 则只能局部上保证两个曲面形状一样 (确切地说是在切空间上“形状相同”), 但大小不同; 实际整体上的形状也不同。

不过, 在一些特殊的情形下, 保角映射可以保持曲面上某类特殊几何对象“形状”不变。我们还是以单位球面到平面的球极投影为例说明。大家学过复变知道, 球极投影将球面上的圆映为平面上的圆, 只是大小不同而已。这是因为球面上的圆均由平面

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

截出。此时, 平面上点的坐标满足:

$$\frac{2u}{a} + \frac{2v}{b} + \frac{u^2 + v^2 - 1}{c} = u^2 + v^2 + 1$$

即

$$\frac{1-c}{c}u^2 + \frac{2u}{a} + \frac{1-c}{c}v^2 + \frac{2v}{b} = 1 + \frac{1}{c}$$

要么是圆, 要么是直线 (圆的特例)。

## 9.2 等温参数系

### 9.2.1 等温参数系与保角映射的关联

目前, 我们已经得到了从球面到平面 (球极投影), 球面到圆柱面 (Mercator 投影) 的保角映射。显然, 这些曲面间是不可能存在保长映射的。也就是说相比保长对应, 保角对应确实存在更广泛的范围内。那么, 保角对应存在的范围到底有多大呢?

回过头来看例9.5, 构造两张复平面之间的保角映射, 只需要找到复平面之间解析函数即可。换言之, 我们能否在一张曲面上找到类似于复数“ $z$ ”这样的, 与第一基本形式相容的坐标, 就是能否构造保角映射的关键。

已知曲面  $S$  上已有正则参数  $(u, v)$ , 对应的度量矩阵为  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ 。不妨令  $z = u + iv$ 。在复平面上, 我们知道  $iz = -v + iu$  是平面上的一个保持定向的转动, 也就是刚体运动。那么, 在一般的曲面上, 我们自然也希望这样的转动在局部一点的切空间上是和第一基本形式相容的<sup>1</sup>。具体来看, 假设  $z = u + iv$  已经是这样使得  $i$  和第一基本形式相容的参数

<sup>1</sup>注意这里并非是说纯虚数“ $i$ ”的数乘可以视为曲面  $S$  到自身的保长映射, 而是说纯虚数“ $i$ ”在切空

系, 考虑任意一点处切空间上的映射  $i_* \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix}$ 。我们希望它是内积下的同构, 类似于之前保长映射中的讨论, 有

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

即  $E = G, F = 0$ 。也就是与第一基本形式相容的复坐标, 一定会使得第一基本形式成为

$$\lambda^2 ((du)^2 + (dv)^2)$$

反之, 若有参数系  $(u, v)$  使得第一基本形式写成上述形式, 令  $z = u + iv$ , 则  $i$  所诱导出的切空间上的映射必然与第一基本形式相容。

**定义 9.9.** 曲面  $S$  上参数系  $(u, v)$ , 如果复化后, 也就是  $z = u + iv$  与曲面的第一基本形式相容, 则称为等温参数系。等温参数系等价于说在  $(u, v)$  下, 曲面  $S$  的第一基本形式可以写为

$$\lambda^2 ((du)^2 + (dv)^2)$$

注意到  $(du)^2 + (dv)^2$  是平面的第一基本形式, 再结合推论9.4来看, 这相当于说如果曲面  $S$  上存在等温参数系的话, 曲面  $S$  一定可以和平面局部建立保角映射。反之, 如果曲面  $S$  可以和平面局部建立保角映射, 平面上的标准坐标也可以视为曲面上的等温参数系。总之, **曲面能否和平面建立保角映射, 等价于曲面上是否存在等温参数系。**

**例 9.10.** 由于球极投影给出了从单位球面到平面的保角对应, 从而坐标  $(u, v)$  就是球面上的等温参数系。此时

- 参数  $(u, v)$  下球面的第一基本形式变为了标准平面第一基本形式的函数倍

$$I = \frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2} (du^2 + dv^2)$$

——**等温参数系的存在是局部的, 确实不包括极点。**

间诱导出的复结构和第一基本形式相容。严格地讲, 就是曲面  $S$  能否找到一个复结构, 匹配已有的度量, 成为 Kähler 流形; 这要求复结构和度量相容, 同时复结构对应的 2-形式是闭的。但是曲面是 2 维流形, 其上 2-形式天然就是闭的, 这时仅需验证复结构和度量的相容性。对 Kähler 几何内容感兴趣的同学可以参考 [20] 或 [21]

## 9.2.2 等温参数系的存在性

现在核心的问题已经转化为，任给一张内蕴的曲面，也即是说第一基本形式确定，曲面上是否存在等温参数系。实际上，有

**定理 9.11 (Korn-Lichtenstein).** 任意一张正则曲面  $S$ ，给定光滑的第一基本形式后，局部上一定存在坐标系  $(u, v)$ ，使得第一基本形式可以写为

$$\lambda^2(u, v) ((du)^2 + (dv)^2)$$

其中  $\lambda(u, v)$  是非零的函数。

这一定理非常深刻，断言了任意曲面上等温参数系的局部存在性。它可以归结为复值的一次微分式积分因子的存在性。具体来看。

首先，任给曲面的第一基本形式

$$I = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$$

注意到  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$  是个正定矩阵。我们知道一个实对称矩阵  $A$  为正定矩阵的充分必要条件是存在可逆阵  $P$ ，使得  $A = PP^T$ 。为方便读者，我们具体把这一过程写出。因为  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

实对称，故存在由单位特征向量拼成的正交矩阵  $T$ ，使得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} &= T \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) T^T \\ &= T \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) T^T \\ &= T \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) (T \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}))^T \end{aligned}$$

其中， $\lambda_1, \lambda_2$  为矩阵正的特征值。如果  $\lambda_1 = \lambda_2$ ，此时的度量矩阵  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$  直接成为了数量矩阵，意味着已经成为等温参数系；如果  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ，则每个实特征值对应的单位特征向量是确定的（只可能差一个正负号）。假设  $T \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ ，则有

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 & b_1^2 + b_2^2 \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

接着, 令  $\theta_1 = a_1 dx + b_1 dy, \theta_2 = a_2 dx + b_2 dy$  为实的微分形式, 我们断言第一基本形式可以改写为

$$I = \theta_1^2 + \theta_2^2$$

这是因为代入具体表达式后

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 = (a_1^2 + a_2^2)dx^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2)dx dy + (b_1^2 + b_2^2)dy^2$$

而(9.1)式断言了这就是原先的第一基本形式  $I = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$ 。

最后, 再来考虑一个复值的微分形式:

$$\phi = \theta_1 + i\theta_2$$

于是有

$$I = \phi \bar{\phi} = (\theta_1 + i\theta_2)(\theta_1 - i\theta_2) = \theta_1^2 + \theta_2^2$$

注意到在复值的情形下, 记  $c$  是一个模长为 1 的复数 (复函数)

$$I = c\phi(\bar{c}\bar{\phi}) = \phi\bar{\phi}$$

故这样的  $\phi$  在相差一个模长为 1 的复数的意义下是唯一存在的。如果有复值的连续可微函数  $\lambda$  和  $z$ , 使得

$$dz = \lambda\phi$$

记  $z = u + iv$ , 则有

$$I = \frac{1}{|\lambda|^2} dz d\bar{z} = \frac{1}{|\lambda|^2} ((du)^2 + (dv)^2)$$

此时  $(u, v)$  成为了等温参数系。总而言之, 复值一次微分式积分因子的存在性等同于等温参数系的存在性。

复值一次微分式积分因子存在性的证明非常复杂, 本质上是要求解  $\bar{\partial}$  这一非线性偏微分方程, 远比附录F中实的一次微分式积分因子的存在性困难。在较短的篇幅内梳理清晰复的情形证明思路已经远远超出笔者的能力范畴, 请感兴趣的同学参考<sup>[22]</sup>中的第11章。更特殊一些, Gauss 在第一基本形式中系数  $E, F, G$  都是  $u, v$  的实解析函数这一特殊条件下也给出了证明 (参见附录F)。

再根据之前的讨论, 不难进一步得到

**推论 9.12.** 任意一个正则参数曲面  $S$  的每一点都有一个邻域可以和平面上一个开区域建立保角对应。再根据保角映射的复合仍然是保角映射, 任意两个正则参数曲面在局部上都可以建立保角对应。

例 9.13. 试建立旋转面

$$\vec{r}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

和平面的保角对应。

解. 旋转面的第一基本形式为

$$I = f^2(u)(dv)^2 + (f'^2(u) + g'^2(u))(du)^2$$

最直接的想法：令  $u = u(x, y), v = v(x, y)$ , 有

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

代入第一基本形式中想办法凑出公共的因子。然而，旋转面本身第一基本形式已经为正交参数系，这样直接做参数变换反而使问题复杂化。注意到到所有的系数都只和  $u$  有关，与  $v$  无关，可以直接从旋转面的第一基本形式中观察出来：

$$\begin{aligned} I &= f^2(u)(dv)^2 + (f'^2(u) + g'^2(u))(du)^2 \\ &= f^2(u) \left( (dv)^2 + \frac{f'^2(u) + g'^2(u)}{f^2(u)} (du)^2 \right) \\ &= f^2(u) \left( (dv)^2 + \left( \frac{\sqrt{f'^2(u) + g'^2(u)}}{f(u)} du \right)^2 \right) \end{aligned}$$

最终令

$$y = \int \frac{\sqrt{f'^2(u) + g'^2(u)}}{f(u)} du$$

得到保角对应。

□

很容易看出，这道例题本质上和 Mercator 投影的求解过程，也就是例9.8没有区别。柱面和平面间可以建立保长对应；球面是一般旋转面的特例： $\theta, \phi$  相当于  $u, v$ ,  $\psi, h$  相当于  $x, y$ 。取  $f(\theta) = \cos \theta$ ,  $g(\theta) = \sin \theta$ , 就重新得到了  $h = \int \frac{1}{\cos \theta} d\theta$ 。

在构造保角映射的过程中，我们不难体会到，由保长放宽到保角后，除了存在性一定可以保障外，保角映射的自由度也大大提高了。如球面到平面的保角对应就有多种（球极投影，Mercator 投影）。感兴趣的同学还可以思考下述例子。

例 9.14. 全平面到全平面的保长对应：有且只有刚体运动；全平面到全平面的保角对应：有且只有分式线性变换。

## 9.3 曲面上的复坐标

### 9.3.1 保角映射和解析函数的关系

之前的例9.5说明了由解析函数给出的共形映射一定具有保角性, 且在各点处伸缩的系数为  $|f'(z)|$ 。可见保角映射和解析函数有着深刻的联系。实际上, 我们可以把例9.5进一步推广。

**定理 9.15.** 假定  $(u_1, v_1)$  是曲面  $S_1$  上的等温参数系,  $(u_2, v_2)$  是曲面  $S_2$  上的参数系,  $\sigma$  是从  $S_1$  到  $S_2$  的一一映射, 写成坐标形式为  $\begin{cases} u_2(u_1, v_1) \\ v_2(u_1, v_1) \end{cases}$ 。令  $z = u_1 + iv_1$ , 考虑复函数  $w = f(z)$ , 其中  $w = u_2 + iv_2$ , 则下列三组条件中,

1.  $\sigma$  是一个保角映射;
2.  $f(z)$  是一个一一的解析函数;
3.  $(u_2, v_2)$  也是等温参数系;

任意两个组合可以推出第三个。

**证明.**  $(u_1, v_1)$  是等温参数系, 不妨设此时曲面  $S_1$  的第一类基本量组成的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

已知 1 和 2, 来证 3。设曲面  $S_2$  在参数系  $(u_2, v_2)$  下的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} E_2 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{pmatrix}$$

由于  $\sigma$  是保角映射, 有

$$\lambda^2 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} E_2 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{pmatrix} J^T$$

于是

$$\begin{pmatrix} E_2 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{pmatrix} = J^{-1} \lambda^2 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} (J^T)^{-1} = \lambda^2 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} (J^T J)^{-1}$$

而

$$J^T J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial u_1} & \frac{\partial u_2}{\partial v_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial v_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial v_1} & \frac{\partial v_2}{\partial v_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u_2}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial v_1}\right)^2 & \frac{\partial u_2}{\partial u_1} \frac{\partial v_2}{\partial u_1} + \frac{\partial u_2}{\partial v_1} \frac{\partial v_2}{\partial v_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \frac{\partial u_2}{\partial u_1} + \frac{\partial v_2}{\partial v_1} \frac{\partial u_2}{\partial v_1} & \left(\frac{\partial v_2}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial v_1}\right)^2 \end{pmatrix}$$

不难发现, 如果  $f(z)$  解析, 根据 Cauchy-Riemann 方程:

$$\frac{\partial u_2}{\partial u_1} = \frac{\partial v_2}{\partial v_1}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial u_1} = -\frac{\partial u_2}{\partial v_1}$$

有

$$J^T J = \left( \left(\frac{\partial u_2}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial u_1}\right)^2 \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = |f'(z)|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

得证。

已知 1 和 3, 来证 2。假如参数系  $(u_2, v_2)$  也是等温参数系, 这意味着  $(u_2, v_2)$  下的度量矩阵为  $\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ , 根据保角性质, 有

$$\lambda^2 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} J^T$$

即

$$\frac{\lambda_2}{\lambda^2 \lambda_1} J J^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

进而

$$\left(\frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} J\right) \left(\frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} J\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

这意味着  $\frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} J$  是一个正交矩阵, 于是  $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial v_1} & \frac{\partial v_2}{\partial v_1} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ , 于是可导出 Cauchy-Riemann 方程。得证。

已知 2 和 3, 来证 1。只要验证

$$\lambda^2 \begin{pmatrix} E_1(u_1, v_1) & F_1(u_1, v_1) \\ F_1(u_1, v_1) & G_1(u_1, v_1) \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} E_2(u_2, v_2) & F_2(u_2, v_2) \\ F_2(u_2, v_2) & G_2(u_2, v_2) \end{pmatrix} J^T$$

即可。

先看右端, 曲面  $S_2$  在等温参数  $(u_2, v_2)$  下的度量矩阵为  $\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ , 于是

$$J \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} J^T = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} J J^T = \lambda_2 |f'(z)|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

最后一个等式使用了解析函数的 Cauchy-Riemann 方程。

再看左端,  $(u_1, v_1)$  也已经是  $S_1$  上的等温参数系, 此时度量矩阵为  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ , 函数  $\lambda^2$  只要取  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} |f'(z)|^2$  即可。得证。  $\square$

简化一下, 已知  $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$  分别为曲面  $S_1$  和  $S_2$  的等温参数系,  $z = u_1 + iv_1, w = u_2 + iv_2, w = f(z)$  为曲面间映射  $\sigma$  的参数化, 则

$$w = f(z) \text{ 解析} \Leftrightarrow \frac{J}{\sqrt{\det J}} \text{ 为一个正交矩阵} \Leftrightarrow \sigma \text{ 为保角映射}$$

此时  $\sqrt{\det J} = |f'(z)|$  为坐标下的伸缩系数。也就是等温参数系下, 保角映射和解析函数 (保形变换, 共形映射) 是等价的概念。

### 9.3.2 复标架场及其运动公式

已经知道复变函数、解析函数在研究曲面的过程中有着重要的作用。不妨沿着这一主旨继续深入和扩展。设  $(u, v)$  是曲面  $S$  的局部参数系 (注意目前并不要求  $(u, v)$  是等温参数系), 我们把  $z = u + iv$  称为做曲面的复坐标系, 同时记

$$dz = du + idv, \quad d\bar{z} = du - idv$$

$$\vec{r}_z = \frac{1}{2}(\vec{r}_u - i\vec{r}_v); \quad \vec{r}_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\vec{r}_u + i\vec{r}_v)$$

这里我们额外说明一下, 将  $\vec{r}_z$  和  $\vec{r}_{\bar{z}}$  定义成这样的形式, 是为了保持和  $dz, d\bar{z}$  对偶关系, 即

$$dz(\vec{r}_z) = 1, dz(\vec{r}_{\bar{z}}) = d\bar{z}(\vec{r}_z) = 0, d\bar{z}(\vec{r}_{\bar{z}}) = 1$$

我们把  $\{\vec{r}_z, \vec{r}_{\bar{z}}, \vec{n}\}$  称为曲面的复标架场<sup>1</sup>。在内蕴几何的研究中, 往往会采用记号  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v})$  来替代  $\vec{r}_z$  和  $\vec{r}_{\bar{z}}$ 。在这样的记法下, 对于曲面  $S$  上的

<sup>1</sup>严格地讲,  $\{\vec{r}_z, \vec{r}_{\bar{z}}\}$  才是曲面上的切向量的复化, 但我们也需要研究曲面的外几何, 所以将  $\vec{n}$  也加入, 笼统称为复标架场。

函数  $f$ , 有

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} \right), \quad f_{\bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} + i \frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

且显然有

$$\overline{f_z} = \overline{f_{\bar{z}}}$$

若记

$$f_{z\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f, \quad f_{\bar{z}z} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} f$$

则有

$$f_{z\bar{z}} = f_{\bar{z}z} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) f = \frac{1}{4} (f_{uu} + f_{vv})$$

需要注意的是, 在二维欧氏空间, 也就是平面上, 算子  $\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$  称为 Laplace 算子。但是在一般的曲面 (Gauss 曲率非零, 或者更广一些, 一般的黎曼流形) 上, Laplace 算子的形式并非如此。所以, 为了不引起混淆, 我们在这里直接使用记号  $\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ 。在后续章节中我们会介绍一般的 Laplace 算子的定义, 大家注意区别。

再来看复标架场下的度量。将原有实度量复化, 显然有

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_z, \vec{r}_z \rangle &= \frac{1}{4} (\langle \vec{r}_u, \vec{r}_u \rangle - \langle \vec{r}_v, \vec{r}_v \rangle - 2i \langle \vec{r}_u, \vec{r}_v \rangle) \\ \langle \vec{r}_{\bar{z}}, \vec{r}_{\bar{z}} \rangle &= \frac{1}{4} (\langle \vec{r}_u, \vec{r}_u \rangle - \langle \vec{r}_v, \vec{r}_v \rangle + 2i \langle \vec{r}_u, \vec{r}_v \rangle) \\ \langle \vec{r}_z, \vec{r}_{\bar{z}} \rangle &= \frac{1}{4} (\langle \vec{r}_u, \vec{r}_u \rangle + \langle \vec{r}_v, \vec{r}_v \rangle) \end{aligned} \quad (9.2)$$

注意到新的内积是实的内积的复化<sup>1</sup>, 显然有

$$\overline{\langle \vec{r}_z, \vec{r}_z \rangle} = \langle \vec{r}_{\bar{z}}, \vec{r}_{\bar{z}} \rangle = \langle \vec{r}_{\bar{z}}, \vec{r}_{\bar{z}} \rangle$$

所以  $\langle \vec{r}_z, \vec{r}_z \rangle$  和  $\langle \vec{r}_{\bar{z}}, \vec{r}_{\bar{z}} \rangle$  两式中只要研究一个即可。同样的道理,  $\langle \vec{r}_z, \vec{n} \rangle, \langle \vec{r}_{\bar{z}}, \vec{n} \rangle$  也只需考虑其中一个。

如果  $(u, v)$  就是曲面  $S$  上普通的参数系, 引入这样的复标架并不会对曲面的研究有任何帮助, 各种运算比原先还要复杂。现在假定  $z = u + iv$  是等温参数系  $(u, v)$  对应的复坐标, 那么  $S$  的度量 (第一基本形式)  $\lambda^2(du^2 + dv^2)$  可以改写为复坐标的形式

$$I = \lambda^2 dz d\bar{z}$$

<sup>1</sup>注意此时只是直接复化, 并非酉空间上的内积。当然, 如果愿意的话, 也可以选择扩展为酉空间, 但除了增加难度外, 对我们的运算没有任何帮助。事实上, 把实的标架复化, 是复几何当中的常规操作。

同时, (9.2)式变为

$$\begin{aligned}\langle \vec{r}_z, \vec{r}_z \rangle &= 0 \\ \langle \vec{r}_z, \vec{r}_{\bar{z}} \rangle &= \frac{\lambda^2}{2}\end{aligned}\quad (9.3)$$

很容易看出, 这里(9.3)式成立等价于  $(u, v)$  是等温参数系。总之, 等温参数系下标架之间的度量关系如下

$$\langle \vec{r}_z, \vec{r}_z \rangle = 0, \quad \langle \vec{r}_z, \vec{r}_{\bar{z}} \rangle = \frac{\lambda^2}{2}, \quad \langle \vec{r}_z, \vec{n} \rangle = 0, \quad \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = 1 \quad (9.4)$$

在等温参数系下, 不仅仅是度量可以用复坐标改写为简单形式, 标架场的运动方程也可以简化。为了求出运动方程中  $\vec{r}_{zz}, \vec{r}_{z\bar{z}}, \vec{n}_z$  的表达式, 我们对(9.4)式中的各项求复坐标下的微分。根据内积和求导在共轭运算下的性质, 只需要考虑

$$\begin{aligned}\langle \vec{r}_{zz}, \vec{r}_z \rangle &= \langle \vec{r}_{z\bar{z}}, \vec{r}_z \rangle = 0 \\ \langle \vec{r}_{zz}, \vec{r}_{\bar{z}} \rangle &= \lambda \lambda_z \\ \langle \vec{r}_{zz}, \vec{n} \rangle &= -\langle \vec{r}_z, \vec{n}_z \rangle \\ \langle \vec{r}_{z\bar{z}}, \vec{n} \rangle &= -\langle \vec{r}_{\bar{z}}, \vec{n}_z \rangle \\ \langle \vec{n}_z, \vec{n} \rangle &= 0\end{aligned}\quad (9.5)$$

我们先来计算  $\langle \vec{r}_{zz}, \vec{n} \rangle = -\langle \vec{n}_z, \vec{r}_z \rangle$ 。我们已经知道在自然标架下, 曲面的第二类基本量可以表示为

$$L = -\langle \vec{r}_u, \vec{n}_u \rangle, \quad M = -\langle \vec{r}_u, \vec{n}_v \rangle = -\langle \vec{r}_v, \vec{n}_u \rangle, \quad N = -\langle \vec{r}_v, \vec{n}_v \rangle$$

于是

$$\begin{aligned}-\langle \vec{n}_z, \vec{r}_z \rangle &= -\frac{1}{4} \langle \vec{r}_u - i\vec{r}_v, \vec{n}_u - i\vec{n}_v \rangle \\ &= -\frac{1}{4} (\langle \vec{r}_u, \vec{n}_u \rangle - \langle \vec{r}_v, \vec{n}_v \rangle - 2i\langle \vec{r}_u, \vec{n}_v \rangle) \\ &= \frac{L - N - 2iM}{4}\end{aligned}$$

为了简化记号, 不妨记  $Q = \frac{L - N - 2iM}{4}$ , 是一个复值的函数。这一函数非常重要, 我们在10.2小节中还会再遇到<sup>1</sup>。再来计算

$$\langle \vec{r}_{z\bar{z}}, \vec{n} \rangle = \left\langle \frac{1}{4}(\vec{r}_{uu} + \vec{r}_{vv}), \vec{n} \right\rangle = \frac{1}{4}(L + N) = \frac{\lambda^2}{2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{L}{\lambda^2} + \frac{N}{\lambda^2} \right) \right) = \frac{\lambda^2}{2} H$$

<sup>1</sup>不过我们真正关心的是函数  $Q$  对应的与参数选取无关的微分形式, 即所谓的 Hopf 微分。

这里  $H$  是曲面的平均曲率。再结合共轭运算下的对称关系重写(9.5)式, 得到

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_{zz}, \vec{r}_z \rangle &= 0, & \langle \vec{r}_{zz}, \vec{r}_{\bar{z}} \rangle &= \lambda \lambda_z, & \langle \vec{n}, \vec{r}_{zz} \rangle &= Q; \\ \langle \vec{r}_{z\bar{z}}, \vec{r}_z \rangle &= 0, & \langle \vec{r}_{z\bar{z}}, \vec{r}_{\bar{z}} \rangle &= 0, & \langle \vec{r}_{z\bar{z}}, \vec{n} \rangle &= \frac{\lambda^2}{2} H; \\ \langle \vec{n}_z, \vec{r}_z \rangle &= -Q, & \langle \vec{n}_z, \vec{r}_{\bar{z}} \rangle &= \frac{\lambda^2}{2} H, & \langle \vec{n}_z, \vec{n} \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (9.6)$$

最后根据(9.4)式, 可推出等温参数系下复标架场的运动方程为

$$\begin{cases} \vec{r}_{zz} = \frac{2}{\lambda} \lambda_z \vec{r}_z + Q \vec{n} \\ \vec{r}_{z\bar{z}} = \frac{\lambda^2}{2} H \vec{n} \\ \vec{n}_z = -H \vec{r}_z - \frac{2}{\lambda^2} Q \vec{r}_{\bar{z}} \end{cases} \quad (9.7)$$

进一步, 根据  $\vec{r}_{z\bar{z}\bar{z}} = \vec{r}_{z\bar{z}z}$ , 利用(9.7)式, 可以得到等温参数系下复形式的 Gauss-Codazzi 方程

$$(\ln \lambda)_{z\bar{z}} = -\frac{\lambda^2}{4} K \quad (9.8)$$

$$Q_{\bar{z}} = \frac{\lambda^2}{2} H_z \quad (9.9)$$

具体过程读者可以自行推导; 同时, 不难验证它们与之前实的 Gauss-Codazzi 方程是完全等价的。

最后我们再重申一遍, 复标架运动方程(9.7)和 Gauss-Codazzi 方程(9.8), (9.9), 都只在等温参数系对应的复坐标下成立。

由于  $\vec{r}_{z\bar{z}} = \frac{1}{4}(\vec{r}_{uu} + \vec{r}_{vv})$ , 复标架运动方程(9.7)的第二个式子可以改写为

$$\frac{1}{\lambda^2}(\vec{r}_{uu} + \vec{r}_{vv}) = 2H \vec{n}$$

我们在后续章节中会把这一式子推广到一般曲面的 Laplace 算子的情形。

微分几何和解析函数的联系不仅仅局限于保角映射和等温参数系, 我们之后在常平均曲率曲面和极小曲面研究中, 也会遇到更多的解析函数, 并使用更深入的复变函数的理论。

## 9.4 曲面上的 Laplace 算子

之前我们在研究曲面上的测地线时，引入了曲面上向量场的协变导数，它可以视为三维空间中向量场的导数在曲面切平面上的垂直投影，相当于向量场“内蕴”的一阶导数。我们顺着这一思路，来研究曲面上函数的“内蕴的”二阶导数，以及 Laplace 算子。严格地讲，Laplace 算子当然算作是研究曲面的工具，应该放在第二部分介绍。实际中，因为这一部分内容比较抽象，难度过高；同时虽然 Laplace 算子在研究黎曼几何时用途非常广泛，但局限在我们这份讲义中，它目前只被用来研究极小曲面和常平均曲率曲面。所以我们将 Laplace 算子这一节放在最后一章，紧贴着极小曲面和常平均曲率曲面的内容。

### 9.4.1 单位正交基底下 Hessian 矩阵和 Laplace 算子的定义

我们在学习多元微积分场论的时候，知道有所谓的 Laplace 算子  $\Delta$ ：对于  $\mathbb{R}^3$  上的函数  $f$ ，有  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ ，对于  $\mathbb{R}^2$  上的函数  $f$ ，有  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 。然而，这一类直接使用坐标函数二阶导数的表达式很难推广到一般的曲面或者流形上。值得庆幸的是，场论中还指明了  $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$ ，我们自然会考虑，通过这一路径将 Laplace 算子推广到一般的曲面上。假定曲面  $S$  局部有参数系  $(u, v)$ ，参数方程为  $\vec{r}(u, v)$ ， $f$  是曲面上的函数。要设定曲面上  $f$  的梯度  $\nabla$ ，最自然的想法是：将  $f$  延拓到三维欧氏空间，对  $f$  求通常欧氏空间中的梯度  $\bar{\nabla} f$ ，再向  $S$  的切平面做垂直投影。此时，不难得到这样的“梯度”和  $f$  的延拓无关，其表达式为

$$f_u \vec{r}_u + f_v \vec{r}_v$$

然而，不幸的是，对比函数的微分  $df = f_u du + f_v dv$ ，这样构造的梯度表达式和参数  $(u, v)$  的选取相关。因此，我们不能再使用曲面的自然标架，而是要取曲面上的单位正交标架场  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 。此时，约定

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_2} \vec{e}_2$$

这里  $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_1}$ ， $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_2}$  分别是  $f$  在  $\vec{e}_1$ ， $\vec{e}_2$  方向求方向导数。简便起见，我们把这两个方向导数的值记为  $f_1, f_2$ ，于是

$$\nabla f = f_1 \vec{e}_1 + f_2 \vec{e}_2$$

不难验证，梯度的定义与单位正交标架场  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  的选取无关。

$\nabla f$  是曲面  $S$  上的一个切向量场，自然可以对它求协变导数<sup>1</sup>，于是有

$$\begin{aligned} D_{\vec{e}_1}(\nabla f) &= \frac{\partial f_1}{\partial \vec{e}_1} \vec{e}_1 + f_1 D_{\vec{e}_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \vec{e}_1} \vec{e}_2 + f_2 D_{\vec{e}_1} \vec{e}_2 \\ D_{\vec{e}_2}(\nabla f) &= \frac{\partial f_1}{\partial \vec{e}_2} \vec{e}_1 + f_1 D_{\vec{e}_2} \vec{e}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \vec{e}_2} \vec{e}_2 + f_2 D_{\vec{e}_2} \vec{e}_2 \end{aligned}$$

如果我们采用如下记号

$$\begin{aligned} D_{\vec{e}_1}(\nabla f) &= f_{11} \vec{e}_1 + f_{21} \vec{e}_2 \\ D_{\vec{e}_2}(\nabla f) &= f_{12} \vec{e}_1 + f_{22} \vec{e}_2 \end{aligned}$$

注意到  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  是单位正交基底，所以  $D_{\vec{e}_1} \vec{e}_1, D_{\vec{e}_2} \vec{e}_1$  只有  $\vec{e}_2$  方向的分量， $D_{\vec{e}_1} \vec{e}_2, D_{\vec{e}_2} \vec{e}_2$  只有  $\vec{e}_1$  方向的分量，于是

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{\partial f_1}{\partial \vec{e}_1} + f_2 \langle D_{\vec{e}_1} \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle; & f_{12} &= \frac{\partial f_1}{\partial \vec{e}_2} + f_2 \langle D_{\vec{e}_2} \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle \\ f_{21} &= \frac{\partial f_2}{\partial \vec{e}_1} + f_1 \langle D_{\vec{e}_1} \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle; & f_{22} &= \frac{\partial f_2}{\partial \vec{e}_2} + f_1 \langle D_{\vec{e}_2} \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle \end{aligned} \quad (9.10)$$

我们把由函数构成的矩阵  $\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$  称为函数  $f$  关于单位正交标架场  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  的 Hessian 矩阵<sup>2</sup>，记为  $Hess(f)$ 。感兴趣的同学可以自己证明 Hessian 矩阵是一个对称矩阵，即  $f_{12} = f_{21}$ ，或参考<sup>[18]</sup>。进一步，还可以说明，不同正交标架场下的 Hessian 矩阵相差一个关于正交基底之间过度矩阵的合同变换，这意味着不同正交标架场下的 Hessian 矩阵既合同，也相似。

Hessian 矩阵实际上代表了函数  $f$  的二阶导数。特别要注意的是，和我们通常认知不同的是，

$$f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{e}_j \partial \vec{e}_i} + f_k \langle D_{\vec{e}_j} \vec{e}_k, \vec{e}_i \rangle \neq \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{e}_j \partial \vec{e}_i}$$

其中， $k \neq i$ 。而之所以采用现在这样的定义方式，就是我们之前提到的，矩阵  $(f_{ij})$  在不同标架场下是合同的，可以认为这个量是由曲面本身决定的，与标架场的选取无关；或者用更标准的语言来解释，就是这样定义的 Hessian 是一个张量（参见<sup>[19]</sup>），而  $\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{e}_j \partial \vec{e}_i}$  与坐标系的选取关系非常复杂，不是张量。

<sup>1</sup>实际上，真正的操作是对切向量场的对偶，也就是  $df$  这一 1-形式求协变导数，得到一个二阶协变张量场，而定义 1-形式的协变导数需要有微分流形，特别是张量的基础，我们这里就不展开了。在正交标架场下，从梯度  $\nabla f$  入手引入函数的 Laplace，和从  $df$  入手没有实质区别。

<sup>2</sup>同样，真正的 Hessian 矩阵是一个二阶协变张量场，而非数值的矩阵。我们这里依然做了简化。

我们在第八章中, 说明了协变导数  $D$  是一个内蕴的运算, 只和曲面的第一基本形式相关, 换言之, 抽象曲面上函数的 Hessian, 只要曲面的第一基本形式确定, 就可以求出。

我们现在把函数  $f$  的 Hessian 矩阵的迹, 定义为函数  $f$  的 Laplace, 即

$$\Delta f = \text{TrHess}(f) = f_{11} + f_{22}$$

因为不同单位正交基底下的 Hessian 矩阵既是合同的, 也是相似的, 故迹与基底的选取无关。同时, 因为 Hessian 矩阵是内蕴的, Laplace 算子也是一个内蕴的算子。Laplace 算子是内蕴的这点非常重要, 我们有必要进一步深入解读。这意味着 Laplace 算子与曲面上选取的参数系无关。换句话说, 如果我们研究是二维的流形, 而非曲面片, 那么在两张曲面片重叠的地方, Laplace 算子是相同的, 也就是 Laplace 算子可以定义在整张曲面上。这也是使用 Laplace 算子研究曲面整体性质的基础。

满足  $\Delta f = 0$  的函数, 我们称之为调和函数。

例 9.16. 计算  $\mathbb{R}^2$  上函数  $f$  的 Hessian 矩阵和 Laplace。

因为我们在内蕴几何的范畴内讨论, 所以采用内蕴几何的记号, 分别用  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$  表示  $x, y$ - 曲线的切向量场。在标准的内积下,  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$  已经是单位正交的, 于是

$$\nabla f = f_x \frac{\partial}{\partial x} + f_y \frac{\partial}{\partial y}$$

而此时的协变导数  $D$  就是欧氏空间中通常的方向导数, 进而

$$\begin{aligned} D_{\frac{\partial}{\partial x}}(\nabla f) &= f_{xx} \frac{\partial}{\partial x} + f_{yx} \frac{\partial}{\partial y} \\ D_{\frac{\partial}{\partial y}}(\nabla f) &= f_{xy} \frac{\partial}{\partial x} + f_{yy} \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

即

$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

也就是说, 欧氏空间中的函数的 Hessian 矩阵, 就是其通常二阶导数构成的矩阵, 这和我们在第六章中引入 Monge-Ampère 方程时的 Hessian 矩阵是一致的。此时

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

和欧氏空间通常的 Laplace 算子也别无二致。但是大家同样也要注意, 一般的曲面, 或者更广泛的, 非平坦空间上函数  $f$  的 Hessian 矩阵并非简单的对  $f$  求二阶导数。

## 9.4.2 等温参数系下的 Laplace 算子和调和函数

例 9.17. 写出曲面  $S$  在等温参数系下, 即第一基本形式  $I = \lambda^2((du)^2 + (dv)^2)$ , 的 Laplace 算子的表达式。

依然采用内蕴的记号,  $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$  表示  $u, v$ -曲线的切向量场, 对应于外在几何中的  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ 。现在  $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$  已经正交, 但还需要单位化, 令  $\vec{e}_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial u}$ ,  $\vec{e}_2 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial v}$ 。于是

$$\nabla f = \frac{1}{\lambda^2} \left( f_u \frac{\partial}{\partial u} + f_v \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

进而

$$\begin{aligned} D_{\vec{e}_1} \nabla f &= \frac{1}{\lambda} D_{\frac{\partial}{\partial u}} \left( \frac{f_u}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{f_v}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} \left( \left( \frac{\partial}{\partial u} \frac{f_u}{\lambda^2} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{f_u}{\lambda^2} D_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u} + \left( \frac{\partial}{\partial u} \frac{f_v}{\lambda^2} \right) \frac{\partial}{\partial v} + \frac{f_v}{\lambda^2} D_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} \left( \left( \frac{f_{uu}}{\lambda^2} - \frac{2f_u \lambda_u}{\lambda^3} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{f_u}{\lambda^2} D_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u} + \left( \frac{f_{vu}}{\lambda^2} - \frac{2f_v \lambda_u}{\lambda^3} \right) \frac{\partial}{\partial v} + \frac{f_v}{\lambda^2} D_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

注意到第八章中协变导数的内蕴表达式

$$\begin{aligned} D_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u} &= \Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial v} \\ D_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial u} &= \Gamma_{21}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{21}^2 \frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

再根据 Christoffel 记号的内蕴表达式, 有

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\partial}{\partial u} \log \lambda, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{\partial}{\partial v} \log \lambda, \quad \Gamma_{21}^1 = \frac{\partial}{\partial v} \log \lambda, \quad \Gamma_{21}^2 = \frac{\partial}{\partial u} \log \lambda$$

于是

$$\begin{aligned} D_{\vec{e}_1} \nabla f &= \frac{1}{\lambda} \left( \left( \frac{f_{uu}}{\lambda^2} - \frac{2f_u \lambda_u}{\lambda^3} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{f_u}{\lambda^2} D_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u} + \left( \frac{f_{vu}}{\lambda^2} - \frac{2f_v \lambda_u}{\lambda^3} \right) \frac{\partial}{\partial v} + \frac{f_v}{\lambda^2} D_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} \left( \left( \frac{f_{uu}}{\lambda^2} - \frac{f_u \lambda_u}{\lambda^3} + \frac{f_v \lambda_v}{\lambda^3} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \left( \frac{f_{vu}}{\lambda^2} - \frac{f_v \lambda_u}{\lambda^3} - \frac{f_u \lambda_v}{\lambda^3} \right) \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ &= \left( \frac{f_{uu}}{\lambda^2} - \frac{f_u \lambda_u}{\lambda^3} + \frac{f_v \lambda_v}{\lambda^3} \right) \vec{e}_1 + \left( \frac{f_{vu}}{\lambda^2} - \frac{f_v \lambda_u}{\lambda^3} - \frac{f_u \lambda_v}{\lambda^3} \right) \vec{e}_2 \end{aligned}$$

同理, 有

$$D_{\vec{e}_2} \nabla f = \left( \frac{f_{vu}}{\lambda^2} - \frac{f_u \lambda_v}{\lambda^3} - \frac{f_v \lambda_u}{\lambda^3} \right) \vec{e}_1 + \left( \frac{f_{vv}}{\lambda^2} + \frac{f_u \lambda_u}{\lambda^3} - \frac{f_v \lambda_v}{\lambda^3} \right) \vec{e}_2$$

即  $f_{11} = \frac{f_{uu}}{\lambda^2} - \frac{f_u \lambda_u}{\lambda^3} + \frac{f_v \lambda_v}{\lambda^3}$ ,  $f_{22} = \frac{f_{vv}}{\lambda^2} + \frac{f_u \lambda_u}{\lambda^3} - \frac{f_v \lambda_v}{\lambda^3}$ 。最终,

$$\Delta_S f = \frac{1}{\lambda^2}(f_{uu} + f_{vv})$$

回忆一下,我们在9.3.2小节中曾经计算过,在等温参数系  $(u, v)$  下,如果令  $z = u + iv$ , 则有

$$f_{z\bar{z}} = f_{\bar{z}z} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)f = \frac{1}{4}(f_{uu} + f_{vv})$$

于是

$$\Delta_S f = 4\lambda^2 f_{z\bar{z}} = 4\lambda^2 f_{\bar{z}z}$$

这意味着 Laplace 算子还可以写成

$$\Delta_S = \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} = \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \quad (9.11)$$

这同时也说明了等温参数系下的调和函数和解析函数<sup>1</sup>有着密切的关联,因为很容易得到

**命题 9.18.** 若  $f$  是曲面  $S$  上的调和函数,那么取等温参数系  $(u, v)$ , 令  $z = u + iv$ , 则  $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} - i\frac{\partial f}{\partial v}\right)$  是关于  $z$  的解析函数。

反过来,也有

**命题 9.19.** 设  $(u, v)$  是曲面  $S$  上的等温参数系,令  $z = u + iv$ , 若  $\psi$  是  $z$  的解析函数,则  $\operatorname{Re}\psi$ ,  $\operatorname{Im}\psi$  和  $\ln|\psi|^2$  都是曲面  $S$  上的调和函数。

**证明.**  $\operatorname{Re}\psi$  和  $\operatorname{Im}\psi$ , 也就是解析函数的实部和虚部是调和函数可直接由 Cauchy-Riemann 方程导出。我们重点关注解析函数模长的对数,即  $\ln|\psi|^2$ 。在等温参数系下,

$$\Delta_S \ln|\psi|^2 = \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \ln(\psi\bar{\psi}) = \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (\ln\psi + \ln\bar{\psi}) = \frac{4}{\lambda^2} \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \ln\psi \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial}{\partial z} \overline{\ln\psi} \right) \right)$$

常曲率曲面上的  $\psi$  是全纯函数,从而  $\ln\psi$  也是,于是  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \ln\psi = 0$ 。再根据  $\frac{\partial}{\partial z} \overline{\ln\psi} = \overline{\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \ln\psi}$ , 有  $\Delta_S \ln|\psi|^2 = 0$  □

上述两个命题在后续研究常平均曲率曲面和极小曲面时还会用到。

<sup>1</sup>本讲义中的解析函数,实际上要比全纯函数,也就是整个复平面上都解析的解析函数的范畴要更广,只要求在给定的定义域内解析即可,有些时候也包含亚纯函数。当然,在个别上下文清晰的情况下,也会混用解析函数和全纯函数。

### 9.4.3 一般参数系下的 Hessian 矩阵和 Laplace 算子

任意给定一张曲面，很多时候曲面上的单位正交标架场并没有显式给出，如何得到曲面上的 Hessian 矩阵和 Laplace 算子呢？我们首先把单位正交标架场下的 Hessian 矩阵推广到一般的切向量场。设  $f$  是曲面  $S$  上的函数， $X, Y$  均为  $S$  上的切向量场，定义  $D^2f$  称为函数  $f$  的二阶协变导数：

$$D^2f(X, Y) = \frac{\partial^2 f}{\partial Y \partial X} - \frac{\partial f}{\partial (D_Y X)}$$

注意这样定义的二阶协变导数是个张量，也就是说，除了关于  $X, Y$  的加法线性外，对于任意的函数  $a, b$  也有函数线性，即

$$D^2f(aX, bY) = abD^2f(X, Y)$$

有关张量的严格定义，以及  $D^2f$  为张量的具体证明，我们这里就不展开了，感兴趣的同学可以自行证明或参考<sup>[9]</sup>。

假设曲面  $S$  上有局部坐标系  $\{u^1, u^2\}$ ，此时  $\{\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}\}$  也是  $S$  上的切向量场，规定  $f$  在局部坐标系  $\{u^1, u^2\}$  下的 Hessian 矩阵为

$$\begin{aligned} \left( D^2f\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^1 \partial u^1} - \frac{\partial f}{\partial (D_{\frac{\partial}{\partial u^1}} \frac{\partial}{\partial u^1})} & \frac{\partial^2 f}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{\partial f}{\partial (D_{\frac{\partial}{\partial u^1}} \frac{\partial}{\partial u^2})} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2 \partial u^1} - \frac{\partial f}{\partial (D_{\frac{\partial}{\partial u^2}} \frac{\partial}{\partial u^1})} & \frac{\partial^2 f}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{\partial f}{\partial (D_{\frac{\partial}{\partial u^2}} \frac{\partial}{\partial u^2})} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^1 \partial u^1} - \sum_{k=1}^2 \Gamma_{11}^k \frac{\partial f}{\partial u^k} & \frac{\partial^2 f}{\partial u^1 \partial u^2} - \sum_{k=1}^2 \Gamma_{12}^k \frac{\partial f}{\partial u^k} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2 \partial u^1} - \sum_{k=1}^2 \Gamma_{21}^k \frac{\partial f}{\partial u^k} & \frac{\partial^2 f}{\partial u^2 \partial u^2} - \sum_{k=1}^2 \Gamma_{22}^k \frac{\partial f}{\partial u^k} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

为了不引起混淆，局部坐标系  $\{u^1, u^2\}$  下的 Hessian 矩阵始终记为  $(D^2f(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}))$ ，区别于单位正交标架场下的 Hessian 矩阵  $Hess(f)$ 。接下来我们希望通过度量矩阵  $g_{ij}$  把  $Hess(f)$  和  $(D^2f(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}))$  这两者关联起来。

思路很简单，由于  $D^2f$  是个张量，具有函数线性，我们自然希望可以将基底  $\{\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}\}$  线性组合成单位正交基底，再将  $D^2f$  作用在其上，就可以得到单位正交标架场下的 Hessian 矩阵  $Hess(f)$ 。具体来看，设  $g_{ij}$  为第一类基本量，记  $g$  为矩阵  $g_{ij}$  的行列式， $g^{ij}$  为矩阵  $g_{ij}$  的逆。注意到  $g_{ij}$  是一个正定的实对称矩阵， $g^{ij}$  也是。因此，存在一个正定实对称矩

阵  $a^{ij}$ , 使得  $(a^{ij})^2 = (g^{ij})$ , 即  $\sum_{j=1}^2 a^{ij} a^{jk} = g^{ik}$ . 现在我们断言,

$$\vec{e}_1 = \sum_{k=1}^2 a^{1k} \frac{\partial}{\partial u^k}, \quad \vec{e}_2 = \sum_{k=1}^2 a^{2k} \frac{\partial}{\partial u^k}$$

是一组单位正交基。这是因为

$$\begin{aligned} \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^2 a^{ik} \frac{\partial}{\partial u^k}, \sum_{l=1}^2 a^{jl} \frac{\partial}{\partial u^l} \right\rangle = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 a^{ik} \left\langle \frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l} \right\rangle a^{jl} \\ &= \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 a^{ik} g_{kl} a^{jl} = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 a^{ik} \left( \sum_{p=1}^2 a_{kp} a_{pl} \right) a^{jl} \\ &= \sum_{p=1}^2 \left( \sum_{k=1}^2 a^{ik} a_{kp} \right) \left( \sum_{l=1}^2 a_{pl} a^{jl} \right) = \sum_{p=1}^2 \delta_p^i \delta_p^j = \delta_{ij} \end{aligned}$$

这里  $a_{ij}$  是矩阵  $a^{ij}$  的逆矩阵。然后, 利用函数的 Hessian 矩阵是张量的性质, 可以得到

$$Hess(f) = D^2 f(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = D^2 f \left( \sum_{k=1}^2 a^{ik} \frac{\partial}{\partial u^k}, \sum_{l=1}^2 a^{jl} \frac{\partial}{\partial u^l} \right) = \sum_{k,l=1}^2 a^{ik} a^{jl} D^2 f \left( \frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l} \right).$$

进而也可以导出一般参数系下的 Laplace 算子的表达式

$$\begin{aligned} \Delta_S f &= \text{Tr} Hess(f) = \sum_{i=1}^2 \left( \sum_{k,l=1}^2 a^{ik} a^{il} D^2 f \left( \frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \right) \\ &= \sum_{k,l=1}^2 g^{kl} D^2 f \left( \frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} - \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial u^k} \right). \end{aligned} \tag{9.12}$$

在此基础上, 我们还可以证明

**命题 9.20.** 若  $f$  是曲面  $S$  上的光滑函数, 则

$$\Delta_S f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial}{\partial u^k} \left( \sum_{i=1}^2 g^{ik} \sqrt{g} \frac{\partial f}{\partial u^i} \right) \tag{9.13}$$

<sup>1</sup>参照9.2.2小节中对度量矩阵  $g_{ij}$  的操作, 先将实对称  $g^{ij}$  对角化, 然后对角线上的正的特征值开根号得到两个对角阵; 不同的地方在于这个时候还需要在两个对角阵之间插入单位正交特征向量组成的正交阵及其逆。同样, 也存在正定矩阵  $(a_{ij})$  使得  $(a_{ij})^2 = (g_{ij})$ , 且矩阵  $(a^{ij})$  是  $(a_{ij})$  的逆。

证明. 整个证明就是单纯而繁琐的运算. 方便起见, 从(9.13)式的右端出发, 化简到(9.12)式的最后一项. 注意到(9.13)式的右端可以改写为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial}{\partial u^k} \left( \sum_{i=1}^2 g^{ik} \sqrt{g} \frac{\partial f}{\partial u^i} \right) = \sum_{k,i=1}^2 \left( g^{ik} \frac{\partial^2 f}{\partial u^k \partial u^i} + \left( \frac{\partial g^{ik}}{\partial u^k} + \frac{g^{ik}}{2} \frac{\partial \ln g}{\partial u^k} \right) \frac{\partial f}{\partial u^i} \right) \\ & = \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} + \sum_{k,i=1}^2 \left( \frac{\partial g^{ik}}{\partial u^k} + \frac{g^{ik}}{2} \frac{\partial \ln g}{\partial u^k} \right) \frac{\partial f}{\partial u^i} \end{aligned} \quad (9.14)$$

注意到已经有如下公式成立 (见第四章习题):

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^2 (g^{il} \Gamma_{lk}^j + g^{jl} \Gamma_{lk}^i) &= -\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k} \\ \sum_{l=1}^2 \Gamma_{kl}^l &= \frac{1}{2} \frac{\partial \ln g}{\partial u^k} \end{aligned}$$

将它们代入(9.14)式的第二项中, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{k,i=1}^2 \left( \frac{\partial g^{ik}}{\partial u^k} + \frac{g^{ik}}{2} \frac{\partial \ln g}{\partial u^k} \right) \frac{\partial f}{\partial u^i} = \sum_{k,i=1}^2 \left( -\sum_{l=1}^2 (g^{il} \Gamma_{lk}^k + g^{kl} \Gamma_{lk}^i) + g^{ik} \sum_{l=1}^2 \Gamma_{kl}^l \right) \frac{\partial f}{\partial u^i} \\ & = \sum_{k,i,l=1}^2 (-g^{il} \Gamma_{lk}^k + g^{kl} \Gamma_{lk}^i) \frac{\partial f}{\partial u^i} = -\sum_{k,i,l=1}^2 g^{kl} \Gamma_{lk}^i \frac{\partial f}{\partial u^i} \\ & = -\sum_{i,k,j=1}^2 g^{ij} \Gamma_{ji}^k \frac{\partial f}{\partial u^k} = -\sum_{i,j=1}^2 g^{ij} \left( \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ji}^k \frac{\partial f}{\partial u^k} \right) \end{aligned}$$

即(9.13)式的右端等于(9.12)式的最后一项. □

不难验证, 例9.16和例9.17中 Laplace 算子的表达式都是(9.12)和(9.13)式的特例。

#### 9.4.4 曲面上 Laplace 算子的性质

这一节的最后, 我们证明一个重要的命题, 它在研究常平均曲率和极小曲面中将发挥关键的作用。

**命题 9.21.** 设  $S$  是  $E^3$  中的曲面,  $\Delta_S$  是  $S$  上的 Laplace 算子,  $\vec{r}$  是曲面  $S$  的位置向量, 则有

$$\Delta_S \vec{r} = 2H \vec{n} \quad (9.15)$$

其中  $H$  是曲面的平均曲率,  $\vec{n}$  是曲面的单位法向量, 而  $\vec{r}$  视为一个三元的函数, 即  $\Delta_S \vec{r}$  的真实意义为  $(\Delta_S x, \Delta_S y, \Delta_S z)$ 。

证明. 首先, 我们把(9.10)式中的  $f_{11}, f_{22}$  改写, 由于  $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle \equiv 0$ , 且协变导数与内积相容, 有

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{\partial f_1}{\partial \vec{e}_1} - f_2 \langle D_{\vec{e}_1} \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle \\ f_{22} &= \frac{\partial f_2}{\partial \vec{e}_2} - f_1 \langle D_{\vec{e}_2} \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle \end{aligned} \quad (9.16)$$

其次, 将  $\vec{r}$  视为一个三元的函数, 依据我们在3.2.6小节的讨论, 有  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{v}$  对于任意  $\vec{v}$  都成立. 那么自然有  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{e}_1} = \vec{e}_1, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{e}_2} = \vec{e}_2$ . 将  $\vec{r}$  替换(9.16)式中的  $f$  (实际上是将  $\vec{r}$  的分量  $x, y, z$  分别代入(9.16)式中, 然后再组合成一个三元向量函数), 得到

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \vec{e}_1} - \langle D_{\vec{e}_1} \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle \vec{r}_2 = \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \vec{e}_1} - \langle D_{\vec{e}_1} \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2 \\ r_{22} &= \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \vec{e}_2} - \langle D_{\vec{e}_2} \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{r}_1 = \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \vec{e}_2} - \langle D_{\vec{e}_2} \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 \end{aligned}$$

注意到  $D_{\vec{e}_1} \vec{e}_1$  只有  $\vec{e}_2$  方向的分量,  $D_{\vec{e}_2} \vec{e}_2$  只有  $\vec{e}_1$  方向的分量, 有

$$D_{\vec{e}_1} \vec{e}_1 = \langle D_{\vec{e}_1} \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2, \quad D_{\vec{e}_2} \vec{e}_2 = \langle D_{\vec{e}_2} \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1$$

这就意味着  $\vec{r}_{11}, \vec{r}_{22}$  均是外围欧氏空间中的方向导数和曲面上协变导数的差, 即

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \vec{e}_1} - D_{\vec{e}_1} \vec{e}_1 \\ r_{22} &= \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \vec{e}_2} - D_{\vec{e}_2} \vec{e}_2 \end{aligned}$$

再注意到曲面上向量场的协变导数就是由欧氏空间中的方向导数向曲面的切空间正交投影得到的, 从而有

$$\vec{r}_{11} = \left\langle \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \vec{e}_1}, \vec{n} \right\rangle \vec{n}, \quad \vec{r}_{22} = \left\langle \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \vec{e}_2}, \vec{n} \right\rangle \vec{n}$$

最后, 在曲面的第二基本形式的研究中, 我们早就知道

$$\left\langle \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \vec{e}_1}, \vec{n} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial \vec{n}}{\partial \vec{e}_1}, \vec{e}_1 \right\rangle = b_{11} = L, \quad \left\langle \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \vec{e}_2}, \vec{n} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial \vec{n}}{\partial \vec{e}_2}, \vec{e}_2 \right\rangle = b_{22} = N$$

而在单位正交的标架下,  $2H = b_{11} + b_{22} = L + N$ , 即  $\Delta_S \vec{r} = \vec{r}_{11} + \vec{r}_{22} = 2H\vec{n}$ .  $\square$

实际上，细心的读者应该已经发现了，由于  $\Delta_S = \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} = \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ ，等式(9.15)完全等价于我们在9.3.2小节中得到的复标架场的运动公式(9.7)中的  $\vec{r}_{z\bar{z}} = \frac{\lambda^2}{2} H \vec{n}$  一式，仅仅只是计算的角度不同。

有些同学也许会觉得奇怪，因为介绍的工具都是内蕴的，而极小曲面和常平均曲率曲面都是外在几何。实际上这并不矛盾，因为外在几何和内蕴几何不管在什么样的情况下都是相容的，两者互相支撑，而非水火不容的对立关系；使用内蕴的工具来研究外在几何，很多时候会产生事半功倍的奇效。

## 本章注记

正如这一章的标题所言，这一章的内容其实是分为了两部分：表面上的等温参数系，以及表面上的 Laplace 算子。本质上是不同类别的两类对象，而把它们放在一起的根本原因在于：在等温参数系下 Laplace 算子可以有非常简便的表达形式；反过来，在一些特定的情况下（下一章就会遇到），也可以利用 Laplace 算子构造表面上等温参数系。等温参数系和 Laplace 算子的这种密切关系并不难理解，因为就在复平面上，根据 Cauchy-Riemann 方程，解析函数的实部和虚部都是调和函数。

大部分教材会把保角映射和等温参数系这一部分内容，和保长映射的内容放在一起，放到第六章当中，原因很简单，保角映射可以视为保长映射的推广，自然也是曲面间映射的一种。我们选择把保角映射内容独立出来，主要有以下两个原因：一是虽然保角映射确实是一个映射，但是真正的重点确实背后的等温参数系，而等温参数系的存在性完全是另外范畴的内容；二是希望强调解析函数在微分几何课程中的作用，虽然少部分微分几何教材也会涉及到解析函数的内容，但笔者依然觉得对解析函数的运用强调的不够。

本讲义的副标题是：微分方程和解析函数视角下的曲线和曲面。在曲面的研究中，为什么一定如此突出解析函数的重要性呢？几何对象所遵从的偏微分方程的非线性程度越来越高，自然需要用到更高级的框架来进行研究，比如使用 Sobolev 空间等工具证明等温参数系的存在性，当然，这远远超出了本讲义的范畴；不过用偏微分方程一力降十会并非唯一的路径，方程对于微分几何，不论是局部还是整体问题，当然很重要，但也不是万能的，我们可以找到其他的工具，来辅助我们，和微分方程结合起来解决几何问题。

这样的数学工具就是解析函数。实际上，曲面作为一个二维的几何对象，天然就和复平面有着密切的关联。而这样的关联，对更高阶的课程，如复几何，代数几何，都有着关键的启发。特别是复几何，其中近复结构的可积性，复流形切丛的复化和分解，Kähler

流形上的 Laplace 算子，都能在曲面上找到对应。甚至可以说，学习曲面和解析函数的关联，本质上是为了进一步学习复几何做准备。

反过来，解析函数本身和非线性偏微分方程的关系就非常密切。解析函数本身就对应 Cauchy-Riemann 方程，等温参数系的存在性也需要求解偏微分方程。这两者其实是你中有我，我中有你的。

我们这里考虑曲面和解析函数的关系，其实还是局部的视角，也就是曲面片。整体的曲面和解析函数的关系同样密切，这就是所谓的黎曼曲面，抑或代数曲线的概念，感兴趣的同学可以参考<sup>[22]</sup>。

更进一步：曲面（实二维流形）上一定有等温参数系存在，这一结论在更高维数中的复流形上也有对应，粗略而言，相当于著名的 Newlander-Nirenberg 定理。当然，具体细节上还是有一点点差异，Newlander-Nirenberg 定理只涉及近复结构和复结构，并不涉及度量，而等温参数系天然就和度量绑定。详细讨论可见附录K。

学习 Laplace 算子这一部分内容时，特别要注意的是，曲面上的 Laplace 算子，是曲面内蕴的算子。它和我们在第八章中引入的协变导数关系密切。可以简单地理解为：协变导数相当于内蕴的一阶导数，Laplace 算子（包括 Hessian）相当于内蕴的二阶导数。

Laplace 算子在黎曼几何几何的研究中至关重要，感兴趣的同学可以参考<sup>[23]</sup>。



## 第二部分注记

第二部分是引入研究曲面的新的方法。我们主要涉及了曲面之间的映射，曲面上的曲线，解析函数以及 Laplace 算子。此外，我们还研究了一些特殊的曲面，比如可展曲面，常曲率曲面。我们希望通过可展曲面来更好地理解曲面上的曲线（曲率线，正交曲率线网）以及曲面之间的映射（到平面的映射）。我们也希望通过常曲率曲面来更好地理解测地线的性质。解析函数以及 Laplace 算子的应用，要等到第三部分中的第十章。总之，曲面间的映射，曲面上的曲线，解析函数以及 Laplace 算子都是我们研究曲面的工具。

很明显的是，第一部分曲线基本理论和曲面基本理论，第二部分中的积分曲线的存在唯一性，使用的都是线性微分方程，第二部分中正交参数系的存在性，测地线的存在唯一性，使用的都是非线性微分方程。换言之，总体上看，前两部分，几何上是从外在到内蕴，所用到的分析工具，也是从线性进化到非线性。我们还想来挖掘第五、六、八章里，使用分析工具时的一些特点。

有一大类问题，诸如正交参数系（包含正交曲率线网）的存在性，测地线的存在唯一性等，直接把几何问题化为微分方程的求解，唯一的困难只是微分方程求解起来非常困难。

还有一大类问题，诸如 Gauss 曲率为零的无脐点的曲面为可展曲面，判断两曲面能否建立保长映射等，一方面要使用已有的分析结论（比如正交曲率线网的存在性），另一方面，在此基础上，还要做一些微积分，线性代数的运算。

显然，尽管都要使用到分析工具，但这两类问题的画风完全不同。第一类问题对应“艰深”的分析，往往解决的是一些基础性，工具性的问题。第二类问题虽然用到的分析工具不难，但是往往要根据问题的特性，使用不同的工具甚至工具组合。我们可以用下面的图表来示意：



上层 (搭积木, 建筑学)

几何和分析之间的深刻关系

下层 (打地基, 土木工程)

后续第十, 十一章整体微分几何中问题的解决就更为复杂。在使用分析及其他工具得到局部的结论后, 往往需要依据直观, 因地制宜地对不同问题构建几何或者拓扑的框架, 再把局部的结论粘贴起来。

我还想着重谈一下第九章。这一章的内容, 也就是解析函数以及 Laplace 算子, 在后续复几何, 黎曼几何课程的学习中至关重要。当下国内已经出版的教材虽然对这部分内容有一定的涉及, 但是我觉得强调的还是不够, 所以单独把它们放在一章, 全面系统地来介绍。也许有些同学会产生这样的疑问, 既然后续的复几何和黎曼几何中, 也会学习复坐标, Laplace 算子这些内容, 为什么还要放在本科生的课程当中呢? 我的体会是这样的:

- 首先, 从保角映射引入等温参数系, 进而得到复坐标; 从测地线得到协变导数, 都是非常自然的过程, 并没有太大难度。而且等温参数系的存在性, 等价于一次复数值微分式的积分因子存在性, 和之前实数值微分式的积分因子存在性相对照, 可以大大加深我们对此类问题的理解。
- 其次, 研究生阶段直接引入复坐标, Laplace 算子理论上当然没有问题, 但是初学者很难明白其中的动机, 特别是对于复几何而言, 不弄清楚黎曼曲面上的结果的话, 不但不明白复几何的很多设定, 更不知道复几何要向哪个方向演进。

总之, 加上这些内容能更好地降低全周期 (从本科到研究生阶段) 的学习成本, 我也希望学有余力的同学能在这一章上多花一些时间和精力, 必然会得到事半功倍的效果。

## 第三部分

### 曲线和曲面的整体几何



从讲义的框架不难看出，第三部分就是要使用前面两部分的工具，来研究曲线和曲面的整体几何。这里有一个非常明显的转变，即从曲面的局部性质，转到曲面的整体性质。在由局部到整体的过程中，大家需要注意

- 整体微分几何研究手段的多样性，复杂性远超局部微分几何；而局部微分几何本质上和微分方程区别不大。两者完全不是一个层面的难度。
- 整体微分几何依然是建立在局部微分几何基础上的，特别是我们所推导的各种不变量，恰恰是由于这些不变量和坐标系的选取无关，才能保证这些局部的关系式，可以拼接成整体的结论。

前面两部分的内容中，我们采用的工具主要就是微分方程，线性、非线性的常微分方程或者是线性的偏微分方程。固然，对于大部分局部微分几何问题，这些工具都能帮我们解决。还有就是 Monge-Ampère 方程，虽然它是非线性偏微分方程，但是我们的研究仅限于退化齐次这种特殊类型，而这一类型的特殊 Monge-Ampère，某种意义上可以通过特征线来化简为特征线上的常微分方程，求解中并没有遇到太大的困难。然而第十章有一些问题，比如极小图的方程：

$$f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_{xy}f_x f_y + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0$$

它是拟线性的偏微分方程，非常难以求解。虽然理论上我们可以使用更复杂的数学框架来进行求解（这恰恰也是现在正在发生的事实），但是偏微分方程并非唯一的选项，我们还可以通过 Laplace 算子，解析函数等工具，更几何，更精巧地解决当中一部分问题。



## Chapter 10

# 利用 Laplace 算子和解析函数研究曲面的 外在整体几何

在这一章中，我们来研究常平均曲率曲面、极小曲面这些特殊曲面的整体性质。这里的曲面指的都是二维流形，而非第一和第二部分中的曲面片。主要用到的工具除了第二部分中的等温参数系，解析函数外，还需要用到所谓的 Laplace 算子这一非常重要的工具。

### 10.1 极小曲面

平均曲率处处为零的曲面称为极小曲面。为了和通常的曲面有所区别，我们在这一节中用  $\Sigma$  来表示极小曲面。假设有 Monge 形式的曲面  $\Sigma: \vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ ，根据第三章中的计算

$$2H = \frac{1}{(\sqrt{1+f_x^2+f_y^2})^3} (f_{xx}(1+f_y^2) - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}(1+f_x^2))$$

故  $\Sigma$  是极小曲面当且仅当

$$f_{xx}(1+f_y^2) - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}(1+f_x^2) = 0 \quad (10.1)$$

该方程也被称为极小曲面方程。直接求解这一非线性方程显然是不太现实的。可见，即便是这种相对简单的 Monge 形式的极小曲面，想通过偏微分方程的方法来研究也十分的困难。我们希望能够找到其他更简洁、更有效的方法。我们在前文中已经探讨过，任意一张

曲面上均存在等温参数系；同时，曲面上的内蕴的 Laplace 算子和等温参数系关系密切。我们确实可以使用这两种工具，从解析函数的视角来高效地研究极小曲面。

### 10.1.1 极小曲面的 Weierstrass 表示及其几何意义

设  $\Sigma$  是  $E^3$  中的极小曲面，取  $\Sigma$  的等温参数系  $(u, v)$ ，记此时的第一基本形式为

$$I = \lambda^2(du^2 + dv^2)$$

记  $z = u + iv$ ，设  $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$  是极小曲面  $\Sigma$  的位置向量，在第 9.3.2 小节中我们讨论了复标架场  $\{\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \bar{z}}, \vec{n}\}$  的性质： $(u, v)$  是等温参数系等价于

$$\left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right\rangle = 0 \quad (10.2)$$

这里  $\langle, \rangle$  是第一基本形式 (度量) 的复线性化。记<sup>1</sup>

$$2 \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} - i \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial u} - i \frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial u} - i \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial u} - i \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) \triangleq (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$$

代入(10.2)式中，有

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$$

这表明  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}$  至多只有两个自由度，我们可以找到更好的独立变量来标识它<sup>2</sup>。上式可以进一步改写为

$$(\varphi_1 + i\varphi_2)(\varphi_1 - i\varphi_2) = -\varphi_3^2 \quad (10.3)$$

现在注意到  $\Sigma$  是极小曲面，回忆命题 9.21，对于极小图  $\Sigma$  而言，其位置向量  $\vec{r} = (x, y, f(x, y))$  满足

$$\Delta_{\Sigma} \vec{r} = (\Delta_{\Sigma} x, \Delta_{\Sigma} y, \Delta_{\Sigma} f(x, y)) = \vec{0} \quad (10.4)$$

所以根据(10.4)式， $x_1, x_2, x_3$  是关于  $\Sigma$  上的 Laplace 算子  $\Delta_{\Sigma} = \frac{1}{\lambda^2}(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2})$  的调和函数。再由命题 9.18， $\varphi_k = \frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v}$ ， $k = 1, 2, 3$  是  $z = u + iv$  的解析函数。而我们知道，解析函数只有孤立的零点，故不妨设

$$\Phi = \varphi_1 - i\varphi_2, \quad \Psi = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2}$$

<sup>1</sup>有些教材中  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}$  前没有系数 2，所以会和我们的结论差一个倍数。

<sup>2</sup>直接用  $\varphi_3 = i\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}$  行不通，这是因为根号运算需要刨除支割线后才能解析，无法进行后续的路径积分。

这时,  $\Phi$  依然是一个全纯函数,  $\Psi$  是一个亚纯函数, 最多只有有限阶极点。再根据(10.3)式, 有

$$\varphi_1 + i\varphi_2 = -\Phi\Psi$$

联立上面的两组式子, 可以解出

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{1}{2}\Phi(1 - \Psi^2) \\ \varphi_2 &= \frac{i}{2}\Phi(1 + \Psi^2) \\ \varphi_3 &= \Phi\Psi\end{aligned}\tag{10.5}$$

又因为  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  都是全纯函数, 在单连通的邻域内积分与路径无关, 再结合  $\varphi_k = \frac{\partial x_k}{\partial u} - i\frac{\partial x_k}{\partial v}$  有

$$\begin{aligned}x_1 &= \operatorname{Re} \frac{1}{2} \int \Phi(1 - \Psi^2) dz \\ x_2 &= \operatorname{Re} \frac{i}{2} \int \Phi(1 + \Psi^2) dz \\ x_3 &= \operatorname{Re} \int \Phi\Psi dz\end{aligned}$$

上式称为极小曲面的 Weierstrass 表示。特别需要注意的是, 必须是极小曲面的 Weierstrass 表示才有意义, 因为没有极小性, 就没有  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  的解析性; 而解析函数的性质保证了

1.  $\Psi$  的定义有意义;
2. Weierstrass 表示中的积分和路径无关。

反过来看, 给定所谓的 Weierstrass 数据, 即全纯的函数  $\Phi$  和亚纯的函数  $\Psi$ , 或者满足限制条件  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$  的解析函数组  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ , 都可以通过求积分, 确定出  $x_1, x_2, x_3$ , 也就是  $\mathbb{R}^3$  中的极小曲面 (差一个平移)。现在我们通过一些例子来看如何借助 Weierstrass 数据来构造极小曲面。

例 10.1. 取  $\Phi = 1, \Psi = 0$ , 定义域为  $\mathbb{C}$ , 相应的极小曲面为平面。

例 10.2. 取  $\Phi = 1, \Psi = \frac{1}{z}$ , 定义域为  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ; 或取  $\Phi = -ie^z, \Psi = e^{-z}$ , 定义域为  $\mathbb{C}$ , 相应的极小曲面均为正螺旋面。

例 10.3. 取  $\Phi = i, \Psi = \frac{1}{z}$ , 定义域为  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ; 或取  $\Phi = e^z, \Psi = e^{-z}$ , 定义域为  $\mathbb{C}$ , 相应的极小曲面均为悬链面。

注意到看似不同的 Weierstrass 数据,可能会给出相同的极小曲面.更多的用 Weierstrass 表示具体极小曲面的例子,由于篇幅的限制,我们这里就不再展开了,感兴趣的同学可以参考<sup>[18]</sup>的 §10.2 小节,或<sup>[24]</sup>的 §10.2.4 小节.

有些同学一定会产生这样的疑问,从式子  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$  出发,还可以有其他不同的解析的方式来表示  $\varphi_k$ ,为何一定要使用 Weierstrass 表示呢?这是因为 Weierstrass 表示有着非常明确的几何意义.具体来看,已经知道

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} - i \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} + i \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)$$

于是

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} - i \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \times \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} + i \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) = \frac{i}{2} \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \frac{i}{2} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \vec{n} = \frac{i}{2} \lambda^2 \vec{n}$$

这里  $\vec{n}$  为曲面  $\Sigma$  的单位法向量.另一方面,根据(9.4)式有

$$\langle \vec{r}_z, \vec{r}_{\bar{z}} \rangle = \frac{\lambda^2}{2}$$

将  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \frac{1}{2}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ ,  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3)$  代入上式,并利用 Weierstrass 表示(10.5)式,有

$$\frac{1}{4} (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2) = \frac{1}{8} |\Phi|^2 (1 + |\Psi|^2)^2 = \frac{\lambda^2}{2} \quad (10.6)$$

于是

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \bar{z}} = \frac{i}{8} |\Phi|^2 (1 + |\Psi|^2)^2 \vec{n}$$

最后

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{4} (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \times (\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3) \\ &= \frac{1}{4} (\varphi_2 \bar{\varphi}_3 - \varphi_3 \bar{\varphi}_2, -\varphi_1 \bar{\varphi}_3 + \varphi_1 \bar{\varphi}_3, \varphi_1 \bar{\varphi}_2 - \varphi_2 \bar{\varphi}_1) \\ &= \frac{i}{8} |\Phi|^2 (1 + |\Psi|^2) (2\operatorname{Re}\Psi, 2\operatorname{Im}\Psi, 1 - |\Psi|^2) \end{aligned}$$

对比可得

$$\vec{n} = \left( \frac{2\operatorname{Re}\Psi}{1 + |\Psi|^2}, \frac{2\operatorname{Im}\Psi}{1 + |\Psi|^2}, \frac{1 - |\Psi|^2}{1 + |\Psi|^2} \right)$$

回忆球极投影的坐标关系

$$\left( \frac{2\operatorname{Re}z}{1 + |z|^2}, \frac{2\operatorname{Im}z}{1 + |z|^2}, \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} \right)$$

这告诉我们, 如果把  $\vec{n}(u, v)$  视为一个单位球面,  $\Psi: (u, v) \rightarrow \mathbb{C}$  就是从单位球面到复平面的球极投影。注意到  $\vec{n}(u, v)$  就是极小曲面  $\Sigma$  的 Gauss 映射, 这等价于

$$\Psi: \Sigma \xrightarrow{\mathcal{G}} S^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}$$

其中  $\mathcal{G}$  是曲面的 Gauss 映射,  $\pi$  是从单位球面到复平面的球极投影。换言之, Gauss 映射  $\mathcal{G}$  的值分布和亚纯函数  $\Psi$  的值分布是一致的, 我们可以利用  $\Psi$  作为亚纯函数的性质, 来研究 Gauss 映射  $\mathcal{G}$ , 进而得到极小曲面  $\Sigma$  本身的性质。由于这一部分用到复变函数论较深刻的内容, 我们就不展开了, 感兴趣的同学可以参考<sup>[18]</sup>中 §10.3 小节的内容。

理论上, 知道 Weierstrass 表示, 所有和曲面相关的量都可以求解出来。同时, 由于 Weierstrass 表示和曲面和曲面的几何非常的贴合, 会导致很多几何量在 Weierstrass 表示下会出人意料的简单。来看 Weierstrass 表示下曲面的 Gauss 曲率的求解。若记等温参数系  $(u, v)$  下的第一基本形式为  $I = \lambda^2(du^2 + dv^2)$ , 在上一小节用  $\Phi, \Psi$  重写复标架场  $\{\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \bar{z}}, \vec{n}\}$  理论的时候, 有(10.6)式, 这意味着

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}|\Phi|^2(1 + |\Psi|^2)^2$$

再根据复坐标下 Gauss 的方程(9.8)式, 有复坐标下 Gauss 曲率的表达式

$$K = -\frac{4(\ln \lambda)_{z\bar{z}}}{\lambda^2} = -\frac{2(\ln \lambda^2)_{z\bar{z}}}{\lambda^2}$$

于是

$$(\ln \lambda^2)_{z\bar{z}} = (\ln \frac{1}{4}|\Phi|^2(1 + |\Psi|^2)^2)_{z\bar{z}} = (\ln |\Phi|^2)_{z\bar{z}} + (\ln(1 + |\Psi|^2)^2)_{z\bar{z}}$$

而  $\Phi$  是调和函数, 根据命题9.19, 以及  $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$  和等温参数系下的 Laplace 算子  $\Delta_S$  仅仅相差  $\frac{4}{\lambda^2}$  倍, 自然有  $(\ln |\Phi|^2)_{z\bar{z}} = 0$ 。而

$$\begin{aligned} (\ln(1 + |\Psi|^2)^2)_{z\bar{z}} &= 2 \left( \frac{\frac{\partial(\Psi\bar{\Psi})}{\partial z}}{1 + |\Psi|^2} \right)_{\bar{z}} = 2 \left( \frac{\bar{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial z}}{1 + |\Psi|^2} \right)_{\bar{z}} \\ &= 2 \left( \frac{\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \Psi}{\partial z}}{1 + |\Psi|^2} - \frac{\bar{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Psi \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{z}}}{(1 + |\Psi|^2)^2} \right) \\ &= \frac{2|\frac{\partial \Psi}{\partial z}|^2}{(1 + |\Psi|^2)^2} \end{aligned}$$

全部都代入 Gauss 曲率表达式中得到

$$K = - \left( \frac{4|\frac{\partial \Psi}{\partial z}|}{|\Phi|(1 + |\Psi|^2)^2} \right)^2 \quad (10.7)$$

小节的最后, 我们总结一下所谓 Weierstrass 表示的内涵: 它看起来非常复杂, 真实的思想却很简单: 用独立的解析的变量, 把等温参数系下复标架场的内容重构了一遍。而这样做的好处也非常的明显: 可以借助于复变函数理论来研究极小曲面。我们也将将在下一小节利用 Weierstrass 表示来研究极小曲面。

### 10.1.2 极小图上的 Levy 变换和等温参数系

在第九章中, 我们提到了曲面上的等温参数系的存在性, 证明非常复杂, 超出了本书的范畴。其实, 极小曲面, 作为一种非常特殊的曲面, 其上存在一类特殊的等温参数系。这类等温参数系的存在是相对简明的一件事; 同时, 也可以利用这样的特殊等温参数系把极小曲面理论和单复变函数理论更好地联系起来。

如果整个曲面的方程都是由 Monge 形式给出的, 也就是说极小曲面是一个函数的图像, 则我们把这样的极小曲面称为极小图。前面已经说过, 极小图满足极小曲面方程(10.1)。既然无法直接求解极小曲面方程, 我们需要换一个角度。为了从(10.4)式, 也就是

$$\Delta_{\Sigma} \vec{r} = (\Delta_{\Sigma} x, \Delta_{\Sigma} y, \Delta_{\Sigma} f(x, y)) = \vec{0}$$

中得到更精确的信息, 我们需要极小图上的 Laplace 算子  $\Delta_{\Sigma}$  具体表达式。为了表达式能更简洁, 我们先引入一些记法, 记

$$p = f_x, \quad q = f_y, \quad r = f_{xx}, \quad s = f_{xy}, \quad t = f_{yy}$$

同时和之前的记法一致

$$g = |\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

对比

$$2H = \frac{1}{(\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2})^3} (f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_{xy}f_x f_y + f_{yy}(1 + f_x^2))$$

在现有的记号下

$$H = \frac{1}{2g^3} (r(1 + q^2) - 2spq + t(1 + p^2)) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{g} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{q}{g} \right) \right)$$

也就是说  $\Sigma$  是极小曲面当且仅当

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{g} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{q}{g} \right) = 0 \quad (10.8)$$

显然上式和极小曲面方程(10.1)是等价的。

回忆一般参数系下 Laplace 算子的表达式(9.13), 由于有

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+p^2 & pq \\ pq & 1+q^2 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} 1+q^2 & -pq \\ -pq & 1+p^2 \end{pmatrix}$$

于是对于曲面  $\Sigma$  上的任意函数  $F$ , Laplace 算子的表达式为

$$\Delta_{\Sigma} F = \frac{1}{g} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1+q^2}{g} F_x - \frac{pq}{g} F_y \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{pq}{g} F_x + \frac{1+p^2}{g} F_y \right) \right)$$

分别用函数  $x$  和  $y$  替换上式中的  $F$ , 并依据(10.4)式有<sup>1</sup>

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1+q^2}{g} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{pq}{g} \right) = 0 \quad (10.9)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{pq}{g} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1+p^2}{g} \right) = 0 \quad (10.10)$$

这两式可以看作极小图上对参数  $(x, y)$  自然的限制, 我们希望从它们出发, 构造出对  $(x, y)$  的特定的参数变换, 得到希望的等温参数系。

先来看(10.10)式, 它意味着线性偏微分方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi(x, y)}{\partial x} = \frac{1+p^2}{g} \\ \frac{\partial \xi(x, y)}{\partial y} = \frac{pq}{g} \end{cases}$$

满足相容性条件; 当参数  $(x, y)$  的定义域单连通时, 有解  $\xi(x, y)$ 。同样, (10.9)式意味着方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} = \frac{pq}{g} \\ \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial y} = \frac{1+q^2}{g} \end{cases}$$

有解  $\eta(x, y)$ 。进一步, 可以观察到  $\frac{\partial \xi(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} = \frac{pq}{g}$ , 这意味着方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = \xi(x, y) \\ \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = \eta(x, y) \end{cases} \quad (10.11)$$

<sup>1</sup>当然, 用函数  $f$  替换上式中  $F$ , 将得到(10.8)式; 读者可以验证, 直接由(10.8)式也可导出(10.9)和(10.10)式成立。

也满足相容性条件, 有解  $\varphi(x, y)$ 。这样的  $\varphi$  自然满足

$$\varphi_{xx} = \frac{1+p^2}{g}, \quad \varphi_{xy} = \varphi_{yx} = \frac{pq}{g}, \quad \varphi_{yy} = \frac{1+q^2}{g} \quad (10.12)$$

于是我们考虑参数变换

$$\begin{cases} u = x + \xi(x, y) \\ v = y + \eta(x, y) \end{cases} \quad (10.13)$$

注意到这一参数变换还可以写成

$$\begin{cases} u = x + \varphi_x(x, y) \\ v = y + \varphi_y(x, y) \end{cases}$$

这样形如  $Id + \nabla\varphi$  的变换也被称为函数  $\varphi$  决定的 Levy 变换。继续来看(10.13)这一特殊的 Levy 变换的性质。该 Levy 变换的 Jacobi 矩阵

$$J = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = Id + \begin{pmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{yx} & \varphi_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1+p^2}{g} & \frac{pq}{g} \\ \frac{pq}{g} & 1 + \frac{1+q^2}{g} \end{pmatrix}$$

不难发现矩阵  $\begin{pmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{yx} & \varphi_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+p^2}{g} & \frac{pq}{g} \\ \frac{pq}{g} & \frac{1+q^2}{g} \end{pmatrix}$  是一个正定矩阵, 故  $J$  也是正定的。进而这样的 Levy 变换是一个非退化的保持定向的正则参数变换,  $(u, v)$  是曲面  $\Sigma$  上新的参数系。此时

$$\begin{aligned} du &= dx + \xi_x dx + \xi_y dy = \left(1 + \frac{1+p^2}{g}\right) dx + \frac{pq}{g} dy \\ dv &= dy + \eta_x dx + \eta_y dy = \frac{pq}{g} dx + \left(1 + \frac{1+q^2}{g}\right) dy \end{aligned}$$

于是

$$du^2 + dv^2 = \left(\frac{1+g}{g}\right)^2 ((1+p^2)dx^2 + 2pq dx dy + (1+q^2)dy^2)$$

和函数图像初始的第一基本形式

$$I = (1 + f_x^2)dx^2 + 2f_x f_y dx dy + (1 + f_y^2)dy^2$$

式相对比, 有

$$I = \left(\frac{g}{1+g}\right)^2 (du^2 + dv^2)$$

这说明了  $(u, v)$  是极小图  $\Sigma$  上的等温参数系。

对于一般的极小曲面, 局部总是可以写成 Monge 形式, 也就是极小图。而极小图上根据 Levy 变换总是有等温参数系的, 也就是极小曲面上都存在局部等温参数系, 而且这些等温参数系很容易显式表达出来。

从更高的层面讲, 本来调和函数和解析函数的关系就是非常密切的, 因此, 从极小性(位置向量的分量函数都是调和函数) 导出极小曲面上的等温参数系(解析函数) 也是非常自然的一件事。

在下一小节使用这样的等温参数系来得到极小曲面更深入的性质之前, 我们先来证明全平面  $\mathbb{R}^2$  上的极小图的 Levy 变换的一个性质, 方便后续使用。

**引理 10.4.** 如果  $f$  是定义在全平面  $\mathbb{R}^2$  上极小曲面方程的解, 则相应的 Levy 变换  $L$  是  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  的 1-1 对应。

**证明.** 先来证明 Levy 变换是单射。局部上 Levy 变换是单的可以从 Levy 变换的 Jacobi 矩阵直接看出, 问题的核心是证明整体也是单射。证明的想法其实是说明 Levy 变换下任意两个不同点之间的距离都要大于两点原先的距离。具体来看, 设  $P_0 = (x_0, y_0), P_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ , 计算

$$\begin{aligned} \|L(P_1) - L(P_0)\|^2 &= (u(P_1) - u(P_0))^2 + (v(P_1) - v(P_0))^2 \\ &= ((x_1 - x_0) + \xi(x_1, y_1) - \xi(x_0, y_0))^2 + ((y_1 - y_0) + \eta(x_1, y_1) - \eta(x_0, y_0))^2 \\ &= (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 \\ &\quad + 2((x_1 - x_0)(\xi(x_1, y_1) - \xi(x_0, y_0)) + (y_1 - y_0)(\eta(x_1, y_1) - \eta(x_0, y_0))) \\ &\quad + (\xi(x_1, y_1) - \xi(x_0, y_0))^2 + (\eta(x_1, y_1) - \eta(x_0, y_0))^2 \end{aligned} \quad (10.14)$$

记

$$\gamma(t) = (1-t)P_0 + tP_1, \quad t \in [0, 1]$$

是连接这两点的直线段。考虑函数  $h(t) = \varphi \circ \gamma(t)$ , 其中  $\varphi$  是 Levy 变换中的函数, 由方程(10.11)决定。不难得到

$$h'(t) = (x_1 - x_0)\varphi_x(\gamma(t)) + (y_1 - y_0)\varphi_y(\gamma(t))$$

$$h''(t) = (x_1 - x_0)^2\varphi_{xx}(\gamma(t)) + 2(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)\varphi_{xy}(\gamma(t)) + (y_1 - y_0)^2\varphi_{yy}(\gamma(t))$$

之前已经计算过, 矩阵  $\begin{pmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{yx} & \varphi_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+p^2}{g} & \frac{pq}{g} \\ \frac{pq}{g} & \frac{1+q^2}{g} \end{pmatrix}$  是一个正定矩阵, 而  $h''(t)$  可以视为这个正定矩阵对应的二次型, 故是一个正定二次型, 这意味着  $h''(t) \geq 0$ , 从而有

$h'(1) \geq h'(0)$ 。另一方面

$$\begin{aligned} h'(1) - h'(0) &= ((x_1 - x_0)\varphi_x(P_1) + (y_1 - y_0)\varphi_y(P_1)) - ((x_1 - x_0)\varphi_x(P_0) + (y_1 - y_0)\varphi_y(P_0)) \\ &= (x_1 - x_0)(\xi(x_1, y_1) - \xi(x_0, y_0)) + (y_1 - y_0)(\eta(x_1, y_1) - \eta(x_0, y_0)) \end{aligned}$$

综合有

$$(x_1 - x_0)(\xi(x_1, y_1) - \xi(x_0, y_0)) + (y_1 - y_0)(\eta(x_1, y_1) - \eta(x_0, y_0)) \geq 0$$

代入(10.14)式中, 有

$$\|L(P_1) - L(P_0)\| \geq (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = \|P_1 - P_0\| \quad (10.15)$$

再来证 Levy 变换是满射。我们用反证法, 假设 Levy 变换不是满射, 像集为  $\mathbb{R} \setminus A$ ; 同时因为 Levy 变换的 Jacobi 非退化, 局部是同胚。将像集  $\mathbb{R} \setminus A$  中的一点和  $A$  中的一点用曲线  $\Gamma$  相连接, 由连续性方法, 必然存在一点  $Q \in \Gamma$ , 使得  $Q$  点的任何一个邻域都既和  $\mathbb{R} \setminus A$ , 也和  $A$  相交。再根据曲线  $\Gamma$  的任意性, 可导出集合  $A$  有边界, 不妨记为  $\partial A^1$ 。

接下来先取有限点  $Q \in \partial A$ , 再取点列  $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $Q_n \in \mathbb{R}^2 \setminus A$  以  $Q$  为极限点, 记这一点列在 Levy 变换下的原像为  $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $P_n \in \mathbb{R}^2$ 。我们断言点列  $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$  的聚点不能是一个有界的点。这是因为, 如果点列  $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$  的极限为固定点  $P$  (必要的话可以取收敛的子列), 则根据 Levy 变换  $L$  的连续性,  $L(P) = Q$ 。然而 Levy 变换  $L$  的 Jacobi 非退化, 局部是同胚, 必有小邻域  $U \ni P$ , 使得  $L(U) \ni Q$ , 这便和  $Q \in \partial A$  是一个边界点相矛盾。

这样, 我们有  $L(P_n) = Q_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \infty$ , 但像集  $\{Q_n\}$  的聚点  $Q$  是一个有限点。这和(10.15)式, 也就是 Levy 变换总是增加两点之间的距离相矛盾。  $\square$

这说明了对于全平面上的极小图, Levy 变换得到的参数  $(u, v)$  可以作为整体的参数系。

### 10.1.3 极小图的 Weierstrass 表示

回忆之前的内容, 大家需要特别注意的是, 所谓 Weierstrass 表示, 是对极小曲面上任何一个等温参数系都存在的。然而, 对于一般的极小曲面, 普通的等温参数系很难显

<sup>1</sup>严格地讲, 证明过程中只要有一点  $Q$  的邻域始终与像集和  $A$  都相交即可, 集合  $A$  是否有整体的边界并没有实质的作用, 我们引入边界点只是让证明的几何图景更清晰。

式得到, 进而也几乎无法具体地得到 Weierstrass 表示中  $\Phi$  和  $\Psi$  的形式。所以, 我们有必要限制在极小图的范畴内, 考虑由 Levy 变换所给出的特殊的等温参数系。这时, 不仅等温参数系可以显式写出,  $\Phi$  和  $\Psi$  这两个函数也可随之计算得到显式表达式, 为我们下一步的应用创造条件。

具体来看, 设  $\Sigma = \{x, y, f(x, y)\}$  是极小图,  $(u, v) = L(x, y)$  是 Levy 变换, 现在我们把等温参数系  $(u, v)$  下的 Weierstrass 表示具体写出。此时

$$\varphi_1 = x_u - ix_v, \quad \varphi_2 = y_u - iy_v, \quad \varphi_3 = f_u - if_v$$

先来求解  $x_u, x_v, y_u, y_v$ 。注意到 Levy 变换的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1+p^2}{g} & \frac{pq}{g} \\ \frac{pq}{g} & 1 + \frac{1+q^2}{g} \end{pmatrix}$$

于是它的逆  $J^{-1}$  为

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \frac{g}{(g+1)^2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1+q^2}{g} & -\frac{pq}{g} \\ -\frac{pq}{g} & 1 + \frac{1+p^2}{g} \end{pmatrix} = \frac{1}{(g+1)^2} \begin{pmatrix} g+1+q^2 & -pq \\ -pq & g+1+p^2 \end{pmatrix}$$

再来求解  $f_u, f_v$ 。根据求导的链式法则有

$$f_u = f_x x_u + f_y y_u = \frac{1}{(g+1)^2} ((p(g+1+q^2) - qpq) = \frac{p}{g+1}$$

$$f_v = f_x x_v + f_y y_v = \frac{1}{(g+1)^2} (-ppq + q(g+1+p^2)) = \frac{q}{g+1}$$

最终

$$\begin{aligned} \Phi &= \varphi_1 - i\varphi_2 = \frac{1}{(g+1)^2} ((g+1+q^2+ipg) - i(-pq - i(g+1+p^2))) \\ &= \frac{q^2 - p^2 + 2ipg}{(g+1)^2} = \left(\frac{q+ip}{g+1}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\Psi = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2} = \frac{\frac{p-iq}{g+1}}{\left(\frac{q+ip}{g+1}\right)^2} = \frac{g+1}{i(q+ip)}$$

细心的同学应该会发现此时  $\Phi$  和  $\Psi$  的形式非常接近<sup>1</sup>, 即  $\Phi\Psi^2 = -1$ 。出现这样的结果并不意外: 回忆公式  $\varphi_1 + i\varphi_2 = -\Phi\Psi^2$ , 而非常特别的, 对于极小图上由 Levy 变换

<sup>1</sup>注意  $\Psi$  还可以改写为如下形式

$$\Psi = \frac{(g+1)(g-1)}{(iq-p)(g-1)} = -\frac{g^2-1}{(p-iq)(g-1)} = \frac{(p^2+q^2)(p+iq)}{(p-iq)(p+iq)(1-g)} = \frac{p+iq}{1-g}$$

但这样的形式只是看起来简单, 对实际的运算没有帮助, 故我们不采用。

决定的等温参数系有

$$\varphi_1 + i\varphi_2 = x_u - ix_v + i(y_u - iy_v) = x_u + y_v = \frac{2 + 2g + p^2 + q^2}{(g+1)^2} = 1$$

恒成立。这意味着对于极小图而言,如果采用 Levy 变换决定的等温参数系,那么 Weierstrass 表示中  $\Phi$  和  $\Psi$  相互等价,实际上只需要处理其中的一个即可。换句话说,对于极小图这种特例,可以单独使用  $\Phi$  或者  $\Psi$ ,把10.1.1小节的全部内容重写一遍,同学们可以自行尝试,我们这里不再赘述,只挑选其中最关键的结论陈述一下:对于极小图,采用 Levy 变换决定的等温参数系,则  $\Phi$  是极小图上的解析函数,有

$$|\Phi| = \frac{p^2 + q^2}{g^2 + 2g + 1} = \frac{p^2 + q^2}{p^2 + q^2 + 2g + 2} < 1$$

而  $\Psi$  是极小图上的亚纯函数,有

$$|\Psi|^2 = \frac{g^2 + 2g + 1}{p^2 + q^2} = \frac{p^2 + q^2 + 2g + 2}{p^2 + q^2} > 1$$

### \*10.1.4 极小图上的 Bernstein 定理和 Heinz 估计

有了这些准备工作,证明下面的定理就是非常简单的一件事。

**定理 10.5 (Bernstein).** 设  $f(x, y)$  是定义在全平面  $\mathbb{R}^2$  上极小曲面方程的解,则  $f$  为线性函数。

**证明.** 做 Levy 变换  $(u, v) = L(x, y)$ , 并考虑等温参数系  $(u, v)$  下的 Weierstrass 表示。因为 Levy 变换是整体且 1-1 的,  $(u, v)$  也是整个  $\mathbb{R}^2$  上的参数。进而,更具之前的讨论,  $\Phi$  是整个复平面上的有界的解析函数,根据解析函数的 Liouville 定理,必有  $\Phi$  为常数。另一方面,

$$1 - |\Phi| = \frac{2g + 2}{2g + 2 + p^2 + q^2} = \frac{2g + 2}{g^2 + 2g + 1} = \frac{2}{g + 1}$$

也就说明了  $g$  是常数。再回到  $\Phi = \left(\frac{q+ip}{g+1}\right)^2$  的表达式中,这意味着  $q+ip$  也为常数。最后  $p = f_x, q = f_y$  也是常数,所以  $f$  是线性函数;换言之,此时的极小曲面是一张平面。□

- 实际上, 可以不使用 Weierstrass 表示, 直接来证明 Bernstein 定理, 参见附录L; 不过该方法和使用 Weierstrass 表示的证明并没有本质区别。或者说, 这类型的证明, 都源于 Jorgens 定理: 如果定义在整个  $\mathbb{R}^2$  平面上的函数  $\varphi(x, y)$  满足  $\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2 = 1^a$ , 且  $\varphi_{xx} \geq 0$ , 则  $\varphi_{xx}, \varphi_{yy}, \varphi_{xy}$  均为常数。
- 除了这样的证法, 陈省身先生还使用过 Gauss 曲率和次调和函数的性质来证明, 感兴趣的同学可以参考<sup>[18]</sup>。
- 不论哪种证法, 核心都是利用 Levy 变换把通常的参数系  $(x, y)$  换成等温参数系  $(u, v)$ , 一旦在等温参数系下, 就很容易转化成为调和函数或者解析函数的性质来证明。

<sup>a</sup>这也是 Monge-Ampère 方程的特殊情况。

我们还可以更细致地使用 Weierstrass 表示, 进而得到极小曲面更精细的性质。

**定理 10.6 (Heinz 估计).** 设  $f(x, y)$  是定义在圆盘  $B(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < r^2\}$  上极小曲面方程的解,  $P_0 = (0, 0, f(0, 0))$ , 则极小曲面  $\Sigma = (x, y, f(x, y))$  在  $P_0$  点处的 Gauss 曲率满足

$$|K(P_0)| \leq \frac{16}{r^2}$$

证明. 回忆 Weierstrass 表示下的 Gauss 曲率的表达式(10.7):

$$K = - \left( \frac{4 \left| \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|}{|\Phi|(1 + |\Psi|^2)^2} \right)^2$$

注意到对于极小图而言, 有  $\Phi\Psi^2 = -1$ 。理论上讲, 改写为  $\Phi$  或  $\Psi$  的单变量表达式都是可行的; 不过为了避免出现开根号这样相对复杂的表达式, 我们选择用  $\Psi$  表出  $\Phi$ , 于是上式变为

$$K = - \left( \frac{4|\Psi|^2 \left| \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|}{(1 + |\Psi|^2)^2} \right)^2$$

又因为此时  $\Psi$  是个亚纯函数, 且  $|\Psi| > 1$ , 为了方便处理, 令  $h = \frac{1}{\Psi}$ , 则  $h < 1$  是一个有界的全纯函数。进而 Gauss 曲率表达式可以改写为

$$K = - \left( \frac{4 \left| \frac{\partial h}{\partial z} \right|}{(1 + |h|^2)^2} \right)^2$$

$$\text{又 } |h|^2 = \frac{1}{|\Psi|^2} = \frac{p^2+q^2}{(g+1)^2},$$

$$1 + |h|^2 = \frac{g^2 + 2g + 1 + p^2 + q^2}{(g+1)^2} = \frac{2g^2 + 2g}{(g+1)^2} = 2 \frac{g}{g+1}$$

最终有

$$K = -\left|\frac{\partial h}{\partial z}\right|^2 \left(1 + \frac{1}{g}\right)^4 \quad (10.16)$$

要估计  $K$ , 只要估计  $\frac{\partial h}{\partial z} = h'(z)$  即可。由于  $|h| < 1$ ,  $h$  可以视为由  $B(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < r^2\}$  到复平面上单位圆盘  $D(1)$  的映射。到这里我们自然会想到条件相近的 Schwarz 引理:

**引理 10.7.** Schwarz 设  $D(1) = \{z : |z| < 1\}$  为复平面  $\mathbb{C}$  上的单位开圆盘,  $f: D(1) \rightarrow \mathbb{C}$  是全纯函数,  $|f(z)| \leq 1$  且  $f(0) = 0$ , 那么  $|f(z)| \leq |z|$  在  $D(1)$  上恒成立, 且  $f'(0) \leq 1$ 。此外, 如果  $|f(z_0)| = |z_0|$  对于某个  $z_0 \neq 0$  成立, 或者  $f'(0) = 1$ , 则都可以导出  $f(z) = az$ , 其中常数  $a$  满足  $|a| = 1$ , 即  $f$  是单位圆盘自身上的一个旋转。

要应用 Schwarz 引理, 第一个要解决的问题是  $B(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < r^2\}$  并非是复坐标  $z = u + iv$  下的圆盘。不妨设  $A = L(D(r))$  为 Levy 变换的像集, 同时  $L(0, 0) = P_0 = (u_0, v_0)$ 。我们已经知道 Levy 变换是将任意两点之间距离增大的变换, 故  $A$  必然包含以  $(u, v)$  为参数,  $P_0$  点为圆心, 半径为  $r$  的一个圆盘。再令  $\tilde{h}(z) = h(z + z_0)$ , 则  $\tilde{h}(z)$  必然在以  $z = 0$  为圆心, 半径为  $r$  的开圆盘  $D(r)$  上有定义。

第二个问题是此时的  $\tilde{h}$  在  $z = 0$  点处不为零。令  $\tilde{h}(0) = h(z_0) = c_0$ , 注意到  $c_0$  严格小于 1, 故可构造定义在闭圆盘  $D(1)$  上解析函数  $\frac{w-c_0}{1-\bar{c}_0 w}$ 。但是根据最大模原理, 该函数的模的最大值只能在单位圆盘的边界  $|w| = 1$  上取到, 而在边界上有

$$\left| \frac{w - c_0}{1 - \bar{c}_0 w} \right|^2 = \frac{|w - c_0|^2}{|1 - \bar{c}_0 w|^2} = \frac{|w|^2 + |c_0|^2 - c_0 \bar{w} - \bar{c}_0 w}{1 + |c_0|^2 |w|^2 - c_0 \bar{w} - \bar{c}_0 w} = \frac{1 + |c_0|^2 - c_0 \bar{w} - \bar{c}_0 w}{1 + |c_0|^2 - c_0 \bar{w} - \bar{c}_0 w} = 1$$

将  $w = \tilde{h}(rz)$  和函数  $\frac{w-c_0}{1-\bar{c}_0 w}$  复合, 最终得到

$$G(z) = \frac{\tilde{h}(rz) - c_0}{1 - \bar{c}_0 \tilde{h}(rz)}$$

根据之前讨论,  $G(z)$  满足 Schwarz 引理的条件, 因此得到  $|G'(0)| \leq 1$ 。然而

$$G'(0) = \frac{r}{1 - |c_0|^2} \tilde{h}'(0) = \frac{r}{1 - |c_0|^2} h'(z_0)$$

故

$$|h'(z_0)| = \frac{1 - |c_0|^2}{r} |G'(0)| \leq \frac{1}{r}$$

代入(10.16)式, 并注意到  $L(0, 0) = z_0$ , 有

$$|K(P_0)| \leq \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{1}{g(P_0)}\right)^4 \leq \frac{16}{r^2}$$

□

稍加分析后不难发现, Bernstein 定理实际上是 Heinz 估计的推论。具体来看, Heinz 估计说明了当极小图的半径越大时, 它的中心就越平坦。特别的, 如果极小图是定义在整个全平面上, 则可任取图上的一点, 并令  $r \rightarrow \infty$ , 根据 Heinz 估计, 可知这点处的 Gauss 曲率  $K = 0$ ; 然而极小图的  $H \equiv 0$ , 这说明该点的第二基本形式为零。最后根据点选取的任意性, 曲面上第二基本形式恒为零, 只能是平面。

虽然实际上并不需要如此复杂地证明 Bernstein 定理, 不过可见, 相比 Bernstein 定理, Heinz 估计更精细地刻画了极小图的平坦程度。

## 10.2 常平均曲率曲面

三维欧氏空间中, 平均曲率为常数的曲面称为常平均曲率曲面。平均曲率为零的曲面是极小曲面, 也就是说常平均曲面曲面是比极小曲面更广泛的一类对象。可想而知, 常平均曲率曲面并没有极小曲面那么好的性质, 但它和解析函数的关系依然非常密切。

### 10.2.1 常平均曲率曲面上的等温参数系

之前已经知道, 在任何一张曲面上局部都存在等温参数系, 在这一小节中, 我们的任务是研究常平均曲率曲面上等温参数系的特殊性, 具体来看, 也就是证明如下命题:

**命题 10.8.** 平均曲率为常数的曲面或者是平面, 或者是球面, 或者存在参数系  $(u, v)$ , 使得它的第一基本形式和第二基本形式能够表示成

$$\begin{aligned} I &= \lambda(du^2 + dv^2) \\ II &= (1 + \lambda H)du^2 - (1 - \lambda H)dv^2 \end{aligned}$$

其中  $H$  为曲面的平均曲率。

观察第一和第二基本形式，最大的特点是：既是正交曲率线网，又是等温参数系。而这两种参数系单独的存在性，在一定程度上都是可以保障的。关键是在平均曲率为常数的前提下，说明它们可以同时成立。

**思路一**，从正交曲率线网出发。已经知道，如果点点都是脐点，则曲面要么是平面，要么是球面。假定曲面某一点不是脐点，那么在这一点附近也非脐点。于是在局部存在正交曲率线网，使得

$$I = Edu^2 + Gdv^2$$

$$II = Ldu^2 + Ndv^2$$

此时  $H = \frac{1}{2}(\frac{L}{E} + \frac{N}{G})$ ，条件  $H$  为常数并不能直接用来说明结论（对  $H$  求偏导后式子很复杂），自然要考虑曲面天然自带的 Gauss-Codazzi 方程。回忆，正交曲率线网下的 Gauss-Codazzi 方程：

$$-\sqrt{EG} \left( \left( \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left( \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u \right) = LN$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v} &= H \frac{\partial E}{\partial v} \\ \frac{\partial N}{\partial u} &= H \frac{\partial G}{\partial u} \end{aligned}$$

自然考虑 Codazzi 方程。由于  $H$  为常数，Codazzi 方程中的第一个可以改写为

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial HE}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{L}{E} + \frac{N}{G} \right) E \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{2} \left( L + \frac{EN}{G} \right) \right)$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{LG - EN}{G} \right) = 0$$

同理，由 Codazzi 方程中的第二个，可得

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{LG - EN}{E} \right) = 0$$

至此，不妨令

$$\begin{aligned} \frac{LG - EN}{G} &= f(u) \\ \frac{LG - EN}{E} &= g(v) \end{aligned}$$

注意到如果此时  $LG - EN = 0$ , 则说明了第一和第二基本形式成比例, 和我们最初正交曲率线网存在的假设相矛盾。我们不妨假设  $LG - EN > 0$ , 对于小于零的情形, 可以重新选取参数, 调换  $u, v$  的位置, 类似讨论。此时,

$$\begin{aligned} I &= E du^2 + G dv^2 = \frac{EG}{LG - EN} \left( \frac{LG - EN}{G} du^2 + \frac{LG - EN}{E} dv^2 \right) \\ &= \frac{EG}{LG - EN} (f(u) du^2 + g(v) dv^2) \end{aligned}$$

可令  $\lambda = \frac{EG}{LG - EN}$ , 以及

$$d\tilde{u}^2 = f(u) du^2$$

$$d\tilde{v}^2 = g(v) dv^2$$

这样

$$I = \lambda(d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2)$$

实际上,

$$\lambda = \frac{1}{\frac{LG - EN}{EG}} = \frac{1}{\frac{L}{E} - \frac{N}{G}} = \frac{1}{\kappa_1 - \kappa_2}$$

再来看这时的第二基本形式。

$$\begin{aligned} II &= L du^2 + F dv^2 = L \frac{G}{LG - EN} d\tilde{u}^2 + N \frac{E}{LG - EN} d\tilde{v}^2 \\ &= \frac{EG}{LG - EN} \left( \frac{L}{E} d\tilde{u}^2 + \frac{N}{G} d\tilde{v}^2 \right) \\ &= \frac{EG}{LG - EN} \left( \left( H + \frac{1}{2} \left( \frac{L}{E} - \frac{N}{G} \right) \right) d\tilde{u}^2 + \left( H - \frac{1}{2} \left( \frac{L}{E} - \frac{N}{G} \right) \right) d\tilde{v}^2 \right) \\ &= \left( \lambda H + \frac{1}{2} \right) d\tilde{u}^2 + \left( \lambda H - \frac{1}{2} \right) d\tilde{v}^2 \end{aligned}$$

和结论的形式略有差异。不过这些差异完全没有实质的影响。只要令

$$\begin{aligned} d\hat{u}^2 &= \frac{1}{2} d\tilde{u}^2 \\ d\hat{v}^2 &= \frac{1}{2} d\tilde{v}^2 \end{aligned}$$

则有

$$I = 2\lambda(d\hat{u}^2 + d\hat{v}^2)$$

$$II = (2\lambda H + 1) d\hat{u}^2 + (2\lambda H - 1) d\hat{v}^2$$

将  $2\lambda$  视为  $\lambda$ , 得证。

我们事实上做了这样一件事: 利用正交曲率线网, 证明了平均曲率为常数的曲面上一定存在等温参数系。而一般曲面上等温参数系的存在性, 是非常难证明的。

同时也自然地引出思考: 既然可以从正交曲率线网出发证明等温参数系的存在, 那么有很大的可能, 也可以从等温参数系出发, 证明正交曲率线网的存在。

**思路二:** 局部取等温参数系, 有

$$I = \lambda(du^2 + dv^2)$$

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

此时,  $2H = \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2} = \frac{L+N}{\lambda}$ 。直接求导更为复杂, 根据经验, 使用 Codazzi 方程。先看第一个方程

$$\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial u} = -M\Gamma_{11}^1 - N\Gamma_{11}^2 + L\Gamma_{12}^1 + M\Gamma_{12}^2$$

再代入正交参数系下 Christoffel 记号的表达式,

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \\ \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{G} \frac{\partial E}{\partial v} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \\ \Gamma_{12}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial v} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u}\end{aligned}$$

有

$$\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{L+N}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v}$$

注意到  $2H = \frac{L+N}{\lambda}$  为常数,

$$\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\frac{L+N}{\lambda} \lambda)}{\partial v} = \frac{1}{2} \frac{\partial(L+N)}{\partial v}$$

即

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(L-N)}{\partial v} = \frac{\partial M}{\partial u}$$

同理, 另外一个 Codazzi 方程可以推出

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(L-N)}{\partial u} = -\frac{\partial M}{\partial v}$$

**这两个式子代表什么含义?** Cauchy-Riemann 方程! 即  $\frac{L-N}{2} - iM$  是一个关于  $z = u + iv$  的解析函数。而我们需要做的是说明  $M = 0$ , 或者选取一个新的坐标系, 使得  $M = 0$ 。显然, 仅仅由  $\frac{L-N}{2} - iM$  解析, 是没有办法推出  $M = 0$  的。所以, 接下来我们需要做的事情实际上变成了: 根据  $\frac{L-N}{2} - iM$  解析, 导出一个新的等温参数系, 使得新参数系下第二基本形式的交叉项消失。

根据定理9.15, 若已有  $(u, v)$  为等温参数系, 令  $z = u + iv$ , 考虑复函数  $w = f(z)$ , 其中  $w = \tilde{u} + i\tilde{v}$ 。则  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  也是等温参数系的充分必要条件为  $f(z)$  是一个一一的解析函数。这样寻找新的等温参数系就转化成了找解析函数。然而直接从复分析理论入手寻找满足条件的解析函数  $f(z)$ , 难度有些大。我们希望先从极端的简单情形入手, 找到思路后, 再拓广到一般情形。

已经知道, 一个解析函数, 根据最大模原理, 要么是常数, 要么局部是一个一一对应。

**情形 1**, 假设  $M \equiv 0$ , 根据解析性,  $\frac{L-N}{2}$  也是一个常数。如果  $L - N \equiv 0$ , 显然曲面是全脐曲面, 根据3.3.4小节中的讨论, 要么是平面, 要么是球面。如果  $L - N = c \neq 0$ , 其中  $c$  为常数。结合  $2H = \frac{L+N}{\lambda}$ , 可以解得  $L = \lambda H + \frac{c}{2}$ ,  $N = \lambda H + \frac{c}{2}$ , 做参数变换即得。

**情形 2**, 现在, 我们不妨假定函数  $\frac{L-N}{2} - iM$  是一个常数, 且  $M \neq 0$ 。如何将

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

中的交叉项消去呢? 回忆在解析几何化二次曲线为标准形中, 我们可以进行转角。同样都是二次型, 可令

$$\begin{cases} du = \cos \theta d\tilde{u} - \sin \theta d\tilde{v} \\ dv = \sin \theta d\tilde{u} + \cos \theta d\tilde{v} \end{cases} \quad (10.17)$$

其中,  $\text{ctg}2\theta = \frac{L-N}{2M}$ 。此时, 按照我们的假设,  $\text{ctg}2\theta$  是常数, 进而  $\theta$  是一个固定的值。(10.17) 必然可以成立。同时, (10.17) 是一个正交变换, 必然也保持第一基本形式的样子。从而问题回到了情形 1。

**情形 3**,  $\frac{L-N}{2} - iM$  不是常数。此时  $\text{ctg}2\theta = \frac{L-N}{2M}$  不是常值 (否则和 Cauchy-Riemann 方程矛盾), 即  $\theta$  是  $u, v$  的函数。此时与 (10.17) 式相等价的微分方程组

$$\begin{cases} d\tilde{u} = \cos \theta du + \sin \theta dv \\ d\tilde{v} = -\sin \theta du + \cos \theta dv \end{cases}$$

并不一定有解 (在正交参数系存在性中已经提到, 可以差倍数, 但不能恰好相等)。

如何在  $\frac{L-N}{2} - iM$  是一个非常值的解析函数的条件下, 找到合适的参数系, 就成为了解决问题的关键。即希望利用复变函数的知识来找方程组

$$\begin{cases} d\tilde{u} = \cos \theta du + \sin \theta dv \\ d\tilde{v} = -\sin \theta du + \cos \theta dv \end{cases}$$

的解(不一定有解, 但是可以差一个函数倍, 即积分因子)。记  $dz = du + idv$ ,  $d\tilde{z} = d\tilde{u} + id\tilde{v}$ , 则上述方程组可改写为复数形式:

$$d\tilde{z} = (\cos \theta - i \sin \theta) dz \quad (10.18)$$

其中

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{L-N}{2M}$$

$\theta$  和  $z$  的关系非常复杂, (10.18) 式无法直接求解。利用已有条件, 令  $g(z) = \frac{L-N}{2} - iM$ , 则  $g(z)$  解析。注意到

$$-\frac{L-N}{2M} = \operatorname{ctg} \operatorname{Arg}(g(z))$$

这里  $\operatorname{Arg}$  指代复数的辐角。于是  $2\theta = -\operatorname{Arg}(g(z))$ , 即  $\theta = -\frac{1}{2}\operatorname{Arg}(g(z))$ 。这意味着

$$\cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta} = e^{\frac{i}{2}\operatorname{Arg}(g(z))} = \frac{\sqrt{g(z)}}{\sqrt{|g(z)|}}$$

代入 (10.18), 有

$$d\tilde{z} = \frac{\sqrt{g(z)}}{\sqrt{|g(z)|}} dz$$

然而众所周知,  $|g(z)|$  并不是一个解析函数, 上述方程是不可能解的。

但是从另一方面来说, 我们也完全没有必要把自己局限在单位正交变换中, 是可以差一个积分因子的。可以考虑

$$d\tilde{z} = \sqrt{g(z)} dz \quad (10.19)$$

只要这一方程有解  $\tilde{z} = f(z)$ , 其中  $f$  解析, 那么

1. 第一基本形式会有变化, 但仍然是平面第一基本形式的函数倍;
2. 第二基本形式中的交叉项一样可以消去;
3. 用 (10.19) 式代替 (10.18) 式, 相当于用保角对应, 替换保长对应。

问题在于虽然  $g(z)$  是解析函数, 但是  $\sqrt{g(z)}$  并不是一个整体的解析函数。不过这对我们的问题没有本质的影响。这是因为, 我们在考虑函数  $\sqrt{g(z)}$  的解析分支的时候, 可以取  $\text{Arg}$  为  $\frac{\pi}{2}$  的割线。此时,  $M=0$ , 二次型已经对角化, 成为正交曲率线网。所以, 只需要在  $\sqrt{g(z)}$  的解析分支内考虑即可, 完全把它当做一个解析函数。由于解析函数在单连通区域中的线积分和路径无关, 故对  $d\tilde{z} = \sqrt{g(z)}dz$  积分, 得到  $\tilde{z} = f(z)$ , 仍然是解析函数。

现在换回实的坐标, 已知  $\text{Arg}(\sqrt{g(z)}) = -\theta$ , 故

$$\sqrt{g(z)} = (\cos \theta - i \sin \theta) \sqrt{|g(z)|}$$

代回到 (10.19), 有

$$d\tilde{z} = (\cos \theta - i \sin \theta) \sqrt{|g(z)|} dz$$

注意到  $|g(z)| = ((\frac{L-N}{2})^2 + M^2)^{\frac{1}{2}}$ , 并代入  $d\tilde{z} = d\tilde{u} + i d\tilde{v}$ ,  $dz = du + i dv$ , 意味着新的参数系  $(\tilde{u}, \tilde{v})$ , 使得

$$\begin{cases} d\tilde{u} = ((\frac{L-N}{2})^2 + M^2)^{\frac{1}{4}} (\cos \theta du + \sin \theta dv) \\ d\tilde{v} = ((\frac{L-N}{2})^2 + M^2)^{\frac{1}{4}} (-\sin \theta du + \cos \theta dv) \end{cases}$$

新的第一和第二基本形式变为:

$$I = \frac{\lambda}{\sqrt{(\frac{L-N}{2})^2 + M^2}} (d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2)$$

$$II = \frac{1}{\sqrt{(\frac{L-N}{2})^2 + M^2}} ((L + M \tan \theta) d\tilde{u}^2 + (N - M \tan \theta) d\tilde{v}^2)$$

这也回到了情形 1。至此命题得证。

不过, 虽然理论上没必要, 但是实际上我们可以直接把上述第二基本形式改写为题目所要求的样式。具体来看, 首先把第二基本形式改写为

$$\begin{aligned} II &= \frac{1}{\sqrt{(\frac{L-N}{2})^2 + M^2}} \\ &\left( \left( \frac{L+N}{2} + \frac{L-N}{2} + M \tan \theta \right) d\tilde{u}^2 + \left( \frac{L+N}{2} - \frac{L-N}{2} - M \tan \theta \right) d\tilde{v}^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\frac{L-N}{2})^2 + M^2}} \\ &\left( \left( \lambda H + \frac{L-N}{2} + M \tan \theta \right) d\tilde{u}^2 + \left( \lambda H - \left( \frac{L-N}{2} + M \tan \theta \right) \right) d\tilde{v}^2 \right) \end{aligned}$$

再来计算

$$\frac{\frac{L-N}{2}}{\sqrt{(\frac{L-N}{2})^2 + M^2}} + \frac{M}{\sqrt{(\frac{L-N}{2})^2 + M^2}} \tan \theta \quad (10.20)$$

注意到  $\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{L-N}{2M}$ , 于是

$$\frac{\frac{L-N}{2}}{\sqrt{(\frac{L-N}{2})^2 + M^2}} = \cos 2\theta, \quad \frac{M}{\sqrt{(\frac{L-N}{2})^2 + M^2}} = \sin 2\theta$$

最终 (10.20) 式可以写为

$$\begin{aligned} \cos 2\theta + \sin 2\theta \tan \theta &= 2 \cos^2 \theta - 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \tan \theta \\ &= 2 \cos^2 \theta - 1 + 2 \sin^2 \theta = 1 \end{aligned}$$

最终第二基本形式

$$II = \left( \frac{\lambda}{\sqrt{(\frac{L-N}{2})^2 + M^2}} H + 1 \right) d\tilde{u}^2 + \left( \frac{\lambda}{\sqrt{(\frac{L-N}{2})^2 + M^2}} H - 1 \right) d\tilde{v}^2$$

简而言之, 思路二的核心在于利用解析函数的性质, 来找微分方程组

$$\begin{cases} d\tilde{u} = \cos \theta du + \sin \theta dv \\ d\tilde{v} = -\sin \theta du + \cos \theta dv \end{cases}$$

的公共的积分因子  $((\frac{L-N}{2})^2 + M^2)^{\frac{1}{4}}$ 。相当于用保角对应替换保长对应。

我们可以看到, 虽然思路二远远比思路一复杂 (一方面本身等温参数系的存在性的证明就非常复杂, 另一方面假定等温参数系存在后, 推导的过程也非常复杂), 但是体现了解析函数理论在曲面上应用的广泛性。

## 10.2.2 Hopf 微分

在上一节命题10.8的处理中, 最关键的地方在于  $g(z) = \frac{L-N}{2} - iM$  是一个解析函数。其实这个解析函数大家并不陌生。我们在第9.3.2小节复标架场的运动方程中引入了复函数  $Q = -\langle \vec{n}_z, \vec{r}_z \rangle = \frac{L-N-2iM}{4}$ , 它和函数  $g(z)$  只差  $\frac{1}{2}$  倍。再注意到 Codazzi 方程  $Q_{\bar{z}} = \frac{\lambda^2}{2} H_z$ , 对于常平均曲率曲面,  $Q_{\bar{z}} = 0$ ,  $Q$  是解析函数, 与  $g(z)$  解析完全等价。可见,

复函数  $Q$  对研究空间中曲面的性质有极大的帮助, 我们有必要深入探讨。然而, 首先面临的一个问题就是  $Q$  和坐标系的选取有关, 是局部定义的。为此, 我们引入二次微分

$$\Omega = Q(dz)^2$$

称为曲面  $S$  的 Hopf 微分。接下来我们说明它和局部等温参数系的选取无关: 如果  $w = x + iy$  是另一个与  $z = u + iv$  定向一致的局部等温参数系, 设  $z = z(w)$  是他们之间的参数变换, 根据定理9.15,  $z$  是  $w$  的解析函数, 于是

$$-\langle \vec{n}_w, \vec{r}_w \rangle (dw)^2 = -\langle \vec{n}_z, \vec{r}_z \rangle \left( \frac{dz}{dw} \right)^2 (dw)^2 = -\langle \vec{n}_z, \vec{r}_z \rangle (dz)^2$$

从 Hopf 微分出发, 可以很容易地证明如下几个命题。

**命题 10.9.** 曲面是全脐的当且仅当它的 Hopf 微分  $\Omega \equiv 0$ 。

**证明.** 在已经选好等温参数系的前提下, 脐点意味着  $L = N$ ,  $M = 0$ , 而这恰恰等价于  $Q = 0$ 。□

**命题 10.10.** 曲面  $S$  的平均曲率是常数当且仅当它的 Hopf 微分是全纯二次微分。

**证明.** 注意到平均曲率  $H$  是实函数, 故  $H$  为常数的充分必要条件是  $H_z = 0$ 。再根据复形式的 Codazzi 方程(9.9), 此时  $Q_{\bar{z}} = 0$ ,  $Q$  是解析函数, 从而  $\Omega = Q(dz)^2$  是全纯二次微分。□

由于此时  $Q$  是解析函数, 再结合命题9.19, 不难得到

**推论 10.11.** 设  $S$  是  $E^3$  中的常平均曲率曲面, 在非脐点处, 有

$$\Delta_S \ln |Q|^2 = 0$$

即  $\ln |Q|^2$  是曲面上的调和函数。

由于在等温参数系下

$$K = \frac{1}{\lambda^4} (LN - M^2)$$

$$H = \frac{1}{2\lambda^2} (L + N)$$

而

$$|Q|^2 = \frac{(L - N)^2 + 4M^2}{16} = \frac{\lambda^4}{4} (H^2 - K)$$

于是

$$\Delta_S \ln(H^2 - K) = \Delta_S \ln\left(\frac{4}{\lambda^4}|Q|^2\right) = \Delta_S \ln \frac{4}{\lambda^4} + \Delta_S \ln |Q|^2 = -4\Delta_S \ln \lambda$$

再注意到复坐标下的 Gauss 方程(9.8), 同时利用 Laplace 算子在复坐标下的形式(9.11), 显然可以得到

推论 10.12. 设  $S$  是  $E^3$  中的常平均曲率曲面, 在非脐点处, 有

$$\Delta_S \ln(H^2 - K) = 4K$$

需要注意的是, 推论的左右两端和坐标系的选取是无关系的, 即使在非等温参数系下也成立。

### \*10.2.3 常平均曲率曲面的唯一性

本小节的最后, 我们来证明常平均曲率曲面的唯一性定理:

定理 10.13 (Hopf). 设  $\Sigma$  是  $E^3$  中闭的常平均曲率曲面, 如果  $\Sigma$  的亏格<sup>1</sup>为零, 则  $\Sigma$  一定是球面。

证明. 首先, 根据第三章的内容, 如果  $\Sigma$  是全脐的话, 那么它要么是球面, 要么是平面。而条件中已经知道曲面  $\Sigma$  的亏格为零, 那么就只能是球面。这样的话, 要证明  $\Sigma$  是球面, 只要说明  $\Sigma$  全脐。再根据命题 10.9, 这意味着我们需要说明  $\Sigma$  上的 Hopf 微分  $\Omega \equiv 0$ 。

证明  $\Sigma$  上的 Hopf 微分  $\Omega \equiv 0$  的想法比较特别, 需要用到复变函数中深刻的定理, Riemann 单值化定理 (也叫 Poincare-Koebe 单值化定理)。Riemann 单值化定理是指: 任意一个单连通的黎曼面都和三个标准黎曼面: 单位球面, 复平面, 单位圆盘, 中的一个共形等价。任何一个光滑曲面都可以视为黎曼面, 而  $\Sigma$  的亏格为零, 只能共形等价于单位球面<sup>2</sup>。

记单位球面为  $S^2$ ,  $\Sigma$  和  $S^2$  之间的共形等价映射为  $\sigma$ , 根据定理 9.15, 这样的  $\sigma$  在各自的等温参数系下是一个解析函数, 意味着  $\sigma$  把  $\Sigma$  上的全纯微分形式, 映为<sup>3</sup>  $S^2$  上的全纯微分形式。而  $\Sigma$  是常平均曲率曲面, 其上的 Hopf 微分  $\Omega$  已经是一个全纯微分形式,

<sup>1</sup>这是一个拓扑不变量。

<sup>2</sup>这时的单位球面是个内蕴的曲面, 并不一定要放置在  $E^3$  中。同时, 所谓共形等价, 就是存在保角对应。

<sup>3</sup>严格地讲, 是通过映射  $\sigma$  将微分形式拉回。

因此  $\Omega$  映射到  $S^2$  上, 也是  $S^2$  上的全纯微分形式, 不妨依然记作  $\Omega$ 。注意, 这个时候的  $\Omega$  并非  $S^2$  上的 Hopf 微分, 我们要从其他角度说明  $S^2$  上的二次微分形式  $\Omega$  为零。

我们真正要证明的是,  $S^2$  上所有的全纯二次微分形式均为零。根据第九章中保角映射的内容, 设  $\pi_1: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  和  $\pi_2: S^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  分别为从北极和南极出发的球极投影, 此时记两者对应的等温参数系分别为  $z = u + iv$  和  $w = x - iy$ , 它们都是  $S^2$  的局部等温参数系, 不难验证两者之间的变换关系为  $z = \frac{1}{w}$ 。

假设  $\Theta$  是  $S^2$  上任何一个全纯二次微分式, 在等温参数系  $z$  下,  $\Theta = P_1(z)(dz)^2$ ; 在等温参数系  $w$  下,  $\Theta = P_2(w)(dw)^2$ 。且  $P_1$  和  $P_2$  分别是  $z$  和  $w$  的全纯函数。利用  $w = \frac{1}{z}$  有

$$P_1(z)(dz)^2 = P_2(w)(dw)^2 = P_2\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}(dz)^2$$

从而

$$P_1(z) = \frac{P_2\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2}$$

进一步

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P_1(z) = P_2(0) \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2} = 0$$

由 Liouville 定理,  $P_1(z) \equiv 0$ , 从而全纯二次微分式  $\Theta \equiv 0$ 。微分式  $\Omega$  是  $S^2$  上一个特殊的全纯二次微分式, 也必然为零。□

除了 Hopf 定理外, 还有 Alexsandrov 定理也是描述常平均曲率曲面的唯一性的, 而且条件更宽松, 不需要亏格为零的限制。

**定理 10.14 (Alexsandrov).** 设  $\Sigma$  为  $E^3$  中的嵌入 (即没有自交点) 紧致曲面, 且平均曲率为常数, 则  $\Sigma$  是球面。

这一定理的证明, 需要理清曲面的 Laplace 算子  $\Delta_\Sigma$  与外围欧氏空间  $E^3$  上通常的 Laplace 算子  $\Delta$  之间的关系, 运算比较复杂, 我们这里不再展开, 感兴趣的同学可以参考 [18]。

## 本章注记

本讲义的最后一部分研究的是曲面曲面的整体性质, 其中本章研究的是曲面的外在整体性质。虽然我们这份讲义的逻辑是从外在局部到内蕴整体, 可这并不意味着外在几何性质就不重要。一方面, 极小曲面在现实中有着直接的物理背景, 如给定边界形成的

肥皂泡（面积极小，Plateau 问题）；另一方面，极小曲面也可以用在研究更高维黎曼流形的内蕴性质中。

一般而言，极小曲面和常平均曲率曲面，抑或更高维的极小子流形和常平均曲率子流形，主要的研究工具是非线性偏微分方程，自然是有非常高的难度，我们这样一门初等的课程并不适合涉猎这类问题。之所以添加这一章，根本原因是，对于三维欧式空间中的极小曲面和常平均曲率曲面，除了核心的非线性偏微分方程方法外，由于恰好是曲面，可以利用等温参数系以及 Laplace 算子，这些相对简单的工具，来研究曲面的性质。相当于是第九章知识的应用。

当然，极小曲面和常平均曲率曲面的理论是非常庞杂的，我们这里只能选择最简单的一小部分内容来展示。更多的内容感兴趣的同学可以参阅<sup>[18]</sup>的第九章和第十章，及其所列的参考文献，高维欧氏空间中的极小超曲面和子流形可以参考<sup>[25]</sup>，更一般的黎曼流形中的极小子流形，可以参考<sup>[6]</sup>。

此外，正常按照由内在到外在的次序的话，理应先讲下一张曲线和曲面的内在整体几何。然而，由于本章的研究内容大量用到 Laplace 算子和等温参数系这些工具，所以我们把这一部分内容放在前面，紧接着 Laplace 算子和等温参数系，这样内容更为顺畅。

# Chapter 11

## 曲线和曲面的内蕴整体几何选讲

为了让课程的受众尽可能广泛，我们选取内容的难度已经尽可能的降低，把主要篇幅都放在了曲线和曲面的局部理论上。

学习过前面的内容后，同学们其实应该能够感受到：微分几何的局部理论，不能和微积分，微分方程完全等价，因为确实还需要一定的几何直观，也要用到一些线性代数的工具；但是差别非常有限。

究其原因，也很容易理解，局部上的“几何”，总归是简单的。局部微分几何理论，只是基础和入门。最终的目的，依然是整体微分几何，这才是我们的星辰大海。

整体微分几何的研究思路，技术手段，和局部微分几何往往大相径庭。我们希望借助这一部分不长的篇幅，能够管中窥豹，给大家展示一下整体微分几何研究的对象和方法。

### 11.1 平面上简单闭曲线的整体性质

我们先引入若干概念：

**定义 11.1.** 如果  $\vec{r}(s)$  是  $E^2$  上的一条连续可微曲线， $a \leq s \leq b$ ，并且有  $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ ， $\vec{r}'(a) = \vec{r}'(b)$ ，则称它为连续可微闭曲线。

**定义 11.2.** 如果  $\vec{r}(s)$  是  $E^2$  上的一条闭曲线， $a \leq s \leq b$ ，并且对于任意的  $a \leq s_1 < s_2 \leq b$  都有  $\vec{r}(s_1) \neq \vec{r}(s_2)$ ，则称它为简单闭曲线。

### 11.1.1 等周不等式

平面曲线的等周问题是：在给定周长的所有简单闭曲线中，什么样的曲线所围成的面积最大？这是一个非常古老的问题，古希腊人已经给出答案是圆，但第一个严格的证明是由 Weierstrass 在 1870 年给出的（等周问题的历史和各种不同的证明方法，可以参考<sup>[26-27]</sup>），即有

**定理 11.3.** 设平面上的简单闭曲线  $C$  的长度为  $L$ ， $C$  所围成的曲面的面积为  $A$ ，则有

$$L^2 - 4\pi A \geq 0$$

其中等号成立当且仅当  $C$  是一个圆。

我们在这里介绍由 Hurwitz 在 1901 年给出的证明<sup>1</sup>，主要用到的工具是 Green 公式以及如下的

**命题 11.4 (Wirtinger 不等式).** 如果  $f \in C^\infty[0, 2\pi]$ ，那么

$$\int_0^{2\pi} [f'(t)]^2 dt \geq \int_0^{2\pi} [f(t) - \bar{f}]^2 dt$$

这里  $\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$  是  $f$  的平均值。且等号成立当且仅当  $f(t) = a \cos t + b \sin t + c$ ， $a, b, c$  都是常数。

篇幅所限，默认 Wirtinger 不等式已成立。来看定理的具体证明：设在平面直角坐标系下曲线  $C$  的参数方程为  $x(s), y(s)$ ， $s$  为弧长参数，且  $s \in [0, L]$ 。做参数变换  $t = \frac{2\pi}{L}s$ ，于是

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}$$

进而

$$\int_0^{2\pi} \left[ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right] dt = \frac{L^2}{2\pi}$$

设  $C$  所围成的区域为  $D$ ，其面积记为  $A$ 。根据 Green 公式

$$\int_C x dy = \iint_D \frac{\partial x}{\partial x} dx dy = A$$

<sup>1</sup>Hurwitz 并没有直接使用 Wirtinger 不等式，而是用了更基本的 Fourier 展开式和 Parseval 定理

另一方面,

$$\int_C x dy = \int_0^{2\pi} x(t) \frac{dy}{dt} dt = \int_0^{2\pi} (x(t) - \bar{x}) \frac{dy}{dt} dt + \bar{x} \int_0^{2\pi} \frac{dy}{dt} dt = \int_0^{2\pi} (x(t) - \bar{x}) \frac{dy}{dt} dt$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{4\pi} - A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 - 2(x(t) - \bar{x}) \frac{dy}{dt} \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - (x(t) - \bar{x})^2 + \left( \frac{dy}{dt} - (x(t) - \bar{x}) \right)^2 \right] dt \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - (x(t) - \bar{x})^2 \right] dt \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (11.1)$$

最后一个不等号我们使用了 Wirtinger 不等式。特别地, 当  $\frac{L^2}{4\pi} - A = 0$  时, 一方面根据 Wirtinger 不等式等号成立的条件, 有  $x(t) = a \cos t + b \sin t + c$ 。另一方面, 不等式 (11.1) 中的倒数第二个不等号成为等号, 需要

$$\frac{dy}{dt} - (x(t) - \bar{x}) = 0$$

即

$$\frac{dy}{dt} = a \cos t + b \sin t$$

从而

$$y(t) = a \sin t - b \cos t + \tilde{c}$$

于是平面曲线  $C$  必为圆。定理 11.3 得证。

### 11.1.2 Hopf 旋转指标定理

我们在第一章中引入了曲线的切向幅角, 即曲线的单位切向量与  $x$  轴正向的夹角。对于连续可微的闭曲线  $C$ , 它的单位切向量绕曲线旋转一周回到起点时与初始的单位切向量重合, 因此  $\theta(b) - \theta(a)$  是  $2\pi$  的整数倍。

**定义 11.5.** 记  $i(C) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a))$  为连续可微闭曲线  $C$  的旋转指标。

**定理 11.6 (Hopf's Umlaufsatz).** 连续可微的简单闭曲线  $C$  的旋转指标  $i(C) = \pm 1$ 。

图 11.1: 螺旋

这暗示我们闭曲线旋转指标在某种意义上是一个拓扑不变量, 和曲线具体的形状无关。直观上看起来, 这一定理显然是成立的。我们头脑中可以想象这样一幅图像:

- 如果  $C$  是圆, 则  $i = 1$  或者  $-1$ , 正负取决于曲线  $C$  参数化的方向。
- 如果  $C$  是简单闭曲线, 则  $C$  可以光滑地变形为圆<sup>1</sup>, 且在变形的过程中, 旋转指标  $i$  也是连续地变化的。但  $i$  是一个整数, 只能保持不变, 故任意简单闭曲线的旋转指标均为  $\pm 1$ 。

然而, 由于可能会出现如下类似“蚊香”形状的曲线, 想要严格证明这一事实远比想象的要困难。

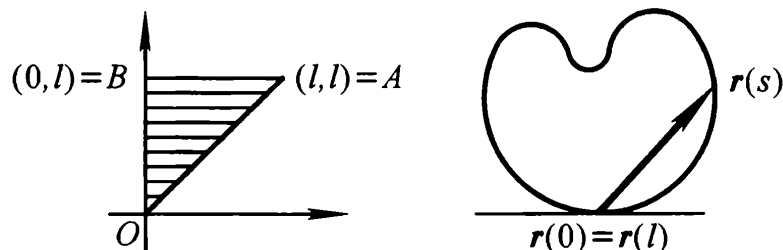
接下来, 我们介绍 Hopf 的旋转指标定理的初等证明方法。其最核心内容是构造曲线的弦映射, 一方面用弦的转角来控制曲线切向量旋转的幅度, 另一方面, 使得移动从原点出发弦的终点, 或者移动指向原点的弦的起点, 弦的转角都为  $\pi$ , 那么总的转角为  $\pm 2\pi$ 。简便起见, 我们假定曲线  $C$  的定向都是逆时针正向, 也就是切向辐角总体是增加的。具体来看:

第一步, 构造弦映射。首先需要在曲线  $C$  上取一个合适的起点。由于闭曲线是紧致的, 必然可以找到曲线上的一点, 使得整个曲线完全落在这点切线的一侧。换言之, 这条切线与整个曲线  $C$  的交点有且只有一个。不失一般性, 假设这条切线为  $x$  轴, 切点为原点  $O$ 。以这一点  $O$  为起点重新使用弧长参数化曲线, 得到  $\vec{r}(s)$ ,  $s \in [0, L]$ 。令  $\Delta = \{(s_1, s_2) | 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq L\}$  为三角形区域, 定义弦映射  $\Phi: \Delta \rightarrow S^1$  如下

$$\Phi(s_1, s_2) = \begin{cases} \frac{\vec{r}(s_2) - \vec{r}(s_1)}{|\vec{r}(s_2) - \vec{r}(s_1)|} & 0 < s_2 - s_1 < L; \\ \vec{r}'(s) (= \vec{\alpha}(s)) & s_1 = s_2 = s; \\ -\vec{r}'(0) (= -\vec{\alpha}(0)) & s_1 = 0, s_2 = L. \end{cases}$$

显然  $\Phi$  在  $\Delta$  内部是光滑的, 且在  $\Delta$  的边界上连续。需要注意的是, 定义弦映射时, 我们用到了简单闭曲线没有自交点这一性质, 否则在  $0 < s_2 - s_1 < L$  这一情形中分母可能变为零。

<sup>1</sup>这其实是同伦的基本想法



第二步, 通过弦映射, 引入弦的旋转指标。现在考虑三角形区域  $\Delta$  上从  $(0,0)$  点到  $(L,L)$  点的全部连续路径。其中, 沿直角三角形斜边的路径记为  $\gamma_0$ , 沿两条直角边的路径记为  $\gamma_1$ 。不难设想, 中间有一系列连续的路径  $\gamma_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , 从  $\gamma_0$  变到  $\gamma_1$ 。

再考虑函数  $\Phi$  在  $\gamma_t$  上的限制, 记  $\Phi_t = \Phi|_{\gamma_t}$ , 则  $\Phi_t: I_t \rightarrow S^1$ , 这里  $I_t$  可以视为  $\mathbb{R}$  上的一段闭区间。与引理2.10类似, 可以取到连续可微函数  $\theta_t: I_t \rightarrow \mathbb{R}$ , 使得  $\Phi_t = (\cos \theta_t, \sin \theta_t)$ 。定义沿路径  $\gamma$  的度为  $D(\gamma_t) = \frac{\theta_t|(L,L) - \theta_t|(0,0)}{2\pi}$ 。直观上看,  $D$  即为相应弦的“旋转指标”。

一方面, 不论选取那条路径,  $(0,0)$  点和  $(L,L)$  点处曲线的切线都是相同的, 也就是弦或者切线方向角的变化必然是  $2\pi$  的整数倍, 这意味着映射  $D$  的值必须是整数。另一方面, 路径  $\gamma_t$  以及函数  $\Phi$  都是连续变化的,  $D(\gamma_t)$  关于  $t$  也必须是连续的。综合两者,  $D$  的值必为常数。

第三步, 用弦映射表示曲线切向幅角的变化, 并用弦的转角控制切向幅角的变化。注意到  $\theta_0$  就是我们在引理2.10中所构造的函数  $\theta$ , 从而  $D(\gamma_0)$  就是简单闭曲线  $C$  的旋转指标  $i(C)$ 。接下来我们再来研究  $D(\gamma_1)$ , 这一步最为关键。 $\gamma_1$  可以分为竖直和水平的两部分, 分开考虑。在竖直的线段上, 我们需要考察的是弦映射  $\Phi(0,s)$ , 它表示的是从  $O$  点出发的单位切向量或者弦。 $s=0$  的初始时刻  $\Phi(0,0) = \vec{\alpha}(0)$ , 切向幅角为  $0$ ;  $s=L$  的终结时刻  $\Phi(0,L) = -\vec{\alpha}(0)$ , 切向幅角为  $\pi$ 。期间, 弦的终点都在切线  $x$  轴的上侧摆动, 从而切向幅角的增加量必然为  $\pi$ 。

类似地, 在水平的线段上, 考察弦映射  $\Phi(s,L)$ , 它表示的是终点为  $O$  的单位切向量或者弦。同样由于此时弦的起点全都落在切线  $x$  轴的上侧, 意味着向量起点平移至原点, 向量在  $x$  轴下侧转动。这意味着过程中切向幅角依然是增加的, 也为  $\pi$ 。从而沿着  $\gamma_1$ ,  $D(\gamma_1) = 1$ 。

综合  $D$  是一个常数, 我们知道  $D(\gamma_0) = 1$  也成立, 故曲线  $C$  的旋转指标为  $1$ 。曲线定向顺时针负向时讨论完全相同。Hopf 的旋转指标定理就证明好了。

Hopf 旋转指标定理还有另外一种证法, 仍然在弦映射的框架下, 但是构造好弦映射  $\Phi: \Delta \rightarrow S^1$  后, 由于  $\Delta$  是一个单连通区域, 根据映射提升定理 (需要同伦等概念作为基础, 参见<sup>[11]</sup>, 定理 5.3), 可以构造连续函数  $\phi(s_1, s_2)$ , 使得

$$\Phi(s_1, s_2) = (\cos \phi(s_1, s_2), \sin \phi(s_1, s_2)).$$

再令  $\theta(s) = \phi(s, s)$ , 根据函数  $\Phi$  和  $\phi$  的选取,  $\theta$  就是满足 (2.9) 的连续可微函数。同时由于  $\phi(s_1, s_2)$  是连续的,

$$\theta(L) - \theta(0) = \phi(L, L) - \phi(0, 0) = (\phi(L, L) - \phi(0, L)) + (\phi(0, L) - \phi(0, 0))$$

剩下的讨论和之前弦映射方法是一样的。

回忆第一部分平面曲线内容中的 (2.11) 式, 有

$$\theta(b) - \theta(a) = \int_a^b k_r(s) ds$$

从而

$$\int_a^b k_r(s) ds = \pm 2\pi$$

即简单闭曲线的总相对曲率为  $\pm 2\pi$ , 其中正负号取决于参数选取的定向。

Hopf 旋转指标定理可以推广到分段光滑的简单闭曲线上, 假设  $C$  是定向为正的, 分段光滑的简单闭曲线  $\vec{r}: [0, L] \rightarrow E^2$ ,  $\alpha_i$  为分段处的外角, 则有

**定理 11.7 (推广了的 Hopf's Umlaufsatz).**

$$\int_0^L \kappa_r(s) ds + \sum_i \alpha_i = 2\pi$$

该定理可以视为后续 Gauss-Bonnet 公式的特例, 我们这里就不给出具体证明了。感兴趣的同学可以参考<sup>[24]</sup>。我们想指出的是这里使用外角  $\alpha_i$  是自然的, 因为曲线有定向, 沿着定向, 在分段处辐角的变化量就是该点处的外角。

更多关于平面曲线的性质及其证明, 请参考<sup>[24,28]</sup>。

## 11.2 曲面的内蕴整体性质

### 11.2.1 Gauss-Bonnet 公式的局部初探

通过之前的学习可以看出, Gauss 绝妙定理实际上给我们开启了内蕴几何研究的大门: 研究只具有第一基本形式的一张抽象曲面, 而不是放在  $E^3$  中的一张具体曲面。换句

话说，我们考虑的所谓“曲面”，其实是下列一个正定的二次微分形式：

$$ds^2 = E(du)^2 + 2Fdu dv + G(dv)^2$$

也称为该抽象曲面上的度量形式。尽管它并非真实可见的一张曲面，但依然可以计算其上曲线的长度，夹角，区域的面积等几何量。比如说，两条曲线在交点  $(u, v)$  处的切向量分别为  $(du, dv)$ ,  $(\delta u, \delta v)$ ，则其夹角  $\theta$  的余弦可以表示如下

$$\cos \theta = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{E(du)^2 + 2Fdu dv + G(dv)^2} \sqrt{E(\delta u)^2 + 2F\delta u \delta v + G(\delta v)^2}}$$

曲面长度，区域面积之类的计算就不再赘述。总之，在抽象的曲面上仍然有足够丰富的几何学可以研究。

现在我们来研究内蕴几何中涉及角度的一个问题。已经知道如下两个事实

- 平面上三角形三个内角和为  $180^\circ$ ；
- 曲面上的测地线相当于平面上的直线，可以构造曲面上的测地三角形。

自然的问题：**曲面上测地三角形的内角和是多少？**我们从最简单的单位球面来寻找思路。单位球面的 Gauss 曲率为 1，是常曲率曲面。其上的测地线都是大圆的一部分。不难计算出单位球面上测地三角形的内角和大于  $180^\circ$ 。

这一结果和  $K \equiv 0$  的欧氏空间有很大的区别。可以猜测，内角和与曲面的内蕴几何量 Gauss 曲率相关。实际上，这就是所谓的 Gauss-Bonnet 公式：

**定理 11.8.** 曲线  $C$  是有向曲面  $S$  上的一条由  $n$  段光滑曲线组成的简单闭曲线，它所包围的区域  $D$  是曲面  $S$  的一个单连通区域，则

$$\oint_C \kappa_g ds + \iint_D K d\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad (11.2)$$

其中  $\kappa_g$  是曲线  $C$  的测地曲率， $K$  是曲面的 Gauss 曲率， $d\sigma$  是面积元， $\alpha_i$  表示曲线  $C$  在角点  $s_i$  处的外角。

很容易看出，当 Gauss-Bonnet 公式用于平坦的欧氏空间，就得到了定理 11.7，推广了的 Hopf 旋转指标定理。

我们简述 Gauss-Bonnet 公式的证明思路。因为这里涉及到了曲线之间的夹角，自然会考虑曲线切向量的转角，也就是测地曲率的 Liouville 公式。为了简单起见，不妨假定在单连通区域上已经取好正交参数系，于是：

$$\kappa_g = \frac{d\theta(s)}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( E_v \frac{du}{ds} - G_u \frac{dv}{ds} \right)$$

熟悉微积分的同学一眼就可以看出,大致上,只要对公式左右两端同时关于简单闭曲线进行积分,  $\oint_C \frac{d\theta(s)}{ds} ds$  就是右端的  $2\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i$ , 而

$$\oint_C \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( E_v \frac{du}{ds} - G_u \frac{dv}{ds} \right) ds = \oint_C \frac{1}{2\sqrt{EG}} (E_v du - G_u dv)$$

对于分段光滑闭曲线,依然可以使用 Green 公式,将第二类曲线积分转化为所围区域的二重积分:

$$-\frac{1}{2} \iint_D \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u + \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v du dv$$

注意到空间曲面的面积元实际上为  $d\sigma = \sqrt{EG} du dv$ , 上式即为

$$\iint_D -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left( \left( \frac{\sqrt{E_v}}{\sqrt{G}} \right)_v + \left( \frac{\sqrt{G_u}}{\sqrt{E}} \right)_u \right) d\sigma$$

最后,由于正交参数系下

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left( \left( \frac{\sqrt{E_v}}{\sqrt{G}} \right)_v + \left( \frac{\sqrt{G_u}}{\sqrt{E}} \right)_u \right)$$

移项后即是左端的  $\iint_D K d\sigma$ 。

这样的思路大方向是没有问题的,具体操作起来,很快就会遇到如下之前没有遇到过的问题:我们的证明思路依赖于 Liouville 公式, Liouville 公式存在的前提是取了正交参数系。但是不要忘记,正交参数系的存在是局部的,一个正交参数系,并不一定可以覆盖整个闭曲线所围成的区域,也就是上述理想情形下的证明思路只能适用于“局部”的三角形(落在正交参数系存在的邻域内)。这也是为什么我们这一小节的标题取为“Gauss-Bonnet 公式的局部探究”。那究竟如何证明在单连通区域上 Gauss-Bonnet 公式是整体成立的?

有些同学会说: Liouville 公式依赖正交参数系,我们可以换一个不依赖于正交参数系的公式。不过这样的公式需要用到活动标架法这一高级的工具,并不在我们这本讲义探讨的范围(参见<sup>[18]</sup>,第 5.5 小节)。

也许也有同学会说:那也没关系,可以先限制在局部进行讨论,再把每个小邻域内的结果拼接起来不就可以了。

这样讲当然不能算错,而且这样的思路恰恰是整体微分几何最核心的套路;只是中间有非常多的细节需要补充,下一小节,我们便依照这一思路介绍 Gauss-Bonnet 公式的完整证明。

### 11.2.2 单连通区域上的 Gauss-Bonnet 公式的证明思路

这里的单连通区域,指的是曲面上的一片同胚与二维开圆盘的区域,简单的理解就是区域中间没有“开孔”。拓扑上看单连通区域是平凡的,但是几何上不一定,因为在度量的意义下,这个单连通区域可以“很大”,以至于无法用一个整体的正交参数系覆盖。

很自然,如果曲线  $C$  所围的区域  $D$  不能包含在曲面  $S$  的一个具有正交参数系的坐标邻域内,我们可以用分段光滑的曲线将区域  $D$  分割成有限个单连通的小区域,使得

- 每一个小区域都落在  $S$  的某个具有正交参数系的坐标域中;
- 每一个小区域的边界仍然为一条简单闭曲线,同时,可以要求任意两个相邻的小区域都有一段光滑的边界完全重合。

于是(11.2)式在每个小区域上成立。我们将每个小区域上的公式做和,希望最终可以得到整个区域上的 Gauss-Bonnet 公式。但为了论述简单,我们只考虑两个小区域  $D_1$  和  $D_2$  组合的情形,更多数量区域组合的情况,可以类似论证。

记  $C_1$  和  $C_2$  分别为  $D_1$  和  $D_2$  的边界,有光滑曲线段  $C = C_1 \cap C_2$  作为公共的边界。由于  $D_1$  和  $D_2$  各自落在某个正交参数坐标邻域内,同时注意到  $K$  和  $\kappa$  和选取的参数系无关,于是有

$$\oint_{C_1} \kappa_g ds + \iint_{D_1} K d\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i$$

以及

$$\oint_{C_2} \kappa_g ds + \iint_{D_2} K d\sigma = 2\pi - \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j$$

首先,  $D_1$  和  $D_2$  有相同的定向,于是曲线段  $C$  在两个积分式中的定向相反。将上述两个式子作和,在  $C$  上关于测地曲率  $\kappa$  积分的两部分符号相反,恰好相抵消,于是有

$$\oint_{\tilde{C}} \kappa_g ds + \iint_{D_1 \cup D_2} K d\sigma = 4\pi - (\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j) \quad (11.3)$$

此时,  $\tilde{C} = (C_1/C) \cup (C_2/C)$  是一条简单闭曲线,为区域  $D_1 \cup D_2$  的边界,且  $D_1 \cup D_2$  在  $\tilde{C}$  上所诱导的定向,和  $C_1/C$  以及  $C_2/C$  原有的定向是一致的。

接下来重点关注(11.3)式的右端。不妨设  $p, q$  分别为曲线段  $C$  的端点,且限制于  $C$ ,  $C_1$  的定向从  $p$  指向  $q$ , 在  $p$  点的外角为  $\alpha_1$ ,  $q$  点的外角为  $\alpha_2$ ;  $C_2$  的定向从  $q$  指向  $p$ , 在  $p$  点的外角为  $\beta_2$ ,  $q$  点的外角为  $\beta_1$ 。

为了讨论更有代表性, 我们根据是否为新的曲线  $\tilde{C}$  的角点, 将  $p$  点和  $q$  点的情况归为四种不同的类型。我们先以其中一种为例进行说明。在  $p$  点, 假设  $\alpha_1 + \beta_2 = \pi$ , 此时曲线  $\tilde{C}$  在  $p$  点连续可微,  $p$  点非角点; 在  $q$  点, 假设  $\alpha_2 + \beta_1 \neq \pi$ , 此时, 新的外角为

$$\tilde{\alpha} = \pi - (\pi - \alpha_2) - (\pi - \beta_1) = -\pi + (\alpha_2 + \beta_1)$$

于是

$$\begin{aligned} 4\pi - (\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j) &= 4\pi - (\sum_{i=3}^{n_1} \alpha_i + \sum_{j=3}^{n_2} \beta_j) - (\alpha_1 + \beta_2) - (\alpha_2 + \beta_1) \\ &= 4\pi - (\sum_{i=3}^{n_1} \alpha_i + \sum_{j=3}^{n_2} \beta_j) - \pi - (\pi + \tilde{\alpha}) \\ &= 2\pi - (\tilde{\alpha} + \sum_{i=3}^{n_1} \alpha_i + \sum_{j=3}^{n_2} \beta_j) \end{aligned}$$

而  $\tilde{\alpha}, \alpha_3, \dots, \alpha_{n_1}, \beta_3, \dots, \beta_{n_2}$  恰好就是新的闭曲线  $\tilde{C}$  的全部外角。即 Gauss-Bonnet 公式在区域  $D_1 \cup D_2$  上也成立<sup>1</sup>。另外三种情形,  $p, q$  均非角点、 $p, q$  均为角点、 $p$  为角点  $q$  非角点过程雷同。

类推, 可以证明在任意单连通区域上的 Gauss-Bonnet 公式都成立。

现在我们可以来回答之前提出的曲面上测地三角形的内角和是多少这一问题: 此时的测地曲率全部为零, 于是

$$\iint_D K d\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^3 \alpha_i$$

即

$$\sum_{i=1}^3 (\pi - \alpha_i) = \pi + \iint_D K d\sigma$$

可见

- $K=0$ , 内角和等于  $180^\circ$
- $K<0$ , 内角和小于  $180^\circ$
- $K>0$ , 内角和大于  $180^\circ$

相比 Liouville 公式, 单连通区域上的 Gauss-Bonnet 公式在一定程度上可以认为是“整体”的结论, 是对小邻域内成立的 Liouville 公式积分之后, 再拼接而来的; 但实际上这样的操作依然是在所谓的曲面片上的, 本质还是局部的结论。同时, 单连通这一条件的限制, 使得这一结论无法应用到非单连通的曲面, 也就是亏格<sup>2</sup>大于等于 1 的曲面。

<sup>1</sup>实际上, 连续可微点的外角均为零, 也就是连续可微点可以视为特殊的角点, 可以不做区分, 统一证明

<sup>2</sup>拓扑概念, 可以参考<sup>[11]</sup>。

下一小节中，我们突破单连通的限制，在完整的一张可定向紧致无边曲面上建立整体的 Gauss-Bonnet 定理。

### \*11.2.3 曲面的定向

我们在3.1.2小节介绍过参数曲面片  $\vec{r}(u, v)$  的定向，即给定法向量  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ ，或者反过来， $\vec{r}_v \times \vec{r}_u$ 。

这一节开始，我们研究的对象不再是曲面片，而是完整的曲面。简单地理解，就是把一系列的曲面片粘贴起来，得到所谓的二维流形<sup>1</sup>。举个最简单的例子，单位球面，它是没有办法用单一的参数方程来描述的，即便使用覆盖范围最大的球极投影，也需要南北极各一个球极投影，也就是至少用两个曲面片来覆盖整个单位球面。

曲面，作为一个整体流形的定向，可以从两个等价角度来看。如果从曲面片粘合的角度看，所谓曲面的定向，是指一系列的参数化的曲面片  $\{(u_i, v_i)\}$ ，在重叠的点处，均有 Jacobi 矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial u_j} & \frac{\partial u_i}{\partial v_j} \\ \frac{\partial v_i}{\partial u_j} & \frac{\partial v_i}{\partial v_j} \end{vmatrix} > 0$$

当然，因为我们对流形的语言并不熟悉，所以我们希望从另一个更直观的角度来引入定向：简单来说，就是为曲面的每一个点（光滑地）指定一个正侧和一个负侧，这等价于在曲面上连续地选取一个单位法向量（可以减弱为处处非零的法向量）。

并非所有的曲面都可以找到这样的参数化曲面片  $\{(u_i, v_i)\}$  来覆盖，或者处处非零的法向量场，比如说大家熟悉的 Möbius 带，就无法区分“内外”。能找到这样定向的曲面称为可定向曲面，反之称为不可定向曲面。可定向曲面均可以有两种不同的定向可以选择。

需要额外注意的是，单连通的流形<sup>2</sup>一定可定向。对局部的曲面片而言，拓扑上相当于平面上的一个开集，自然单连通，所以总是可定向的，没有必要担心定向问题，这也是我们之前没有对局部的曲面片严格探讨定向的原因。

更多关于曲面定向，以及不可定向曲面的讨论，可以参考<sup>[3]</sup>的第 11 章。

<sup>1</sup>流形的概念较为复杂，我们这里不便展开，感兴趣的同学可以参考<sup>[9]</sup>。

<sup>2</sup>当然也包括曲面，且单连通的紧致无边曲面必然同胚与球面。

## \*11.2.4 可定向紧致无边闭曲面上的 Gauss-Bonnet 公式简介

现在,我们希望能在完整的曲面上建立 Gauss-Bonnet 定理,进而能够把整张曲面的拓扑都包含进来。

定理 11.9 (Gauss-Bonnet 定理). 若  $S$  是可定向紧致无边闭曲面, 则有

$$\iint_S K d\sigma = 2\pi\chi(S)$$

这里  $\chi(S)$  指的是曲面  $S$  的欧拉示性数, 是一个拓扑不变量, 且有  $\chi(S) = 2(1 - g)$ , 其中  $g$  是曲面的亏格。接下来我们简述整体 Gauss-Bonnet 定理的证明思路: 一方面, 定理的证明肯定是要用到单连通区域的 Gauss-Bonnet 公式。另一方面, 因为这一公式又只在单连通区域成立, 而整张曲面又不单连通, 直观上看, 可以把整张曲面裁剪成单连通的小块, 然后把每一小块上的 Gauss-Bonnet 公式(11.2)拼接起来。

对于 Gauss-Bonnet 公式的拼接, 我们已经有了处理经验, 这里并不比之前复杂太多。关键的问题就变成了如何才能高效地剖分整张曲面为单连通的小块, 使得之后拼接的计算量被控制在能处理的范围内。

换句话说, 我们希望在能达到剖分为单连通小块的基础上, 剖分越简单越好。自然想到用最简单的三角形来进行剖分。约定曲面  $S$  上的曲边三角形(上下文清晰时简称为三角形)为三个不同的点, 和连接这三点的三条光滑曲线构成的简单闭曲线, 以及围出的单连通区域。我们把这三个不同的点称为三角形的顶点, 三条光滑曲线称为三角形的边; 三条边合在一起称为三角形的边界; 边界所围成的单连通区域称为三角形的面, 其中除去边的部分称为三角形的内部。

任意曲面  $S$  的三角剖分是  $S$  的一族三角形  $\{T_i\}$ , 满足

1. 对  $S$  的任意一点  $P$ ,  $P$  必然落在某一个三角形上, 且  $P$  不落在三角形的边界上时,  $P$  属于唯一的某个三角形;
2. 当  $P$  落在某个三角形  $T_1$  的边上, 且不是  $T_1$  的顶点时, 则要么  $P$  不再属于其他三角形的任何边, 要么落在另外唯一一个三角形  $T_2$  的一条边上, 且不是  $T_2$  的顶点;
3. 对于任何三角形的任何一个顶点  $P$ , 以  $P$  为顶点的三角形只有有限个, 同时这些以  $P$  为公共顶点的三角形里, 任意两个三角形都至多有一个公共边。

注意到如果被剖分的曲面是紧致无边的, 那么第 2 个条件就变成了: 当  $P$  落在某个三角形  $T_1$  的边上, 且不是  $T_1$  的顶点时, 则  $P$  一定也落在另外唯一一个三角形  $T_2$  的一条边上, 且不是  $T_2$  的顶点。

上述对任意曲面三角剖分的限定, 可以换成更简洁的等价描述<sup>1</sup>, 即在

$$S = \bigcup_l T_l$$

的前提下, 对任何  $l \neq l'$ ,  $T_l$  和  $T_{l'}$ , 必有以下三种情况里的一种情况成立

1.  $T_l \cap T_{l'} = \emptyset$ ;
2.  $T_l$  和  $T_{l'}$  有且只有一个公共顶点;
3.  $T_l$  和  $T_{l'}$  有一条公共边 (包含边的两个端点)

同样的, 对于紧致无边曲面, 还需要加上条件: 任何一条边均落在两个不同的三角形中。

有限三角剖分的存在性是一个非常复杂的问题, 需要用到深入的黎曼几何的知识, 感兴趣的同学可以参考<sup>[24]</sup>中的第 12 章。现在不妨默认紧致无边可定向的曲面  $S$  上已经存在有限的三角剖分  $\{T_l\}_{l=1}^f$ , 记这个剖分中全部顶点的数目为  $v$ , 全部边的数目为  $e$ , 而全部面的数目显然为  $f$ 。

由于每一个三角形都是单连通的, 我们可以在  $T_l$  上使用 Gauss-Bonnet 公式(11.2), 有

$$\iint_{T_l} K d\sigma + \oint_{\partial T_l} \kappa_g ds = 2\pi - (\alpha_{l_1} + \alpha_{l_2} + \alpha_{l_3})$$

这里  $\alpha_{l_\lambda} (\lambda = 1, 2, 3)$  是三角形  $T_l$  的外角。记  $\beta_{l_\lambda} = \pi - \alpha_{l_\lambda}$  为对应的内角, 上式改写为

$$\iint_{T_l} K d\sigma + \oint_{\partial T_l} \kappa_g ds = 2\pi - 3\pi + (\beta_{l_1} + \beta_{l_2} + \beta_{l_3})$$

将  $f$  个三角形上的等式相加。注意到每条边都落在相邻的两个三角形中, 同时由于曲面可定向, 曲线积分的方向相反, 全部都抵消, 故左端为

$$\sum_{l=1}^f \iint_{T_l} K d\sigma + \sum_{l=1}^f \oint_{\partial T_l} \kappa_g ds = \iint_S K d\sigma$$

<sup>1</sup>实际上两种描述的出发点是对偶的

右端为

$$2\pi f - 3\pi f + \sum_{l=1}^f (\beta_{l_1} + \beta_{l_2} + \beta_{l_3})$$

重点来看内角和  $\sum_{l=1}^f (\beta_{l_1} + \beta_{l_2} + \beta_{l_3})$ , 我们按不同的顶点重新分组。由于无边, 且曲面光滑, 每个顶点周围的内角和必然是  $2\pi$ , 因此总的内角和必为  $2\pi v$ 。于是有

$$\iint_S K d\sigma = 2\pi f - 3\pi f + 2\pi v$$

这里没有将  $2\pi f - 3\pi f$  合并同类项的原因在于, 对于无边曲面, 每条边都在且仅在两个三角形中, 而每个三角形也固定有三条边, 故面数  $f$  和边数  $e$  有如下关系

$$\frac{3f}{2} = e$$

从而有

$$\iint_S K d\sigma = 2\pi(f - e + v)$$

拓扑上可以证明  $f - e + v$  与三角剖分<sup>1</sup>的选取无关<sup>2</sup>, 且有

$$f - e + v = \chi(S)$$

最终完成了定理的证明。对于紧致带边的可定向曲面, 也有相近的形式, 读者可以自行推导, 或者参考<sup>[18]</sup>。

Gauss-Bonnet 定理沟通了几何和拓扑, 完美地展现了几何和拓扑之间的相互制约关系, 可以认为是本科微分几何中最深刻, 最优美的定理。

## 本章注记

曲线和曲面的内在整体几何, 从逻辑上讲, 紧跟在测地线内容之后是最贴切的, 因为它用到的工具主要就是测地曲率和测地线。但是对于本科的曲线和曲面论而言, 从内容的重要程度上来看, 这一章内容显然没有第九章和第十重要, 所以笔者把这一章放在了讲义的最后。

那么肯定会有读者疑惑, 既然你觉得它不重要, 为什么要写在讲义中呢? 因为重要或者不重要, 都要依据读者所在的阶段来看。国内一般高校的本科微分几何是不讲授这些

<sup>1</sup>实际上甚至可以采用多边形剖分, 不限于三角形。

<sup>2</sup>当然, 不用拓扑的方法亦可, 直接观察上述等式的左端, 积分  $\iint_S K d\sigma$  显然与三角剖分无关。

整体几何内容的，而且实际上研究生微分几何课程往往也不讲授这些所谓的“初等”内容，造成了事实上的盲区；而学生们自己，已经疲于应付各种方程、曲线，即便教材中涉及了，也没有心思自学。但是从后续整体微分几何学习的角度看，这一章又出奇的重要，因为对于几何而言，局部总是简单的，甚至是平凡。真正有价值的内容都是整体的，将来研究生微分几何所讨论的问题，抑或科研中真正要研究的问题，一定都是整体的。

权衡之下，我个人觉得在打好局部几何（基本以常微分偏微分方法为核心，附加一些复变函数的方法）的基础上，还是有必要了解整体微分几何与局部微分几何研究思路的差异。这个差异非常的大，简单地讲，相较于局部微分几何，整体微分几何几乎可以说没有什么固定的套路，不同问题采用的方法可以大相径庭。

同时，即便是最简单的平面曲线的整体性质，研究的难度也远在局部微分几何之上。因此我们把这一章放置在教材靠后的部分，而不像一些国外教材一样分别分散在曲线和曲面的内容当中去。这一方面是为了更加突出由外在到内蕴，由局部到整体的逻辑主线，另一方面也是由易到难，担心大家一开始就研究曲线的整体性质会产生畏难心理。

也就是说，我们把这一章放在目前这一位置，是希望自学的同学能够对整体微分几何或多或少有一定的前瞻，即便是其中的很多细节并没有完全弄清楚也丝毫没有关系。因为如果不做这方面的研究，自然用不上；而将来要做这方面的研究，反正也会在研究生微分几何中专门来研究流形的整体几何拓扑性质。

最后，这一章只是选取了一些相对重要，且难度不算特别高的曲线整体几何和曲面内蕴整体几何的研究范例，大家可以在教材<sup>[18]</sup>中找到更多的整体几何内容。



## 第三部分注记

第三部分内容在整个教材中的地位比较特殊，特别是第十章的内容，确实超出了一般本科微分几何的范畴，和研究生阶段的复几何，黎曼几何，子流形几何有很大的重叠。

很多同学自然会有疑问：这份讲义的名字不是《微分几何入门》么？既然是入门，又何必介绍这么深入的内容呢？

我想从两个方面来回答为什么一定要加上这些内容：

其一，所谓入门，那么当然首要就是要打好基础，这也是我们前两部分所要完成的任务。但是，进一步讲，对于“入门”而言，更关键的在于要指明之后前进的方向。没有方向的打基础，那是小学生，中学生的学习方式。对于大学生而言，是要明白自己想达到一个怎样的目标后，再进行学习的安排。这一部分内容，作用就是展示给大家将来要学习的“几何”大概会是个什么样子，帮助大家找到自己要努力的方向。

其二，从我个人不太成功的几何学习经历来看，进入到研究生阶段，学习黎曼几何，子流形，复几何的时候，那些定理，虽然费些力气可以看懂，但是总是感觉理解的不深刻，也不太敢，或者做不到灵活地使用这些定理。多年之后，当我给学生们教授本科微分几何的时候，却发现研究生微分几何中我那些理解的并不太好的定理，在本科微分几何中都能找到它们的原型，比如 Newlander-Nirenberg 定理，Bernstein 定理等。而且，基本上也继承了曲面上这些原型定理的证明思路。换个角度说，如果读本科时就能接触到这些内容，就算学的不是特别明白，那么到研究生阶段正式学习几何的话也会是事半功倍的效果。这不能不说是我学习经历中的一大遗憾，我自然也希望有志于学习几何的同学能避免。也就是说，降低前半程的学习难度，和增加一些较高阶的内容并不矛盾，最终目标都是降低全周期（从本科到研究生阶段）的学习成本。



# 后记

纵观整篇讲义，很明显分为了三个阶段：

1. 使用线性方程来研究曲面和曲线的局部外在几何，并在第一部分最后建立了 Gauss 定理，打开通向内蕴几何的大门；
2. 使用非线性方程来研究曲面的局部外在几何和局部内蕴几何，主要集中于内蕴几何。
3. 展示了如何使用各种工具来研究曲线和曲面的整体微分几何，这一部分内容和拓扑，解析函数的关系密切，预示了现代的微分几何是一门综合性的学科，它的研究对象，以及研究方法，都和古典微分几何有着本质的区别。

我们的首要目标是让大家花费最少的时间和精力就能掌握曲线和曲面的局部理论，并在这一过程中掌握微积分和微分方程在几何中的应用。因此，我们把重心聚焦于曲线和曲面的局部理论，也就是第一和第二部分。不论是对于数学专业非几何方向，还是非数学专业，这些知识在一定程度内都是够用的，当然，这里的够用指的是之后的学习和科研中，可以以第一和第二部分为基础，进一步地学习和拓展相关知识。

然而，对于数学专业非几何方向，或是非数学专业的同学，我们不希望这份讲义给大家造成一个错觉，就是古典微分几何就是局部理论。对于本来有志于从事几何方向科研的数学专业同学（虽然我们设定这份讲义的主要受众并非这类同学），不希望他们略读了讲义之后，发现所谓的微分几何，无非就是把自己早已熟练掌握的微积分，常微分方程，偏微分方程用到从解析几何延伸出的框架中来，进而误以为微分几何除了分析工具的应用之外，就是一门毫无特色的学科。

所以，在作者能力水平都十分有限的情况下，依然勉力为之，撰写了第三部分，尝试初步探究整体微分几何。也是想表明，在古典微分几何的范畴内，已经发生了局部几何向整体几何过渡这一现象。整体微分几何，才是微分几何的核心所在。即便是对于数学

专业中非几何方向，或是非数学专业的同学，整体微分几何中的各种解决问题的方法非常精妙，个人认为有很大的潜力用来解决其他学科理论或者是实际中的问题。

对于打算学习几何的数学专业学生，这就更不消说。整体微分几何和拓扑学，代数几何，复分析的深刻联系是非常值得我们去深入探究的。

所以，我们希望，在掌握好前两部分内容后，大家最好还是花些时间浏览一下第三部分内容。也许现在没有直接的用处，但说不定以后会有意料之外的收益。

## 附录



## 附录 A

### 行星运动常微分方程的进一步求解

在1.2.4小节中，我们已经算出了行星的轨道。实际上，我们可以接着把行星运行的其他信息，特别是最关键的某时刻的角度，以及角速度也求解出来。具体来看，由于已经知道

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}$$

以及

$$cr = \frac{1}{1 + a \cos \theta}$$

其中  $c = \frac{M}{h^2}$  且  $0 \leq a \leq 1$ 。于是有

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{M^2}{h^3} (1 + a \cos \theta)^2$$

分离变量有

$$\frac{d\theta}{(1 + a \cos \theta)^2} = \frac{M^2}{h^3} dt$$

现在考虑积分

$$\int \frac{1}{(1 + a \cos \theta)^2} d\theta$$

它的求解是有固定模式的，即令  $u = \tan \frac{\theta}{2}$ ，上述积分变为

$$\int \frac{1}{(1 + a \frac{1-u^2}{1+u^2})^2} \frac{2}{1+u^2} du = \int \frac{2(1+u^2)}{(1+a+(1-a)u^2)^2} du \quad (\text{A.1})$$

需要关于  $a$  的取值分情况讨论。我们先来看简单的情形,  $a = 1$ , 也就是对应行星轨道为抛物线的情况。此时积分为

$$\int \frac{1+u^2}{2} du = \frac{u}{2} + \frac{u^3}{6} + D$$

于是我们总可以重新选取合适的  $t$ , 使得

$$\frac{M^2}{h^3} t = \frac{u}{2} + \frac{u^3}{6} \quad (\text{A.2})$$

即

$$u^3 + 3u - \frac{6M^2 t}{h^3} = 0$$

进而, 利用三次方程的求根公式, 我们可以得到上述三次方程的实根为

$$u = \sqrt[3]{\frac{3M^2 t}{h^3} + \sqrt{\frac{9M^4 t^2}{h^6} + 1}} + \sqrt[3]{\frac{3M^2 t}{h^3} - \sqrt{\frac{9M^4 t^2}{h^6} + 1}}$$

最终有

$$\theta = 2 \arctan \frac{1}{h} \left( \sqrt[3]{3M^2 t + \sqrt{9M^4 t^2 + h^6}} + \sqrt[3]{3M^2 t - \sqrt{9M^4 t^2 + h^6}} \right)$$

为了求导, 也就是计算角速度方便, 令  $\sqrt[3]{\sqrt{9M^4 t^2 + h^6} + 3M^2 t} = \alpha$ ,  $\sqrt[3]{\sqrt{9M^4 t^2 + h^6} - 3M^2 t} = \beta$ 。不难看出  $\alpha, \beta$  之间有如下关系

1.  $\alpha\beta = h^2$
2.  $(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = 2\sqrt{9M^4 t^2 + h^6}$
3.  $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = 6M^2 t$
4.  $(\alpha - \beta)^3 + 3h^2(\alpha - \beta) - 6M^2 t = 0$
5.  $\alpha'(t) = \frac{M^2}{\sqrt{9M^4 t^2 + h^6}} \alpha(t)$ ,  $\beta'(t) = -\frac{M^2}{\sqrt{9M^4 t^2 + h^6}} \beta(t)$

实际上前三个关系可以推出第 4 个关系 (本质上就是三次方程根的 Cardano 公式的推导过程)。在这样的记法下

$$\theta = 2 \arctan \frac{\alpha - \beta}{h}$$

于是

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2h}{(\alpha - \beta)^2 + h^2} (\alpha'(t) - \beta'(t)) = \frac{2M^2h}{\sqrt{9M^4t^2 + h^6}} \frac{\alpha + \beta}{(\alpha - \beta)^2 + h^2}$$

再由关系 3, 有

$$\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{9M^4t^2 + h^6}} = \frac{2}{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2} = \frac{2}{(\alpha - \beta)^2 + h^2}$$

最终角速度的表达式可以写为

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{4M^2h}{((\alpha - \beta)^2 + h^2)^2}$$

若  $0 < a < 1$ , 积分的求解相对会困难, 但依然是可以操作的, 我们这里就不再赘述了。换言之, 行星的运动状态是完全确定的, 甚至可以用初等函数表达出来。

现在来看另外一个问题, 在 1.2.4 小节中, 求解行星轨道, 是把行星运动方程转化为  $r$  和  $\theta$  常微分方程进行求解的。我们自然想知道, 直接求解方程 (1.4)

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{M}{r^2} = 0$$

是否可行。作为以  $t$  为自变量的非线性方程, 自然不容易解。如果  $r$  为常数, 显然得到轨迹是圆。如果  $r$  并非常数, 则可以反过来把  $r$  看作自变量, 有

$$\frac{d\frac{dr}{dt}}{dt} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{M}{r^2} = 0$$

于是

$$\frac{d\frac{1}{\frac{dr}{dt}} \frac{dr}{dt}}{dr} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{M}{r^2} = 0$$

令  $\frac{dr}{dt} = f(r)$ , 则有

$$-\frac{1}{f^3(r)} \frac{df}{dr} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{M}{r^2} = 0$$

分离变量有

$$-\frac{df}{f^3} = \left( \frac{h^2}{r^3} - \frac{M}{r^2} \right) dr$$

于是

$$\frac{1}{2} \frac{1}{f^2} = \frac{M}{r} - \frac{1}{2} \frac{h^2}{r^2} + \frac{C}{2}$$

可得

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{\sqrt{2\frac{M}{r} - \frac{h^2}{r^2} + C}}$$

进而

$$t = \int \frac{1}{\sqrt{2\frac{M}{r} - \frac{h^2}{r^2} + C}} dr = \int \frac{r}{\sqrt{Cr^2 + 2Mr - h^2}} dr \quad (\text{A.3})$$

现在我们来求解右端的积分。分情况讨论，当  $C = 0$  时，

$$\begin{aligned} \int \frac{r}{\sqrt{2Mr - h^2}} dr &= \int \frac{r}{M} d\sqrt{2Mr - h^2} \\ &= \frac{r\sqrt{2Mr - h^2}}{M} - \int \frac{\sqrt{2Mr - h^2}}{M} dr \\ &= \frac{r\sqrt{2Mr - h^2}}{M} - \frac{(\sqrt{2Mr - h^2})^3}{3M^2} + D \\ &= \frac{h^2\sqrt{2Mr - h^2}}{2M^2} + \frac{(\sqrt{2Mr - h^2})^3}{6M^2} + D \end{aligned}$$

注意到我们总是可以重新选取初始时刻，使得  $D = 0$ 。同时简便起见，令  $x = \sqrt{2Mr - h^2}$ ，于是

$$t = \frac{h^2}{2M^2}x + \frac{1}{6M^2}x^3 \quad (\text{A.4})$$

即

$$x^3 + 3h^2x - 6M^2t = 0$$

利用三次方程的求根公式，我们可以得到实根为

$$x = \sqrt[3]{3M^2t + \sqrt{9M^4t^2 + h^6}} + \sqrt[3]{3M^2t - \sqrt{9M^4t^2 + h^6}}$$

采用之前的记号，进而

$$r = \frac{(\alpha - \beta)^2 + h^2}{2M}$$

再根据  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}$ ，有

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{4M^2h}{((\alpha - \beta)^2 + h^2)^2}$$

不难发现与之前的结果相吻合。

当  $C \neq 0$  时，积分

$$\int \frac{r}{\sqrt{Cr^2 + 2Mr - h^2}} dr$$

的计算相对复杂，但依然有固定的求解模式，读者不妨参考<sup>[29]</sup>第 2 卷第 8 章的内容，我们这里也不展开了。

实际上, 到这里已经非常明显了, 直接求解  $r$  关于  $t$  的微分方程和先求解  $r$  关于  $\theta$  的方程最终是等价的。实际上, (A.1) 式中  $a = 1$ , 和 (A.3) 式中  $C = 0$ , 都对应行星轨迹为抛物线的特殊情形; 而且 (A.4) 式中的  $x = \sqrt{2Mr - h^2}$ , 将  $r = \frac{h^2}{M} \frac{1}{1 + \cos \theta}$  代入后, 有

$$x = \sqrt{2h^2 \frac{1}{1 + \cos \theta} - h^2} = h \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = h \tan \frac{\theta}{2}$$

此时, (A.4) 式可以改写为

$$t = \frac{h^3}{2M^2} \tan \frac{\theta}{2} + \frac{h^3}{6M^2} \tan^3 \frac{\theta}{2}$$

和 (A.2) 式完全一致, 最终的结果也必然相同。 $a \neq 1$  和  $C \neq 0$  时两种求解方式的等价性, 感兴趣的同学可以自行验证。

当然, 虽然我们打心底里, 事先就能猜到两种求解路径最终的结果都是相同的; 但是转换成  $r$  和  $\theta$  的方程进行求解, 依然要比直接求解  $r$  和  $t$  的方程要简单得多, 这是大家利用极坐标计算特别需要注意的地方。

此外, 比较令人惊讶的地方在于, 我们知道行星运动轨迹是一个椭圆, 如果要求椭圆的周长, 那么就会出现所谓的椭圆积分 (可以参考<sup>[29]</sup>, 第八章, 第 5 节)。然而, 除了椭圆周长这个“非局部”的几何量外, 行星运动所涉及的各种关键物理量, 全都是可以用初等函数表达出来的。比较直观的一个原因在于, 记  $R$  为一个二元的有理函数,  $\varphi$  为一个一元多项式, 对于如下形式的积分

$$\int R(x, \sqrt{\varphi(x)}) dx$$

如果多项式  $\varphi(x)$  的次数为 3 或者 4, 那么就是椭圆积分, 无法用初等函数表示; 如果多项式  $\varphi(x)$  的次数为 1 或者 2, 那么根据已有数学分析的知识, 原函数一定可以显式地找到。恰恰涉及到行星运动的积分, 都是后一种可以显式积出的<sup>1</sup>, 甚至像

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{4M^2h}{\left( \left( \sqrt[3]{3M^2t + \sqrt{9M^4t^2 + h^6}} + \sqrt[3]{3M^2t - \sqrt{9M^4t^2 + h^6}} \right)^2 + h^2 \right)^2}$$

这样看起来复杂得离谱的函数, 它的原函数也都可以用初等函数显式写出:

$$\theta = 2 \arctan \frac{1}{h} \left( \sqrt[3]{3M^2t + \sqrt{9M^4t^2 + h^6}} + \sqrt[3]{3M^2t - \sqrt{9M^4t^2 + h^6}} \right)$$

相当于说所谓的天体运动 (当然是在理想的状况下), 完完全全可以用初等的函数表示出来。这样的结论, 不论是对 17 世纪的古人, 还是 21 实际的现代人, 都是无比震撼的。

<sup>1</sup>如果不是仅有一颗恒星和一颗行星, 考虑其他天体的影响, 行星运动中也会出现椭圆积分。



## 附录 B

### 行列式求导的一般处理

对行列式进行求导运算在偏微分方程，几何分析中使用的非常频繁，我们很有必要深入

考察行列式求导的方法。我们还是以 3 阶矩阵  $Q(s) = \begin{pmatrix} q_{11}(s) & q_{12}(s) & q_{13}(s) \\ q_{21}(s) & q_{22}(s) & q_{33}(s) \\ q_{31}(s) & q_{32}(s) & q_{33}(s) \end{pmatrix}$  为例说

明。记  $Q_{ij}$  为  $q_{ij}$  的代数余子式，则

$$\begin{aligned} \frac{d|Q(s)|}{ds} &= \frac{d \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3)} q_{1i_1} q_{2i_2} q_{3i_3}}{ds} \\ &= \sum \left( (-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3)} \frac{dq_{1i_1}}{ds} q_{2i_2} q_{3i_3} + (-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3)} q_{1i_1} \frac{dq_{2i_2}}{ds} q_{3i_3} + (-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3)} q_{1i_1} q_{2i_2} \frac{dq_{3i_3}}{ds} \right) \\ &= \sum_{i,j} \frac{dq_{ij}}{ds} Q_{ij} \end{aligned}$$

很容易察觉，这样的处理方法对任意阶数的行列式均成立。

这样的一般公式当然也可以帮助我们更有效地解决曲线相关的问题。来看 Frenet 标架存在性中关于标架场保持右手性的讨论。此时，矩阵  $Q(s)$  满足 Frenet 运动公式，可以把(2.7)式代入上面的公式，继续计算有

$$\begin{aligned} \frac{d|Q(s)|}{ds} &= \sum_{i,j} \frac{dq_{ij}}{ds} Q_{ij} = \sum_{i,j} \left( \sum_{k=1}^3 a_{ik} q_{kj} \right) Q_{ij} = \sum_{i,j,k} a_{ik} q_{kj} Q_{ij} \\ &= \sum_{i,k} a_{ik} \left( \sum_{j=1}^3 q_{kj} Q_{ij} \right) = \sum_{i,k} a_{ik} |Q(s)| \delta_i^k = \sum_{i=1}^3 a_{ii} |Q(s)| = \text{tr} A |Q(s)| \end{aligned}$$

同样可由  $\text{tr} A = 0$  导出  $|Q(s)|$  为常数，进而根据  $|Q(0)| = 1$  得出标架场恒为右手系。



## 附录 C

### 倒置摆线的等时性和最速降线

我们在附录里所涉及到的摆线，都是倒置的摆线，如下图：

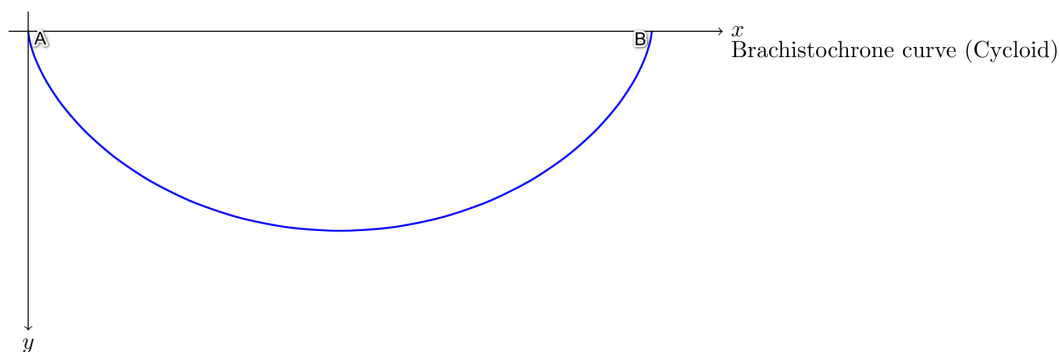


图 C.1: 倒置摆线

参数方程为

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(\cos \theta - 1) \end{cases}$$

我们先来证明摆线的严格等时性，即将小球放置在弧线上的任意一点，小球下落到底部的时间都是一样的。当然，用初等的方法也可以说明，不过因为我们已经知道了摆线参数方程，所以可以利用微积分直接计算。不妨设初始位置在  $\theta_0$ ，则根据能量守恒， $\theta$  处的速度大小为  $\sqrt{2ag(\cos \theta_0 - \cos \theta)}$ 。同时设  $t$  和  $\theta$  的关系为  $\theta(t)$ ，则  $t$  时刻的速度为

$$a \frac{d\theta}{dt} (1 - \cos \theta, \sin \theta)$$

于是

$$a \frac{d\theta}{dt} \sqrt{2 - 2 \cos \theta} = \sqrt{2ag(\cos \theta_0 - \cos \theta)}$$

分离变量有

$$dt = \sqrt{\frac{a}{g} \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta_0 - \cos \theta}} d\theta$$

小球下落到底部的时间

$$T = \int_0^T dt = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta_0 - \cos \theta}} d\theta$$

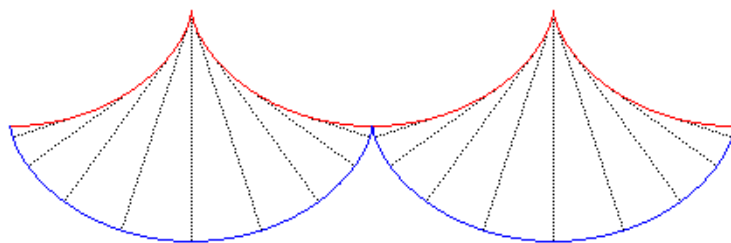
注意到

$$\begin{aligned} \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta_0 - \cos \theta}} d\theta &= \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2}{\cos \theta_0 - \cos \theta}} \sin \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= -2 \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2}{\cos \theta_0 - \cos \theta}} d \cos \frac{\theta}{2} \\ &= -2 \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2}{1 + \cos \theta_0 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d \cos \frac{\theta}{2} \\ &= -2 \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d \cos \frac{\theta}{2} \\ &= 2 \int_0^{\cos \frac{\theta_0}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \frac{\theta_0}{2} - u^2}} du \\ &= 2 \arcsin \frac{u}{\cos \frac{\theta_0}{2}} \Big|_0^{\cos \frac{\theta_0}{2}} = \pi \end{aligned}$$

即  $T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$ , 和小球的初始位置无关。换言之, 小球运动的一个周期固定为  $4\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$ 。当然, 直接用倒置摆线来计时(数)并不现实, 仍然需要把它改造成单摆的样子。结合2.4.1小节中已知的结论: 摆线的渐伸(屈)线依然是摆线。我们把图2.4.1倒置, 让拴着小球的细线在两条摆线间摆动, 则小球的轨迹完全落在倒置的摆线上, 就得到严格等时的单摆, 如下图:

严格地讲, 给定  $\phi_0 \in (0, \pi]$ , 只要取倒置摆线底部  $\theta \in [\pi - \phi_0, \pi + \phi_0]$  的一段, 就可以实现等时性。同样, 对于限制细线摆动的倒置摆线部分, 也不需要完整地制造出来。

由于讲义无法显示动图, 对严格同频钟摆感兴趣的同学, 可以参考知乎上的文章: <https://zhuanlan.zhihu.com/p/370400808>, 有更好的展示。



现在我们来考虑另外一个问题，也就是最速降线的问题，简单地讲，就是从  $A$  点到  $B$  点（当然，默认  $A$  点的高度大于  $B$  点的高度），小球从静止状态，在重力的作用下沿由  $A$  到  $B$  曲线的曲线运动，什么样的曲线使得到达终点的时间最短。

答案显然不是连接  $AB$  的直线段。因为我们就有一个现成的特例，考虑图C，小球沿水平直线段  $AB$  运动，从  $A$  点到达  $B$  点的时间是无穷大（因为一直处于静止状态），而沿倒置摆线运动的时间我们已经求解过，为  $2\pi\sqrt{\frac{|AB|}{g}} = \sqrt{\frac{2\pi|AB|}{g}}$ ，明显时间更短。接下来，我们利用变分法<sup>1</sup>来说明最速曲线就是经过  $AB$  两点的倒置摆线<sup>2</sup>。

不妨设  $A$  点的坐标为  $(0, 0)$ ， $B$  点的坐标为  $(b, -h)$ 。假设曲线为函数  $-f(x)$  的图像，即  $f(0) = 0, f(b) = h$ 。类似于之前倒置摆线等时性的计算，根据能量守恒， $x$  处的速度大小为  $\sqrt{2gf(x)}$ 。从而下落时间为

$$T(f) = \int \frac{ds}{v} = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\sqrt{2gf(x)}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \sqrt{\frac{1 + (f'(x))^2}{f(x)}} dx$$

假如在  $f$  处取到极小值，那么对于任意的  $t$  和函数  $g$ ，其中  $g(0) = g(b) = 0$ ，都有  $T(f + tg) \geq T(f)$ ，从而必然有

$$\left. \frac{dT(f + tg)}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

对任意满足限制条件的连续可微函数  $g$  都成立。注意到被积函数的形式比较复杂，为了

<sup>1</sup>我们都知道牛顿采用变分法证明了最速降线就是摆线，但是不使用变分法这样相对高级的工具，用初等的方法也一样可以证明：Johann Bernoulli 就是将  $AB$  竖直方向上无限分层，类比与光的折射使得经历时间最短，得到最速降线上任意一点上切线和竖直方向所成的角度的正弦与该点下落的高度的平方根的比是常数，而有这样性质的曲线只能是倒置的摆线。

<sup>2</sup>严格地讲，最速降线应该是倒置摆线的一部分，即取参数  $\theta \in [0, \theta_0]$ ，其中  $\theta_0$  是  $[0, 2\pi]$  之间的某一确定值。

简化记号, 我们暂时记

$$F(f, f') = \sqrt{\frac{1 + (f'(x))^2}{f(x)}}$$

于是

$$T(f) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b F(f, f') dx$$

从而

$$T(f + tg) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b F(f + tg, f' + tg') dx$$

同时

$$\left. \frac{d}{dt} F(f + tg, f' + tg') \right|_{t=0} = \frac{\partial F}{\partial f} g + \frac{\partial F}{\partial f'} g'$$

进而

$$\left. \frac{dT(f + tg)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{\partial F}{\partial f} g + \frac{\partial F}{\partial f'} g' dx = 0$$

再注意到  $g(0) = g(b) = 0$ , 有

$$\int_0^b \frac{\partial F}{\partial f'} g' dx = \int_0^b \frac{\partial F}{\partial f'} dg(x) = \frac{\partial F}{\partial f'} g(x) - \int_0^b g(x) d\frac{\partial F}{\partial f'} = - \int_0^b g(x) \frac{d\frac{\partial F}{\partial f'}}{dx} dx$$

代回到上式, 有

$$\int_0^b \left( \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d\frac{\partial F}{\partial f'}}{dx} \right) g(x) dx = 0$$

由于这一式子对任意的  $g(x)$  都成立, 必然有

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d\frac{\partial F}{\partial f'}}{dx} \equiv 0 \quad (\text{C.1})$$

即所谓的关于  $f$  的 Euler-Lagrange 方程。现在我们希望进一步化简 Euler-Lagrange 方程, 注意到

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial f} \frac{df}{dx} + \frac{\partial F}{\partial f'} \frac{df'}{dx}$$

将这一关系式代入(C.1)式, 可得

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \left( \frac{\partial F}{\partial f'} f'' + \frac{d\frac{\partial F}{\partial f'}}{dx} f' \right) = 0$$

即

$$\frac{d}{dx} \left( F - \frac{\partial F}{\partial f'} f' \right) = 0$$

得到 Euler-Lagrange 方程的最终形式:

$$F - \frac{\partial F}{\partial f'} f' = C$$

现在开始, 我们把  $F$  的具体形式代入, 有

$$\sqrt{\frac{1 + (f')^2}{f}} - \frac{(f')^2}{\sqrt{f(1 + (f')^2)}} = C$$

化简可得

$$f(1 + (f')^2) = C$$

即

$$f' = \sqrt{\frac{C}{f} - 1}$$

分离变量有

$$\sqrt{\frac{f}{C - f}} df = dx$$

令  $u = \frac{f}{C}$ , 有

$$C \sqrt{\frac{u}{1 - u}} du = dx$$

再令  $u = \sin^2 \phi$ , 于是有

$$C \frac{\sin \phi}{\cos \phi} 2 \sin \phi \cos \phi d\phi = C 2 \sin^2 \phi d\phi = C(1 - \cos 2\phi) d\phi = dx$$

积分可得

$$C(\phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi) = x + c$$

同时, 有

$$y = f(x) = Cu = C \sin^2 \phi = \frac{C}{2}(1 - \cos 2\phi)$$

联立可得参数方程

$$\begin{cases} x = \frac{C}{2}(2\phi - \sin 2\phi) + c \\ y = \frac{C}{2}(1 - \cos 2\phi) \end{cases}$$

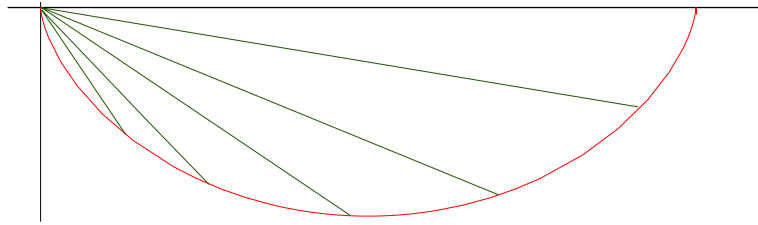
注意到  $f(0) = 0$ , 可解得  $c = 0$ 。令  $a = \frac{C}{2}$ ,  $\theta = 2\phi$ , 则回到了标准的摆线方程:

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

根据  $f(b) = h$ , 可以进一步确定  $a$  满足

$$\cos \frac{(\sqrt{2ah - h^2} + b)}{a} = \frac{a - h}{a} \quad (\text{C.2})$$

即摆线完全确定唯一。如下图



## 附录 D

### 曲面的第三基本形式

在3.3节中，我们通过研究曲面上曲线的弯曲程度，进而引入第二基本形式来反映曲面的弯曲程度。然而，类比于曲线情形，最直接反映曲面弯曲程度的却是曲面单位法向量  $\vec{n}$  转动的快慢。由此，现在我们希望计算  $d\vec{n} = \vec{n}_u du + \vec{n}_v dv$  的模长，抑或  $d\vec{n} \cdot d\vec{n}$ 。

定义 D.1.

$$III = d\vec{n} \cdot d\vec{n}$$

称为曲面的第三基本形式。

由于  $d\vec{n} = \vec{n}_u du + \vec{n}_v dv$ ，我们需要先来计算  $\vec{n}_u, \vec{n}_v$ 。注意到  $\vec{n}$  是单位向量，其任何方向的导数都与自身垂直， $d\vec{n}$  必然落在切平面中。分别可将  $\vec{n}_u, \vec{n}_v$  写为  $\vec{r}_u$  和  $\vec{r}_v$  的线性组合。

$$\vec{n}_u = A\vec{r}_u + B\vec{r}_v$$

$$\vec{n}_v = C\vec{r}_u + D\vec{r}_v$$

问题来了，其中的  $A, B, C, D$  系数分别是多少？将上述改写为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \vec{n}_u \\ \vec{n}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{pmatrix}$$

等式两边同时与  $(\vec{r}_u \ \vec{r}_v)$  做内积

$$\begin{pmatrix} \vec{n}_u \\ \vec{n}_v \end{pmatrix} \cdot (\vec{r}_u \ \vec{r}_v) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{pmatrix} \cdot (\vec{r}_u \ \vec{r}_v)$$

由于

$$\vec{n}_u \cdot \vec{r}_u = -L, \quad \vec{n}_u \cdot \vec{r}_v = \vec{n}_v \cdot \vec{r}_u = -M, \quad \vec{n}_v \cdot \vec{r}_v = -N$$

从而得到

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

这就是 Weingarten 映射  $\mathcal{W}$  的矩阵  $W$ 。换言之，第二基本形式和第三基本形式是可以相互决定的。

现在我们来考察第三基本形式的具体表达式。记  $P = \vec{n}_u \cdot \vec{n}_u$ ,  $Q = \vec{n}_u \cdot \vec{n}_v$ ,  $R = \vec{n}_v \cdot \vec{n}_v$ , 有

$$III = P(du)^2 + 2Qdudv + R(dv)^2$$

且

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P & Q \\ Q & R \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \vec{n}_u \\ \vec{n}_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{n}_u & \vec{n}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_u & \vec{r}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \end{aligned}$$

可见第三基本形式计算起来远比第二基本形式麻烦，这也是它本来逻辑上比第二基本形式更简单，但却被称为第三基本形式的原因。

现在我们来进一步探讨第一，第二，第三基本形式之间的关联。

**命题 D.2.** 曲面  $S$  上的三个基本形式满足关系式

$$III - 2HII + KI \equiv 0 \tag{D.1}$$

其中， $H$ ,  $K$  是曲面的平均曲率和高斯曲率。

一般情况下直接代入各形式的系数，以及  $H, K$  的表达式验算会非常复杂，但是注意到  $I, II, III$  是微分形式，自然和参数选取无关。而  $H, K$  由 Weingarten 映射的特征值决定，也与参数选取无关。所以我们只要选取一个最特殊的参数系来验证即可，即正交曲率线网。这里就不展开了。

此外，在介绍了 Weingarten 映射之后，我们知道  $\mathcal{W}(d\vec{r}) = -d\vec{n}$ 。再根据 Weingarten 映射关于内积是自伴的，有

$$\begin{aligned} I &= d\vec{r} \cdot d\vec{r} \\ II &= \mathcal{W}(d\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ III &= \mathcal{W}(d\vec{r}) \cdot \mathcal{W}(d\vec{r}) = \mathcal{W}^2(d\vec{r}) \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

于是(D.1)式等价于

$$\mathcal{W}^2 - 2H\mathcal{W} + \text{Id} = 0$$

即Weingarten 映射矩阵的特征方程 $|W - \lambda\text{Id}| = 0$ 。这是对上述命题，也就是三个基本形式之间关系，更层次的理解。



## 附录 E

# 能量方法证明曲线 Frenet 标架场和曲面自然标架场的唯一性

我们分别在2.2.2小节和4.4.2小节中说明了曲线上 Frenet 标架场和曲面上自然标架场的唯一性。依据是这两种情况下标架场所满足的方程都是线性方程，而线性方程满足初值的解必然是唯一的。这样的方法强烈依赖于方程的线性；非线性的方程，一般情况下是无法保证解的存在性和唯一性的。不妨引入另外一种应用范围更广的方法，即所谓的能量方法，来研究标架场的唯一性。

来看曲线上 Frenet 标架场的唯一性。使用反证法，假定曲线  $\vec{r}_1(s)$  和  $\vec{r}_2(s)$  有相同的曲率和挠率，即它们的 Frenet 标架场  $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\beta}_1, \vec{\gamma}_1\}$  和  $\{\vec{\alpha}_2, \vec{\beta}_2, \vec{\gamma}_2\}$  满足同样的方程，且两组标架在  $s = 0$  处相同。

首先定义能量泛函

$$f(s) = |\vec{\alpha}_1(s) - \vec{\alpha}_2(s)|^2 + |\vec{\beta}_1(s) - \vec{\beta}_2(s)|^2 + |\vec{\gamma}_1(s) - \vec{\gamma}_2(s)|^2$$

由条件可知  $f(0) = 0$ 。

其次计算能量泛函的导数

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{df(s)}{ds} &= \kappa(s)(\vec{\beta}_1(s) - \vec{\beta}_2(s)) \cdot (\vec{\alpha}_1(s) - \vec{\alpha}_2(s)) \\ &\quad - \kappa(s)(\vec{\alpha}_1(s) - \vec{\alpha}_2(s)) \cdot (\vec{\beta}_1(s) - \vec{\beta}_2(s)) + \tau(s)(\vec{\gamma}_1(s) - \vec{\gamma}_2(s)) \cdot (\vec{\beta}_1(s) - \vec{\beta}_2(s)) \\ &\quad - \tau(s)(\vec{\beta}_1(s) - \vec{\beta}_2(s)) \cdot (\vec{\gamma}_1(s) - \vec{\gamma}_2(s)) = 0 \end{aligned}$$

从而可得  $f(s) \equiv 0$ , 进而两曲线的 Frenet 标架完全重合。可以看到, 能量方法完全不依赖解的存在性, 更不需要  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  是单位正交的。

接下来来看曲面上自然标架场的唯一性, 可以对于两个自然标架  $\{\vec{r}_\alpha^{(1)}, \vec{n}^{(1)}\}, \{\vec{r}_\alpha^{(2)}, \vec{n}^{(2)}\}$  引入能量函数

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta}(u^1, u^2) &= (\vec{r}_\alpha^{(1)} - \vec{r}_\alpha^{(2)}) \cdot (\vec{r}_\beta^{(1)} - \vec{r}_\beta^{(2)}) \\ f_\alpha(u^1, u^2) &= (\vec{r}_\alpha^{(1)} - \vec{r}_\alpha^{(2)}) \cdot (\vec{n}^{(1)} - \vec{n}^{(2)}) \\ f(u^1, u^2) &= |\vec{n}^{(1)} - \vec{n}^{(2)}|^2 \end{aligned}$$

对这些函数求偏导, 可得

$$\begin{cases} \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} = \sum_{\delta=1}^2 (\Gamma_{\gamma\alpha}^\delta f_{\delta\beta} + \Gamma_{\gamma\beta}^\delta f_{\delta\alpha}) + b_{\gamma\alpha} f_\beta + b_{\gamma\beta} f_\alpha \\ \frac{\partial f_\alpha}{\partial u^\gamma} = - \sum_{\delta=1}^2 b_\gamma^\delta f_{\delta\beta} + \sum_{\delta=1}^2 \Gamma_{\gamma\alpha}^\delta f_\delta + b_{\gamma\alpha} f \\ \frac{\partial f}{\partial u^\gamma} = - 2 \sum_{\delta=1}^2 b_\gamma^\delta f_\delta \end{cases}$$

注意到这一方程和第4.4小节, 证明曲面存在性中的方程组 (4.22) 并无二致。根据偏微分理论, 方程组有唯一的零解, 因此各个能量泛函恒为零, 唯一性得证。**到这里是不是感觉有些奇怪?** 也就是说和 Frenet 标架的问题不同, 在证明自然标架唯一性的过程中依然需要用到偏微分解的唯一性。很多同学自然会有疑问: **那为什么不开始直接用偏微分方程的唯一性, 而绕这么大一个圈子?**

确实, 按上述办法构造若干个独立的泛函来证明唯一性, 实属画蛇添足, 多此一举, 毫无意义, 与能量方法的主旨相差甚远。大家试想一下, 如果可以找到一些合适的正函数  $a^{\alpha\beta}(u^1, u^2)$ ,  $a^\alpha(u^1, u^2)$ ,  $a(u^1, u^2)$  作为系数, 构造单独的一个能量泛函

$$F(u^1, u^2) = \sum_{\alpha, \beta} a^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha=1}^2 a^\alpha f_\alpha + a f$$

能够使得对  $\gamma = 1, 2$ ,  $\frac{\partial F}{\partial u^\gamma} \leq 0$  都成立的话, 那就可以摆脱方程的线性性质, 直接得到标架场的唯一性。这才是能量方法应该有的样子。当然笔者目前并未想出合适的构造方式, 也许这样的能量方法并不适用于自然标架场的唯一性这一问题, 感兴趣的同学可以深入思考下。

总之, 如果能构造出合适的能量泛函, 则能量方法在证明非线性偏微分方程解的唯一性时也非常有效, 应用面更广。

## 附录 F

# 二元一次微分式积分因子的存在性

### 实二元一次微分式

我们已经知道，一方面，一次微分式  $a(x, y)dx + b(x, y)dy$  的积分因子存在性等价于在曲面上某种特殊参数系的存在性，在微分几何中有着重要的应用；另一方面，一次微分式  $a(x, y)dx + b(x, y)dy$  的积分因子存在性，对理解常微分方程

$$a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0 \quad (\text{F.1})$$

也至关重要。这是因为如果存在积分因子  $\lambda(x, y)$ ，以及函数  $\varphi(x, y)$  使得

$$d\varphi(x, y) = \lambda(x, y)(a(x, y)dx + b(x, y)dy) \quad (\text{F.2})$$

那么，方程(F.1)就等价于  $d\varphi = 0$ ，左右两边同时积分可得  $\varphi(x, y) = C$ 。再通过这一隐式方程，可以得到解  $y(x)$ 。

综上两点，我们有必要掌握积分因子存在性的证明。虽然任何一本常微分教材（比如<sup>[12]</sup>）都会涉及到这一部分内容，然而限于常微分教材自身由易到难的逻辑，常微分课程一般来不及讲授这些内容；同时由于教材篇幅限制，往往也并没有表述的特别清晰。使得学生，包括读本科时的笔者，非常困惑，甚至产生了长达 20 余年的误解。所以，我们接下来具体证明积分因子的存在性，也就是定理5.7，并理清它和求解常微分方程以及线性偏微分方程的关系。以下所有讨论默认都在一次微分式的定义域中进行。

在给出严格证明之前，我们先给出一种看似正确的“自然的思路”，这也是很多初学

者容易陷入的误区。(F.2) 式等价于

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = \lambda(x, y)a(x, y) \\ \frac{\partial w}{\partial y} = \lambda(x, y)b(x, y) \end{cases} \quad (\text{F.3})$$

需要先把  $\lambda(x, y)$  求出来。来看偏微分方程组的相容性条件：第一式关于  $y$  求导，第二式关于  $x$  求导，有

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} a(x, y) + \lambda(x, y) \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} b(x, y) + \lambda(x, y) \frac{\partial b}{\partial x}$$

即求解如下关于  $\lambda(x, y)$  的一阶线性偏微分方程：

$$b(x, y) \frac{\partial \lambda}{\partial x} - a(x, y) \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \left( \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) \lambda(x, y) = 0 \quad (\text{F.4})$$

一旦求解出  $\lambda(x, y)$ ，那么再根据相容性条件，方程(F.3)中的  $\varphi$  也就可以求解出来（比如通过路径积分）。**如何求解偏微分方程F.4?** 自然是化为常微分方程。做待定的变量代换：

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$$

使得

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

由于可逆，故  $x, y$  可反解为  $\xi, \eta$  的函数。令  $\tilde{\lambda}(\xi, \eta) = \lambda(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ ，于是  $\lambda(x, y) = \tilde{\lambda}(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ 。根据链式法则有

$$\left( b \frac{\partial \varphi}{\partial x} - a \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \xi} + \left( b \frac{\partial \psi}{\partial x} - a \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \eta} + \left( \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) \tilde{\lambda}(\xi, \eta) = 0$$

我们试图取到合适  $\varphi$ ，使得

$$b \frac{\partial \varphi}{\partial x} - a \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (\text{F.5})$$

一旦能找到这样的  $\varphi$ ，和选定的  $\psi(x, y)$ （不唯一，只要使得 Jacobi 非退化即可），那么代入  $\tilde{\lambda}$  的方程中，就会得到

$$\left( b \frac{\partial \psi}{\partial x} - a \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \eta} + \left( \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) \tilde{\lambda}(\xi, \eta) = 0$$

是关于  $\eta$  的常微分方程, 求解出后做逆变换, 就可以得到最初始方程的解  $\lambda(x, y)$ 。

然而, 虽然偏微分方程(F.5)比原来的偏微分方程(F.4)简单, 但是也不容易求解。事实上求解这一个偏微分方程的解需要找到初始的非线性常微分方程(F.1)的隐式通解  $\varphi(x, y) = h$ , 进而  $\varphi(x, y)$  成为一阶线性偏微分方程 (F.5) 的解。

大家显然应该注意到了, 这又回到了我们的出发点: 也就是寻找  $b(x, y)dy + a(x, y)dx$  的积分因子转变成了求解方程

$$a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0$$

的隐式通解。这即便不能称为循环论证, 也至少是原地打转, 没有任何的推进。

常微分教材<sup>[12]</sup>在第二章第5节“积分因子法”中已经非常明确地指出将积分因子的存在性转化为偏微分方程求解是毫无意义的, 因为求解偏微分方程反过来需要来求解这样类型的常微分方程。然而教材介绍一阶偏微分方程的求解是在第十一章, 绝大多数高校教学中都没有讲到这一部分; 即便涉及到, 也仅仅是蜻蜓点水, 导致学生思路没有形成闭环, 脑海中无法形成清晰的图景。

所以, 我们需要通过直接求解非线性常微分方程来寻找一次微分式  $a(x, y)dx + b(x, y)dy$  的积分因子, 或者更准确地说, 是寻找相应常微分方程的首次积分。我们在5.2.2小节中引入了一般常微分方程组的首次积分的定义, 不过当前我们仅限于单个常微分方程讨论, 一方面是为了简洁, 另一方面积分因子的存在性也只用到了单个一阶方程的结论。为了读者阅读方便, 我们重新叙述下单个一阶常微分方程首次积分的定义:

定义 F.1. 对于定义在区域  $D$  上的常微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (\text{F.6})$$

如果在  $D$  的子区域  $G$  上, 存在二元连续函数  $\varphi(x, y)$ , 且对变量  $x$  和  $y$  都分别连续可微。同时  $\varphi(x, y)$  整体不是常数, 但是限制在方程F.6的解  $y = y(x)$  上均为常数, 则  $\varphi(x, y) = C$  称为方程F.6在区域  $G$  上的一个首次积分, 其中  $C$  为任意给定的常数。有时也简称  $\varphi(x, y)$  为首次积分。

特别的, 单个一阶常微分方程的首次积分, 往往也被称为隐式通解。接下来, 我们就来证明首次积分的存在性定理。

定理 F.2. 任给点  $p \in D$ , 则存在  $p$  点的一个邻域  $G \subset D$ , 使得常微分方程F.6在区域  $G$  上有一个首次积分。

证明. 根据常微分方程理论 (参见<sup>[12]</sup>, 第五章第 4 节: 解对初值和参数的连续可微性), 必然有  $x_0$  的一个邻域  $I$  和  $y_0$  的一个邻域  $J$ , 使得对于任意给定的  $y_1 \in J$  作为  $x_0$  点的初值, 方程(F.6)有唯一解  $y = t(x, y_1)$ ,  $x \in I$ , 即

$$\frac{\partial t(x, y_1)}{\partial x} = f(x, t(x, y_1))$$

其中的  $y_1$  视为参数. 并且满足初值条件

$$t(x_0, y_1) = y_1 \quad (\text{F.7})$$

除了解的存在唯一性外, 更进一步, 常微分方程的解  $t(x, y_1)$  连续可微地依赖初值  $y_1$ , 故可以对(F.7)左右同时关于  $y_1$  求偏导, 有

$$\frac{\partial t(x_0, y_1)}{\partial y_1} = 1 \neq 0$$

同时  $\frac{\partial t(x, y_1)}{\partial y_1}$  关于自变量  $x$  自然是连续的, 于是存在  $x_0$  的一个更小的邻域  $I' \subset I$ , 使得

$$\frac{\partial t(x, y_1)}{\partial y_1} \neq 0, \quad \forall (x, y_1) \in I' \times J$$

将  $(x_1, y_1) \in I' \times J$  视为参数空间, 考虑从  $I' \times J$  到  $\mathbb{R}^2$  的一个映射, 也就是二元函数组:

$$\begin{cases} x = s(x_1, y_1) \equiv x_1 \\ y = t(x_1, y_1) \end{cases}$$

该映射的 Jacobi 行列式为

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_1} & \frac{\partial x}{\partial y_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial y_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ f(x_1, t(x_1, y_1)) & \frac{\partial t(x_1, y_1)}{\partial y_1} \end{vmatrix} = \frac{\partial t(x_1, y_1)}{\partial y_1} \neq 0$$

根据反函数定理, 在一个更小的邻域内, 存在函数组

$$\begin{cases} x_1 = \psi(x, y) \\ y_1 = \varphi(x, y) \end{cases}$$

使得

$$\begin{cases} \psi(s(x_1, y_1), t(x_1, y_1)) = x_1 \\ \varphi(s(x_1, y_1), t(x_1, y_1)) = y_1 \end{cases}$$

其中, 第二个式子即为

$$\varphi(x, t(x, y_1)) = y_1$$

当  $y_1$  取定, 不妨记为  $C$ , 这意味这常微分方程(F.6)的解  $y = t(x, C)$  满足

$$\varphi(x, t(x, C)) = C$$

也就是函数  $\varphi(x, y)$  就是所谓的首次积分。定理得证。  $\square$

总之, 我们是通过映射的逆映射求出方程(F.6)的隐式通解, 或者等价的, 首次积分。而不是通过偏微分方程求解。内在逻辑也很清晰, 求解偏微分方程是建立在求解常微分方程的基础之上的, 当然用偏微分方程求解一般的常微分方程是毫无意义的。

反过来, 首次积分可以帮助我们简化和求解常微分方程组。特别是在单个常微分方程的情形下, 找到首次积分就意味着得到了常微分方程的解。我们先来证明一个首次积分的性质

**引理 F.3.** 非常数的函数  $\varphi(x, y)$  是方程  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  在区域  $G$  上的一个首次积分, 当且仅当

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} f = 0 \quad (\text{F.8})$$

在区域  $G$  上恒成立。

**证明.** 充分性显然, 我们只要证必要性即可。给定初值  $(x_0, y_0) \in G$ , 方程  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  有唯一解  $y = y(x; x_0, y_0)$ 。根据首次积分的定义,  $\varphi(x, y(x; x_0, y_0)) \equiv 0$ 。不妨记函数  $y = y(x; x_0, y_0)$  的图像为过  $(x_0, y_0)$  的一条积分曲线  $\Gamma_{(x_0, y_0)}$ , 那么, 限制在该曲线上, (F.8)式成立。

然而, 由于点  $(x_0, y_0)$  可以任意选取, 同时积分曲线也都局部存在, 显然(F.8)式在整个区域  $G$  上都成立。  $\square$

现在假定我们已经找到方程(F.6)的首次积分  $\varphi(x, y)$ , 由于首次积分非常数, 我们必定可以找到一点  $p \in G$ , 使得在  $p$  点的邻域  $G_0 \subset G$  内有  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$ , 根据隐函数定理, 存在  $\varphi(x, y(x)) = C$  的显式反解  $y_C(x)$ , 即

$$\varphi(x, y_C(x)) \equiv C$$

对左右两端关于  $x$  求偏导, 有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy_C}{dx} = 0$$

两边同除  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ , 由(F.8)式, 有

$$-f(x, y) + \frac{dy_C}{dx} = 0$$

也就是  $y_C(x)$  一定满足常微分方程(F.6)。这也是我们把单个一阶常微分方程的首次积分也称为隐式通解的原因。

有了首次积分的存在性做准备, 我们来找一次微分式  $a(x, y)dx + b(x, y)dy$  的积分因子。假定  $b(x, y)$  不为零, 我们考察方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a(x, y)}{b(x, y)}$$

为了简化记号, 不妨记  $f(x, y) = -\frac{a(x, y)}{b(x, y)}$ 。已经知道对于方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

存在首次积分  $\varphi(x, y)$ , 对首次积分  $\varphi(x, y)$  求全微分, 根据之前  $\varphi(x, y)$  的构造过程, 有

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = -\frac{f(x, y)}{\frac{\partial t(x_1, y_1)}{\partial y_1}} dx + \frac{1}{\frac{\partial t(x_1, y_1)}{\partial y_1}} dy \\ &= \frac{a(x, y)}{b(x, y) \frac{\partial t(x_1, y_1)}{\partial y_1}} dx + \frac{1}{\frac{\partial t(x_1, y_1)}{\partial y_1}} dy \\ &= b(x, y) \frac{\partial t(x_1, y_1)}{\partial y_1} (a(x, y) dx + b(x, y) dy) \end{aligned}$$

即积分因子为  $\lambda(x, y) = b(x, y) \frac{\partial t(x_1, y_1)}{\partial y_1}$ 。至此我们就证明了定理5.7。不难发现, 所谓积分因子的存在性, 和首次积分的存在性, 是一回事。

值得注意的是, 微分方程及其首次积分, 还可以从更高更有意义的视角来审视, 即单参数变换群, 李群, 李代数角度。简而言之, 微分方程如果在单参数变换群下不变, 则它存在一个在单参数对称群下不变的积分因子, 进而得到首次积分。一个微分方程的全部单参数对称群构成了李群。这些单参数对称群的无穷小变换群就是李代数。从几何上看, 李代数中的元素就是区域上的切向量场。对这部分内容感兴趣的读者, 可以参考<sup>[30]</sup>的第五章。

## 复函数系数的二元一次实微分式

我们已经知道, 以实函数为系数的一次实微分式积分因子的存在性可以用来证明曲面上正交参数系的存在性。而在第9.2.2小节, 证明等温参数系, 也就是一种特殊的正交

参数系的存在性时, 我们会碰到复函数系数的一次实形式, 也就是

$$\phi = p(x, y)dx + q(x, y)dy$$

其中  $p(x, y), q(x, y)$  是复值的二元函数, 关于  $x, y$  两次以上连续可微, 这样的微分式的积分因子是否存在的问题。即是否存在曲面上复值的连续可微函数  $\lambda$  和  $z$ , 使得

$$dz = \lambda\phi$$

很容易注意到, 复值的情况下积分因子存在性无法通过实值的实一次微分式的积分因子存在性导出。两种情况有着根本性的差异, 需要另起炉灶来证明, 这其实就是 Korn-Lichtenstein 定理。Korn-Lichtenstein 定理的证明非常复杂, 为了更好地表明实值和复值两种情形的差异, 我们介绍当初 Gauss 所考虑的一种特殊情况, 也就是  $p(x, y), q(x, y)$  都关于  $x$  和  $y$  是实解析<sup>1</sup>时, 微分式积分因子存在性的证明。

首先, 类比与实解析, 我们也可以引入复解析的概念, 也就是函数  $f(z, w)$  关于  $z$  和  $w$  的泰勒展开都收敛。不难发现, 此时所谓的复解析, 就是我们通常讨论的解析函数(全纯函数)。

接下来, 我们证明一个命题

**命题 F.4.** 设  $f: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  是复解析函数, 则对于任意给定的  $(z^0, w^0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ , 微分方程

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w) \quad (\text{F.9})$$

在点  $z^0 \in \mathbb{C}$  的一个邻域内必有唯一的复解析函数解  $w = w(z)$  满足初始条件  $w(z^0) = w^0$ 。

证明. 将  $f, z, w$  都分解成实部和虚部, 简便起见, 记  $f(z, w) = f_1(z, w) + if_2(z, w)$ ,  $z = z_1 + iz_2$ ,  $w = w_1 + iw_2$ 。这样方程(F.9)变为

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial z_1} = \frac{\partial w_2}{\partial z_2} = f_1(z_1, z_2, w_1, w_2) \\ \frac{\partial w_2}{\partial z_1} = -\frac{\partial w_1}{\partial z_2} = f_2(z_1, z_2, w_1, w_2) \end{cases} \quad (\text{F.10})$$

进一步简化记号, 记  $f_{11} = f_{22} = f_1$ ,  $f_{12} = -f_{21} = -f_2$ , 则方程(F.10)变为

$$\frac{\partial w_i}{\partial z_j} = f_{ij}(z_1, z_2, w_1, w_2), \quad 1 \leq i, j \leq 2$$

<sup>1</sup>这里实解析意味着当  $y$  固定时, 函数关于  $x$  在某点处的泰勒展开式在这点的邻域内收敛; 固定  $x$  时类似

这是一个非线性的一阶偏微分方程组, 类似于我们之前推导的一阶线性偏微分方程组, 由  $\frac{\partial^2 w_i}{\partial z_k \partial z_j} = \frac{\partial^2 w_i}{\partial z_j \partial z_k}$  可以导出它解存在的相容性条件如下:

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial z_k} - \frac{\partial f_{ik}}{\partial z_j} + \sum_{l=1}^2 \frac{\partial f_{ij}}{\partial w_l} f_{lk} - \sum_{l=1}^2 \frac{\partial f_{ik}}{\partial w_l} f_{lj} \equiv 0 \quad i = 1, 2; j = 1, k = 2$$

具体写出, 并重新用  $f_1$  表示  $f_{11}, f_{22}$ ,  $f_2$  表示  $f_{21}, -f_{12}$ , 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial z_2} + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} - \frac{\partial f_1}{\partial w_1} f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial w_2} f_1 + \frac{\partial f_2}{\partial w_1} f_1 + \frac{\partial f_2}{\partial w_2} f_2 &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_2} - \frac{\partial f_1}{\partial z_1} - \frac{\partial f_2}{\partial w_1} f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial w_2} f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial w_1} f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial w_2} f_2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

由于函数  $f(z, w)$  是复解析的, 所以它的实部和虚部满足 Cauchy-Riemann 方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} = \frac{\partial f_2}{\partial z_2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial z_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial w_1} = \frac{\partial f_2}{\partial w_2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial w_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial w_1} \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

代入(F.11)式左端自然得到零, 即相容性条件满足。于是方程组(F.10)对于给定的  $z^0 = z_1^0 + iz_2^0, w_0 = w_1^0 + iw_2^0$ , 在  $z^0 \in \mathbb{C}$  的一个邻域上有解  $(w_1(z_1, z_2), w_2(z_1, z_2))$ , 且满足初值条件  $w_1(z_1^0, z_2^0) = w_1^0, w_2(z_1^0, z_2^0) = w_2^0$ 。现在, 对于  $z = z_1 + iz_2$ , 考虑  $w(z) = w_1(z) + iw_2(z)$ , 因为(F.10)式天然成立, 故  $w(z)$  是  $z$  的解析函数, 满足

$$\frac{dw(z)}{dz} = f(z, w(z))$$

且符合初值条件  $w(z^0) = w^0$ 。

同时, 由于复解析性质, 我们可以把方程(F.9)左右两边同时在某点处按多项式展开, 比较系数不难得到解的唯一性。□

有了上述关于方程复解析解存在唯一性的命题, 那么下面定理

**定理 F.5.** 设  $p(x, y), q(x, y)$  是定义在区域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上的两个不同时为零的复值实解析解函数。对于任意一点  $(x_0, y_0) \in D$ , 必有  $(x_0, y_0)$  的一个邻域  $U \subset D$ , 以及  $U$  上的非零的复值实解析函数  $\lambda(x, y)$ , 使得  $\lambda(x, y)$  是一次微分式

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy$$

的积分因子。即有复值实解析函数  $\varphi(x, y)$ , 使得

$$d\varphi(x, y) = \lambda(x, y)(p(x, y)dx + q(x, y)dy)$$

的证明思路和定理5.7的证明几乎完全一致,只需将实函数的反函数定理换成复函数的反函数定理即可,我们这里就不再展开了。感兴趣的同学可以自己推导,或者参阅<sup>[10]</sup>中附录 §1.5。



## 附录 G

### 切映照的复合

复合函数求导数是我们熟知的内容，考虑  $h(x) = g(f(x))$ ，则

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{dg}{df} \frac{df}{dx}$$

对于多元函数也可以类似讨论。考虑多元函数

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

其导数，也就是所谓的 Jacobi 阵： $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{(i,j)}$ 。假如有另外一组  $m$  元函数  $g_1, g_2, \dots, g_l$ 。记

$$\begin{aligned} & h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ & = g_i(f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)), \\ & \quad i = 1, \dots, l \end{aligned}$$

可以验证

$$\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial g_i}{\partial f_k}\right) \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right)$$

即复合函数的 Jacobi 矩阵等于各自的 Jacobi 的矩阵相乘。可见，所谓的复合函数链式求导法则，本质上就是矩阵的乘法。

而一般的切映射，可以视为 Jacobi 矩阵的推广。这是因为

- 在最简单的情形下, 也就是欧氏空间之间的映射:  $(f_1, f_2, \dots, f_m): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  的切映射就是函数的 Jacobi 阵  $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{(i,j)}$ ;
- 给定两个流形  $M$  和  $N$ , 和流形之间的映射  $\sigma$ 。分别再选定  $M$  上的局部坐标系  $x^1, \dots, x^m$  和  $N$  上的局部坐标系  $y^1, \dots, y^n$ , 则切映射  $\sigma_*: TM \rightarrow TN$  在基底  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^m$  和  $\{\frac{\partial}{\partial y^j}\}_{j=1}^n$  下矩阵就是  $\tilde{\sigma}$  的 Jacobi 矩阵, 这里  $\tilde{\sigma}$  是映射  $\sigma$  在局部坐标系下的表示。

切映射作为 Jacobi 矩阵的推广, 切映射的复合也有类似的性质。感兴趣的同学可以尝试证明:

**定理 G.1.** 若  $\sigma_1: S_1 \rightarrow S_2$ ,  $\sigma_2: S_2 \rightarrow S_3$  均为曲面间的连续可微映射。记  $\tau = \sigma_2 \circ \sigma_1: S_1 \rightarrow S_3$  为两个映射的复合, 则其切映射同样为两个切映射的复合, 即对任意一点  $p \in S_1$ , 有  $\tau_{*,p} = \sigma_{2*,\sigma_1(p)} \circ \sigma_{1*,p}$ 。

## 附录 H

# 求解偏微分方程得到锥面到平面的保长映射

在得到锥面的第一基本形式

$$I = v^2 |\vec{l}'(u)|^2 du^2 + dv^2$$

后，我们希望通过参数变换把这一第一基本形式变为标准形。最先想到的是令  $ds = |\vec{l}'(u)|du$ ，于是第一基本形式变为

$$I = v^2 (ds)^2 + (dv)^2$$

此时如果无法直接猜出这一表达式和极坐标的关联，也可以通过具体求解保长映射对应的方程得到相应的参数变换。假设保长映射由 
$$\begin{cases} x = f(s, v) \\ y = g(s, v) \end{cases}$$
 给出，直接代入平面的第一基本形式

$$I_{E^2} = dx^2 + dy^2$$

中，和锥面第一基本形式比较；或根据保长映射的充分必要条件：

$$\begin{pmatrix} E_1(u_1, v_1) & F_1(u_1, v_1) \\ F_1(u_1, v_1) & G_1(u_1, v_1) \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} E_2(u_2, v_2) & F_2(u_2, v_2) \\ F_2(u_2, v_2) & G_2(u_2, v_2) \end{pmatrix} J^T$$

都可以得到如下关系式

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)^2 = v^2 \\ \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial g}{\partial v} = 0 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

接下来想办法求解这样的偏微分方程组。注意到方程组等价于

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{1}{v} \frac{\partial g}{\partial s}\right)^2 = 1 \\ \left(\frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial s}\right) \frac{\partial f}{\partial v} + \left(\frac{1}{v} \frac{\partial g}{\partial s}\right) \frac{\partial g}{\partial v} = 0 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

这意味着对应矩阵是一个正交矩阵。从而可以令

$$\begin{cases} \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial s} = \cos \theta(s, v) \\ \frac{\partial f}{\partial v} = \sin \theta(s, v) \\ \frac{1}{v} \frac{\partial g}{\partial s} = -\sin \theta(s, v) \\ \frac{\partial g}{\partial v} = \cos \theta(s, v) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial s} = v \cos \theta(s, v) \\ \frac{\partial f}{\partial v} = \sin \theta(s, v) \\ \frac{\partial g}{\partial s} = -v \sin \theta(s, v) \\ \frac{\partial g}{\partial v} = \cos \theta(s, v) \end{cases} \quad (\text{H.1})$$

由于参数变换都是三次以上连续可微, 故有  $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial s} = \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial v}$ ,  $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial s} = \frac{\partial^2 g}{\partial s \partial v}$ , 将(H.1)式代入, 有

$$\begin{cases} \cos \theta = v \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial v} + \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial s} \\ -\sin \theta = v \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial v} - \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial s} \end{cases}$$

视为  $\frac{\partial \theta}{\partial v}, \frac{\partial \theta}{\partial s}$  的线性方程组, 可解得

$$\frac{\partial \theta}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial s} = 1$$

显然上述一阶偏微分方程组有解  $\theta = s$ 。代回到方程(H.1), 可解得  $\begin{cases} f = v \sin s \\ g = v \cos s \end{cases}$ , 恰为极坐标和欧氏坐标的关系。

实际上, 我们计算这个例子的用意在于, 对于简单到不能再简单的第一基本形式

$$I = v^2(ds)^2 + (dv)^2$$

和

$$I_{E^2} = dx^2 + dy^2,$$

通过求解偏微分方程, 得到保长映射的坐标表达式 (抑或参数变换的表达式), 都是非常复杂的一件事。可想而知, 对于一般的两个第一基本形式, 直接从保长映射对应的非线性偏微分方程入手, 研究该方程是否有解, 或是要求出该方程的显式解, 都是几乎不可能完成的任务。



## 附录 I

### 测地挠率的各种表达式及其推导

在8.2节中，我们从  $\tau_g = (\vec{r}'(s), \vec{n}(s), \vec{n}'(s))$  这一式子出发，得到了测地挠率  $\tau_g$  的具体表达式：

$$\tau_g = \sqrt{g} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} & \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^2 & b_2^2 \\ -b_1^1 & -b_2^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} \\ \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix}$$

实际上，从更本质的观点看，测地挠率应该是从属于 Weingarten 映射的一个几何量，也就是我们一开始，就应该把测地挠率理解为  $\tau_g = \mathcal{W}(\vec{e}_1) \cdot \vec{e}_2$ 。同样的，从这一表达式出发，可以更方便地得到  $\tau_g$  的具体表达式。具体来看，不妨设

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} & \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix}$$

于是

$$\mathcal{W}(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} & \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix}$$

同时

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} & \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{n} \times \vec{r}_1 \\ \vec{n} \times \vec{r}_2 \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}(\vec{e}_1) \cdot \vec{e}_2 &= \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} & \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{n} \times \vec{r}_1 & \vec{n} \times \vec{r}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} \\ \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} & \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vec{n} \times \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1 \\ \vec{n} \times \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} \\ \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} \\
 &= \sqrt{g} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} & \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} \\ \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} \\
 &= \sqrt{g} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} & \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^2 & -b_1^1 \\ b_2^2 & -b_2^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} \\ \frac{du^2}{ds} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

这一表达式即我们之前推导过的表达式一致。

最后，根据 Euler 公式，测地挠率还可以写为  $\tau_g = \frac{1}{2} \frac{d\kappa_n(\theta)}{d\theta}$ ，具体推导过程作为习题。

## 附录 J

# Liouville 公式和行列式形式的测地曲率表达式之间的关系

在8.6.1小节中，我们选择从测地曲率最原始的表达式  $\kappa_g = \frac{d\vec{e}_1(s)}{ds} \cdot \vec{e}_2$  出发，推导出了测地曲率的 Liouville 公式：

$$\kappa_g = \frac{d\theta(s)}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \log E}{\partial v} \cos \theta + \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \log G}{\partial u} \sin \theta$$

其中， $(u, v)$  为曲面上的正交参数系。而没有考虑从一般情况下测地曲率的具体表达式

$$\kappa_g = \sqrt{g} \left| \begin{array}{cc} \frac{du^1(s)}{ds} & \frac{d^2u^1(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} \\ \frac{du^2(s)}{ds} & \frac{d^2u^2(s)}{ds^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^2 \frac{du^\alpha(s)}{ds} \frac{du^\beta(s)}{ds} \end{array} \right|$$

出发来证明。理论上，Liouville 公式和正交参数下行列式形式的测地曲率表达式当然也是等价的，相互之间也可以推导，只是相对复杂。

先从 Liouville 公式出发，推导行列式形式的测地曲率表达式。Liouville 公式中不仅  $\cos \theta, \sin \theta$  是可以通过曲线求出的，角度  $\theta$  自身也可以通过各种方式确定下来的。对

$$\cos \theta = \sqrt{E} \frac{du}{ds}, \sin \theta = \sqrt{G} \frac{dv}{ds}$$

两式求导，有

$$\begin{aligned} -\sin \theta \frac{d\theta}{ds} &= \frac{d\sqrt{E}}{ds} \frac{du}{ds} + \sqrt{E} \frac{d^2u}{ds^2} \\ \cos \theta \frac{d\theta}{ds} &= \frac{d\sqrt{G}}{ds} \frac{dv}{ds} + \sqrt{G} \frac{d^2v}{ds^2} \end{aligned}$$

分别乘以  $-\sin\theta$  和  $\cos\theta$  再做和, 可得

$$\frac{d\theta}{ds} = \left| \begin{array}{cc} \sqrt{E} \frac{du}{ds} & \frac{d\sqrt{E}}{ds} \frac{du}{ds} + \sqrt{E} \frac{d^2u}{ds^2} \\ \sqrt{G} \frac{dv}{ds} & \frac{d\sqrt{G}}{ds} \frac{dv}{ds} + \sqrt{G} \frac{d^2v}{ds^2} \end{array} \right|$$

而

$$-\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( E_v \frac{du}{ds} - G_u \frac{dv}{ds} \right) = - \left| \begin{array}{cc} \sqrt{E} \frac{du}{ds} & \frac{1}{2\sqrt{E}} (\log G)_u \\ \sqrt{G} \frac{dv}{ds} & \frac{1}{2\sqrt{G}} (\log E)_v \end{array} \right|$$

于是

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \left| \begin{array}{cc} \sqrt{E} \frac{du}{ds} & \frac{d\sqrt{E}}{ds} \frac{du}{ds} + \sqrt{E} \frac{d^2u}{ds^2} - \frac{1}{2\sqrt{E}} (\log G)_u \\ \sqrt{G} \frac{dv}{ds} & \frac{d\sqrt{G}}{ds} \frac{dv}{ds} + \sqrt{G} \frac{d^2v}{ds^2} - \frac{1}{2\sqrt{G}} (\log E)_v \end{array} \right| \\ &= \sqrt{EG} \left| \begin{array}{cc} \frac{du}{ds} & \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{1}{2} (\log E)_s \frac{du}{ds} - \frac{1}{2E} (\log G)_u \\ \frac{dv}{ds} & \frac{d^2v}{ds^2} + \frac{1}{2} (\log G)_s \frac{dv}{ds} - \frac{1}{2G} (\log E)_v \end{array} \right| \end{aligned}$$

再注意到  $s$  为弧长参数,

$$E \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + G \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 = 1$$

以及

$$\begin{aligned} (\log E)_s &= (\log E)_u \frac{du}{ds} + (\log E)_v \frac{dv}{ds}, \\ (\log G)_s &= (\log G)_u \frac{du}{ds} + (\log G)_v \frac{dv}{ds}. \end{aligned}$$

代入, 有

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \sqrt{EG} \\ & \left| \begin{array}{cc} \frac{du}{ds} & \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{1}{2} (\log E)_u \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} (\log E)_v \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} - \frac{1}{2} (\log G)_u \left( \frac{du}{ds} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{G_u}{E} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 \\ \frac{dv}{ds} & \frac{d^2v}{ds^2} + \frac{1}{2} (\log G)_v \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} (\log G)_u \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} - \frac{1}{2} (\log E)_v \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{E_v}{G} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 \end{array} \right| \end{aligned}$$

回忆正交参数系下的 Christoffel 记号公式:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \log E}{\partial u}, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} \frac{\partial \log E}{\partial v}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2E} \frac{\partial G}{\partial u} \\ \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial v}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial \log G}{\partial u}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \log G}{\partial v} \end{aligned}$$

继续代入

$$\begin{aligned}
 \kappa_g &= \sqrt{EG} \left| \begin{array}{c} \frac{du}{ds} \frac{d^2u}{ds^2} + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \Gamma_{12}^1 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} - \Gamma_{12}^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \\ \frac{dv}{ds} \frac{d^2v}{ds^2} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \Gamma_{12}^2 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} - \Gamma_{12}^1 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 \end{array} \right| \\
 &= \sqrt{EG} \left| \begin{array}{c} \frac{du}{ds} \frac{d^2u}{ds^2} + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \\ \frac{dv}{ds} \frac{d^2v}{ds^2} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 \end{array} \right| \\
 &\quad - \sqrt{EG} \left| \begin{array}{c} \frac{du}{ds} \Gamma_{12}^1 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{12}^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 \\ \frac{dv}{ds} \Gamma_{12}^2 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{12}^1 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \end{array} \right| \\
 &= \sqrt{EG} \left| \begin{array}{c} \frac{du}{ds} \frac{d^2u}{ds^2} + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \\ \frac{dv}{ds} \frac{d^2v}{ds^2} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 \end{array} \right|
 \end{aligned}$$

与初始推导的测地曲率的表达式相同。显然整个过程的推导是可逆的。



## 附录 K

# 用更高的复几何观点来看曲面等温参数系的存在性

曲面等温参数系的存在性可以放在更一般的复几何中讨论，但是解释起来比较麻烦，主要是因为复几何当中的各种概念我们都没有学习过。但是鉴于未来的复几何课程往往也不会讨论曲面这一特殊情形，还是有必要简单地介绍下如何从复几何的角度来看曲面上等温参数系的存在性。其中出现的各种名词，大家可以凭直觉来理解，不一定要花功夫查证它们的严格定义。

我们先把复几何中研究对象分成四个不同的层次，且范围严格渐次缩小： $2n$  维的实流形，近复流形， $n$  维复流形，Kähler 流形。接下来我们具体看它们的定义以及之间的关联。

首先，如果一个  $2n$  维的实流形  $M$  的切丛上存在一个自同构，记做  $J$ ，使得  $J^2 = -\text{Id}$ ，那么我们把  $J$  称为  $M$  上的近复结构，同时  $M$  称为近复流形。如果一个近复流形  $(M, J)$  上存在黎曼度量  $h$ ，和近复结构相容，即对任意切向量  $X, Y$ ，有  $h(X, Y) = h(JX, JY)$ ，我们就称  $h$  为 Hermitian 度量， $(M, J, h)$  称为近 Hermitian 流形。利用单位分解，不难说明近复流形上一定存在 Hermitian 度量。

一个实的  $2n$  维流形上不一定有近复结构，存在拓扑上的障碍，大家可以参考知乎上的回答：<https://www.zhihu.com/question/55217825>。此外，我们还可以在一个近复流形上定义近复结构对应的 Nijenhuis 张量：

$$N^J(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY]$$

其中  $X, Y$  均为  $M$  上的切向量场,  $[\ , \ ]$  是切向量场之间的李括号积。如果一个近复结构的 Nijenhuis 张量恒为零, 则我们称这样的近复结构是可积的。当然, 近复结构的可积性有很多种不同, 但等价的表述方式, 我们选取了其中最简单的。自然存在很多近复结构不可积的例子, 见讨论: <https://www.zhihu.com/question/38290928>。但是, 很容易验证, 实二维情形下的 Nijenhuis 张量一定是消失的, 即实二维实流形上的近复结构必然是可积的。

其次, 一个  $2n$  维的实流形  $M$  称为复流形, 是说它有复的坐标覆盖, 且坐标卡之间的转移函数都是解析的。我们把坐标覆盖在全纯转移函数下的等价类称为该复流形的复结构。注意到, 一个复流形的切丛上天然就有复数  $i$  所诱导出的自同构, 接下来就是著名的 Newlander-Nirenberg 定理:

**定理.** 一个可积的近复结构, 一定是由复流形的复结构诱导出来的。

这意味着可积的近复结构就是复结构, 近复结构可积的近复流形就是复流形。定理的证明非常复杂, 感兴趣的同学可以参考<sup>[31]</sup>或<sup>[32]</sup>。

最后, 如果一个复流形  $(M, J)$  上存在黎曼度量  $h$ , 和复结构相容, 即对任意切向量  $X, Y$ , 有  $h(X, Y) = h(JX, JY)$ , 我们也一样称  $h$  为 Hermitian 度量,  $(M, J, h)$  则称为 Hermitian 流形。显然, 和近复流形上的 Hermitian 度量一样, 复流形上也一定存在 Hermitian 度量。更进一步, 令 Hermitian 流形上的 2-形式  $\Omega(X, Y) \triangleq h(JX, Y)$ , 如果 2-形式  $\Omega$  是闭的, 则我们称  $h$  为 Kähler 度量, 该流形为 Kähler 流形。一个复流形上是否存在 Kähler 度量也是存在拓扑上的障碍的, 可以参考: <https://mathoverflow.net/questions/186139/>。

有了这些概念的准备, 我们回到空间中的曲面上等温参数系的存在性。

1. 事先观察到对于近 Hermitian 流形, 有

$$h(X, JX) = h(JX, J^2X) = -h(JX, X) = -h(X, JX)$$

即  $h(X, JX) = 0$ ,  $X$  和  $JX$  必然正交。现在来看曲面, 一方面, 在实 2 维的情形下, 近复结构可以视为右旋  $90^\circ$ ; 另一方面, 空间中的曲面自带诱导度量, 也就是第一基本形式, 记为  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 。切向量  $X$  给定后, 其垂直方向完全确定, 故在定向确定的前提下, 近复结构完全被度量确定<sup>1</sup>, 这时, 曲面上的第一基本形式会自带近复结构, 而度量  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  自然成为 Hermitian 度量, 故之后我们用记号  $h(\cdot, \cdot)$  代替  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 。

<sup>1</sup>可以更具体地看。先取单位正交基  $\vec{e}_1$  和  $\vec{e}_2$ , 再令  $J\vec{e}_1 = \vec{e}_2$ ,  $J\vec{e}_2 = -\vec{e}_1$ , 这样线性映射  $J$  在基底上的作用确定, 线性映射  $J$  本身就确定下来。同时, 令  $X = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ , 有  $J(JX) = J(a\vec{e}_2 - b\vec{e}_1) = -a\vec{e}_1 - b\vec{e}_2 = -X$ ,

2. 我们已经知道, 在曲面上的任意近复结构必然可积, 故由 Newlander-Nirenberg 定理, 上述由度量决定的近复结构一定是复结构。换言之, 此时曲面上的复结构可以由局部复坐标导出, 也就是存在  $z = u + iv$ , 使得  $J \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v}$ <sup>1</sup>。
3. 由于实二维曲面上的任何 2-形式都是闭的, 显然, 也包括通过 Hermitian 度量  $h$  构造的二形式  $\Omega$ , 这意味着曲面上的度量 (第一基本形式) 是 Kähler 度量。
4. 最后, 我们来看这一 Kähler 度量在局部坐标下的表达。一方面由于  $J \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial}{\partial u}$  和  $\frac{\partial}{\partial v}$  正交; 另一方面,  $h(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}) = h(J \frac{\partial}{\partial u}, J \frac{\partial}{\partial u}) = h(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u})$ , 故第一基本形式为  $I = \lambda^2(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)$ , 即  $(u, v)$  为曲面上等温参数系。换言之, 所谓存在等温参数系, 就是存在复坐标  $z = u + iv$ , 使得实二维曲面作为一个复流形, 其上的度量成为 Kähler 度量。即空间中带有度量的曲面, 是 Kähler 流形的一个特例。

总结一下, 曲面上等温参数系的存在性, 放置在复几何视角下, 其实是一系列定理和命题组合后的结果, 但是其中真正非平凡的部分, 是 Newlander-Nirenberg 定理。换言之, 如果笔者的理解没有错的话, 保证曲面上等温参数系存在的 Korn-Lichtenstein 定理, 可以视为 Newlander-Nirenberg 定理在复一维时的特例。

---

也就是这样构造的  $J$  就是近复结构。进一步, 令  $Y = c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2$ , 不难验证

$$\langle JX, JY \rangle = \langle a\vec{e}_2 - b\vec{e}_1, c\vec{e}_2 - d\vec{e}_1 \rangle = ac + bd = \langle X, Y \rangle$$

换言之, 曲面上给定度量, 就给出了单位正交标架场, 进而确定了近复结构, 同时这样的近复结构一定和原有的度量相容, 成为 Hermitian 度量。

<sup>1</sup>注意, 这件事并不等同于事先给定曲面上的一个单位正交标架场  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  使得  $\frac{\partial}{\partial u} = \lambda\vec{e}_1, \frac{\partial}{\partial v} = \lambda\vec{e}_2$ 。因为我们之前在研究积分曲线的时候证明过, 对于一般的切量场, 最多只能做到  $\frac{\partial}{\partial u} = \lambda\vec{e}_1, \frac{\partial}{\partial v} = \mu\vec{e}_2$ ; 同时一个复结构  $J$ , 可以用不同的单位正交标架场来表达。



## 附录 L

# Bernstein 定理不使用 Weierstrass 表示的证明方法

我们已经在10.1.4小节中证明过了 Bernstein 定理,

**定理 (Bernstein).** 设  $f(x, y)$  是定义在全平面  $\mathbb{R}^2$  上极小曲面方程的解, 则  $f$  为线性函数。

当然, 当时需要使用极小图的 Weierstrass 表示, 可是很多同学对 Weierstrass 表示掌握的不到位。那么有没有其他的证法呢? 以下是 Nitsche 的证法。

**证明.** 首先, 还是对极小图  $(x, y, f(x, y))$  做形如(10.13)式的 Levy 变换。因为 Levy 变换是整体且 1-1 的, 我们可以构造复函数

$$F(u, v) = (x - \xi(x, y)) - i(y - \eta(x, y)) = (2x - u) - i(2y - v).$$

接下来希望证明  $F(u, v)$  是  $w = u + iv$  的解析函数。这等价于说明实函数

$$\alpha(u, v) = 2x - u$$

$$\beta(u, v) = -(2y - v)$$

关于  $(u, v)$  满足 Cauchy-Riemann 方程。为此, 我们需要计算  $x, y$  关于  $u, v$  的偏导数。具体来看, 已经知道 Levy 变换的 Jacobi 矩阵如下

$$J = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{yx} & 1 + \varphi_{yy} \end{pmatrix} \quad (\text{L.1})$$

于是

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{pmatrix} 1 + \varphi_{yy} & -\varphi_{xy} \\ -\varphi_{yx} & 1 + \varphi_{xx} \end{pmatrix}$$

其中, 根据(10.12)式, 有

$$\det J = 1 + \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2 = 2 + \varphi_{xx} + \varphi_{yy}$$

进而

$$\begin{aligned} \alpha_u &= 2x_u - 1 = \frac{2}{\det J}(1 + \varphi_{yy}) - 1 = \frac{\varphi_{yy} - \varphi_{xx}}{\det J} \\ \beta_v &= -2y_v + 1 = -\frac{2}{\det J}(1 + \varphi_{xx}) + 1 = \frac{\varphi_{yy} - \varphi_{xx}}{\det J} \\ \alpha_v &= 2x_v = -\frac{2\varphi_{xy}}{\det J} \\ \beta_u &= -2y_u = \frac{2\varphi_{xy}}{\det J} \end{aligned}$$

故  $\alpha_u = \beta_v$ ,  $\alpha_v = -\beta_u$ , 满足 Cauchy-Riemann 方程。

对于解析函数  $F(w)$ , 继续计算其导数

$$F'(w) = \alpha_u + i\beta_u = \frac{\varphi_{yy} - \varphi_{xx} + 2i\varphi_{xy}}{\det J}$$

一方面,

$$|F'(w)|^2 = \frac{(\varphi_{yy} - \varphi_{xx})^2 + 4\varphi_{xy}^2}{(2 + \varphi_{xx} + \varphi_{yy})^2} = \frac{\left(\frac{q^2-p^2}{g}\right)^2 + 4\left(\frac{pq}{g}\right)^2}{\left(\frac{2g+2+p^2+q^2}{g}\right)^2} = \left(\frac{p^2 + q^2}{2g + 2 + p^2 + q^2}\right)^2 < 1$$

也就是说  $F'(w)$  是全平面上的有界解析函数, 根据解析函数的 Liouville 定理, 必有  $F'(w)$  为常数。另一方面,

$$1 - |F'| = \frac{2g + 2}{2g + 2 + p^2 + q^2} = \frac{2g + 2}{g^2 + 2g + 1} = \frac{2}{g + 1}$$

也就说明了  $g$  是常数。进而

$$\det J = \frac{2g + 2 + p^2 + q^2}{g} = \frac{(g + 1)^2}{g}$$

也是常数。自然,  $\varphi_{xy}$  作为常数函数  $F'(w) \det J$  的虚部, 是常数; 同时  $\varphi_{yy} - \varphi_{xx}$  作为实部也是常数。但  $\det J$  是常数意味着  $\varphi_{xx} + \varphi_{yy}$  也是常数, 最终有  $\varphi_{xx}, \varphi_{yy}$  各自都是常数。最后再利用一次关系(10.12)式, 可以解出  $p = f_x, q = f_y$  也是常数, 所以  $f$  是线性函数。□

我们想强调一下, Nitsche 的证法本质上是使用了 Jörgens 的定理:

**定理.** 定义在全平面上的函数  $\varphi(x, y)$ , 有连续的两阶导数, 若满足 Monge-Ampère 方程

$$\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2 \equiv 1$$

且  $\varphi_{xx} > 0$ , 则  $\varphi_{xx}, \varphi_{xy}, \varphi_{yy}$  必为常数, 即  $\varphi(x, y)$  是一个关于  $x$  和  $y$  的二次多项式。

细心的同学不难发现, 上述证明中引入的解析函数  $F(w)$  的导数  $F'(w)$ , 就是由 Levy 变换构造的等温参数系下的 Weierstrass 表示中的  $\Phi$ :

$$F'(w) = 2x_u - 1 - i2y_u$$

而

$$\Phi = x_u - y_v - i(x_v + y_u)$$

代入  $x_u$  和  $y_v$  的具体表达式后, 不难发现两者是相同的。也就是这两种证法也没有本质的不同。

但是实际上, Bernstein 定理作为微分几何或者几何分析领域的一个很基本的定理, 是不少理论和工具小试牛刀的实验对象, 有非常多不同的证明方法。比如10.1.4小节中的 Heinz 估计就可以推导出 Bernstein 定理。其他各种不同的证法, 感兴趣的同学可以参考 [33] 或 [34]。



## 参考文献

- [1] 梅向明, 黄敬之. 微分几何[M]. 第五版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [2] 丘维声. 解析几何[M]. 第三版. 北京: 北京大学出版社, 2015.
- [3] ABBENA E, SALAMON S, GRAY A. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica[M]. Third ed. Chapman and Hall/CRC, 2006.
- [4] 别尔曼. Galilei 定理——摆线[M]. 哈尔滨: 哈尔滨大学出版社, 2021.
- [5] 陈省身, 陈维桓. 微分几何讲义[M]. 第二版. 北京: 北京大学出版社, 2001.
- [6] 吴传喜, 李光汉. 子流形几何[M]. 北京: 科学出版社出版, 2003.
- [7] 谢启鸿, 姚慕生, 吴泉水. 复旦博学·数学系列: 高等代数学[M]. 第四版. 上海: 复旦大学出版社, 2016.
- [8] 库洛什. 俄罗斯数学精品译丛: 高等代数教程, 柯召译[M]. 第一版. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2016.
- [9] 陈维桓. 微分流形初步[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [10] 陈维桓. 微分几何[M]. 第二版. 北京: 北京大学出版社, 2017.
- [11] 尤承业. 基础拓扑学讲义[M]. 第一版. 北京: 北京大学出版社, 1997.
- [12] 丁同仁, 李承志. 常微分方程教程[M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2022.
- [13] TESCHL G. Graduate studies in mathematics (140): Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems[M]. American Mathematical Society, 2012.

- [14] SPIVAK M. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry: Vol. 3[M]. Third ed. Houston: Publish or Perish, 1999.
- [15] KLINGENBERG W. Graduate texts in mathematics: Vol. 51 A Course in Differential Geometry[M]. First ed. Springer, 2013.
- [16] KUHNEL W. Student mathematical library: Vol. 77 Differential Geometry: Curves-Surfaces-Manifolds[M]. Third ed. American Mathematical Society, 2015.
- [17] FOOTE R L. Differential geometry of real Monge-Ampère foliations [J]. Mathematische Zeitschrift, 1987, 194: 331-350.
- [18] 彭家贵, 陈卿. 微分几何[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2021.
- [19] 伍鸿熙, 沈纯理, 虞言林. 现代数学基础: 黎曼几何初步[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [20] MOROIANU A. London mathematical society student texts (69): Lectures on Kähler Geometry[M]. Cambridge University Press, 2010.
- [21] HUYBRECHTS D. Universitext (utx): Complex Geometry-An Introduction[M]. Springer, 2005.
- [22] VAROLIN D. Graduate studies in mathematics (125): Riemann Surfaces by Way of Complex Analytic Geometry[M]. American Mathematical Society, 2011.
- [23] LI P. Cambridge studies in advanced mathematics (134): Geometric Analysis[M]. Cambridge University Press, 2012.
- [24] 嵇庆春. 微分几何简明教程[M]. 第一版. 北京: 科学出版社, 2021.
- [25] COLDING T H, MINICOZZI W P. Graduate studies in mathematics(121): A Course in Minimal Surfaces[M]. American Mathematical Society, 2011.
- [26] SIEGEL A. A Historical Review of the Isoperimetric Theorem in 2-D, and its place in Elementary Plane Geometry[Z]. 点击查看: Courant Institute of mathematical Sciences New York University, 2003.

- [27] HEHL A. The Isoperimetric Inequality[Z]. 点击查看: Eberhard-Karls Universitaet Tuebingen, 2013.
- [28] TAPP K. Undergraduate texts in mathematics(utm): Differential Geometry of Curves and Surfaces[M]. Springer, 2016.
- [29] 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程 (第二卷) [M]. 第 8 版. 北京: 高等教育出版社, 2023.
- [30] IBRAGIMOV N H. Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations[M]. Wiley, 1999.
- [31] NIRENBERG L. Cbms regional conference series in mathematics(17): Lectures on Linear Partial Differential Equations[M]. American Mathematical Society, 1973.
- [32] DEMAILLY J P. Complex Analytic and Differential Geometry[M]. 2012.
- [33] NITSCHKE J C C. Lectures on Minimal Surfaces: Vol. 1[M]. Cambridge University Press, 2011.
- [34] KAWAKAMI Y. A Survey on Bernstein-type Theorems for Entire Graphical Surfaces [EB/OL]. 2024[2025-08-07]. <https://arxiv.org/pdf/2403.14199v2>.