



通信原理 (Principle of Communications)

华南理工大学
电子与信息学院
余翔宇

yuxy@scut.edu.cn

信息工程2016级 1-2班

2018/11/20



第六章 数字载波调制传输系统

本章概要



- ◆ 数字载波调制解调的基本原理
- ◆ 二进制调制
 - 2ASK 2FSK 2PSK DPSK
- ◆ M进制调制
 - QPSK DQPSK OQPSK
 - MASK MPSK QAM MFSK
- ◆ 恒包络相位调制
 - MSK GMSK
- ◆ 正交频分复用载波调制传输系统



6.1 引言



引言

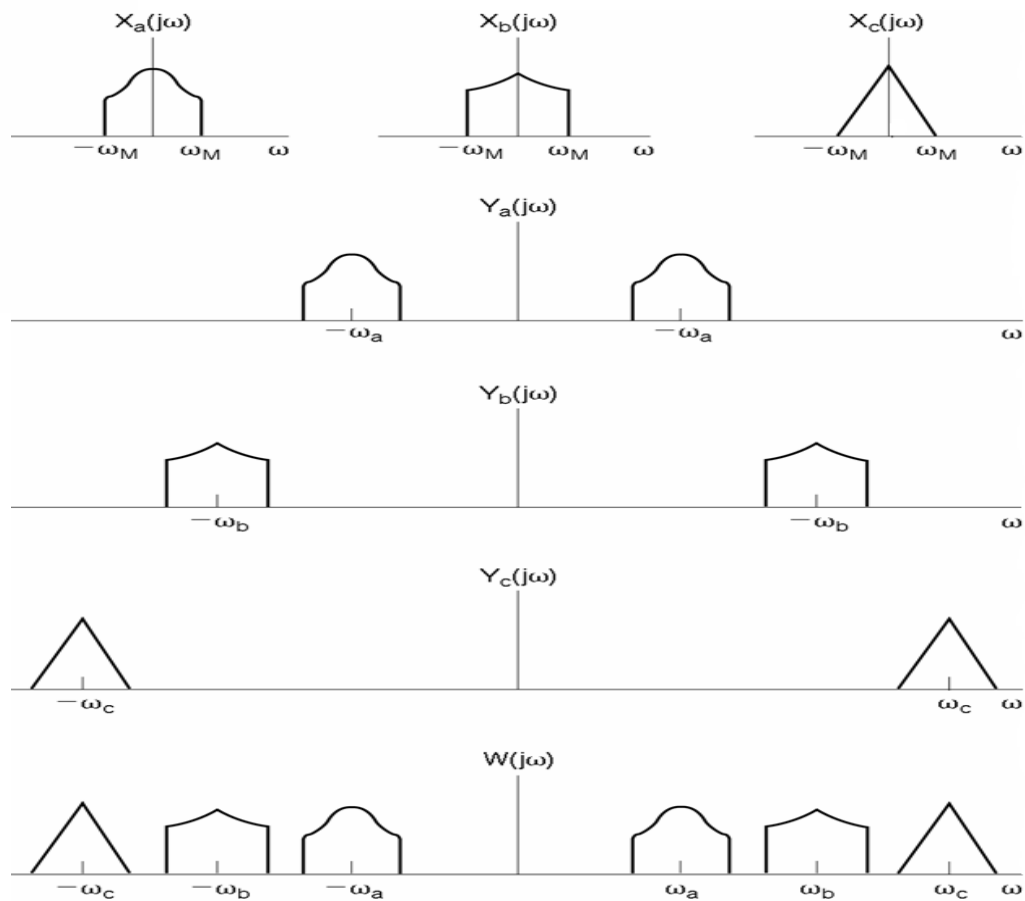
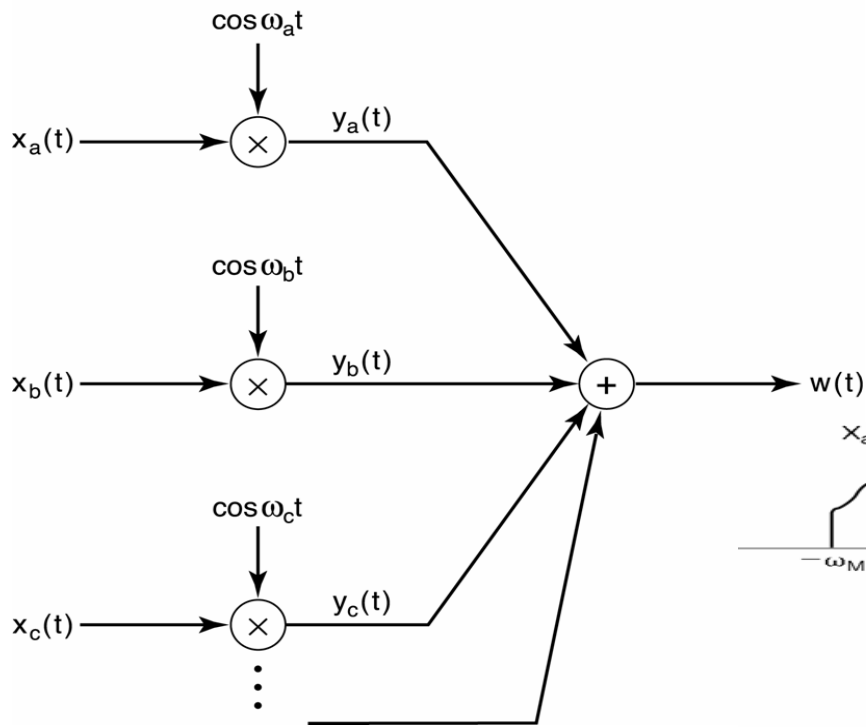


数字调制的主要目的

(1) 使数字信号适合在带通信道中传输并易于实现；

如：对无线信道，信号频率必须足够高才能使天线的尺寸在合理大小的水平（ $\lambda/4$ ）；

(2) 能通过频分复用将数字信息(基带信号)安排在不同的频段传输，提高频带利用率。



引言(续)



■ 模拟调制与数字调制的异同

相同点:

- (1) 实现信号的频谱搬移和变换;
- (2) 载波主要为正弦信号;
- (3) 可采用调幅、调频和调相等方式;

主要区别: 数字调制受控参数在有限种取值间变化。可同时调制多于一个的参数, 如相位与幅度

■ 调制的类别

- (1) 二进制与 M 进制 ($M > 2$)
- (2) 线性调制和非线性调制
- (3) 无记忆调制和有记忆调制

数字调制的分类



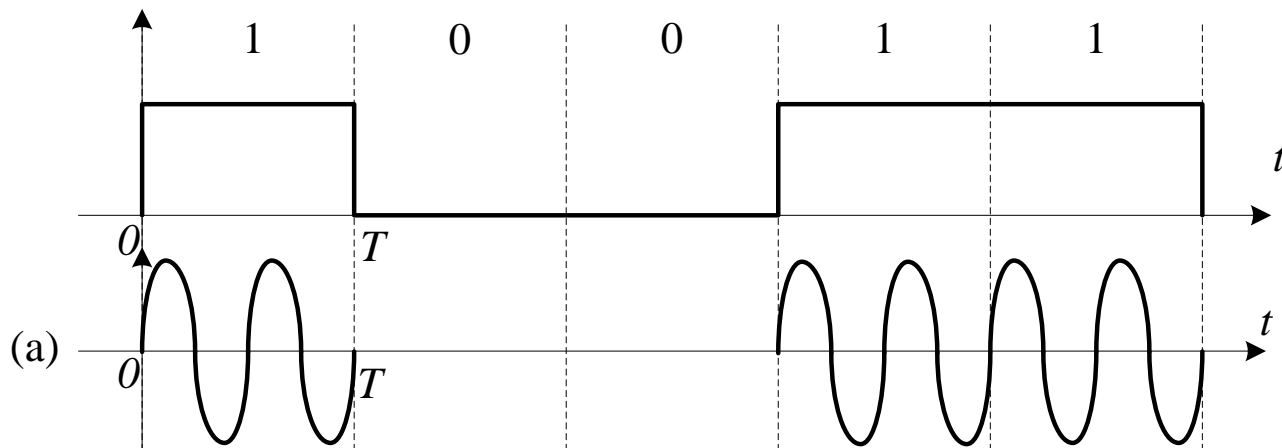
- ◆ 根据载波相位变化特性不同，数字调制可分为连续相位调制（CPM）与非连续相位调制。
- ◆ 根据已调信号的频谱结构特点的不同，数字调制可分为线性调制和非线性调制。
- ◆ 根据数字基带信号的进制或电平数不同，数字调制可分为二进制调制与多进制调制。

引言(续)

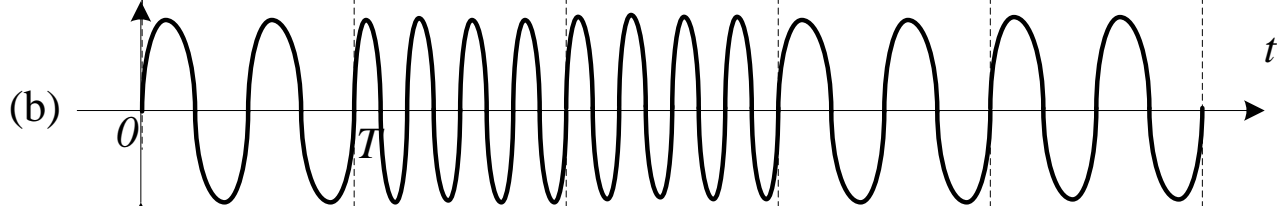


三种基本的数字调制方式示例

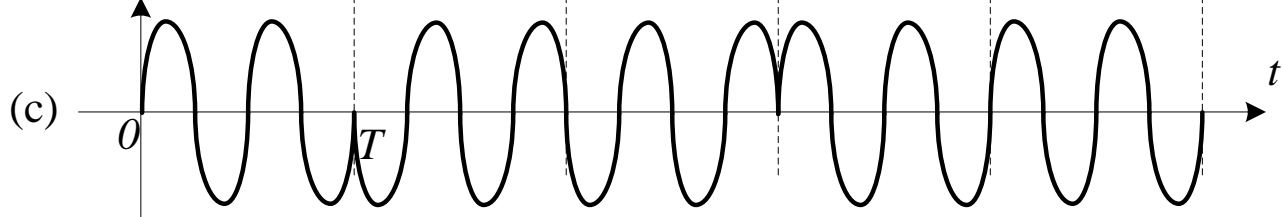
(a) 振幅键控



(b) 频移键控



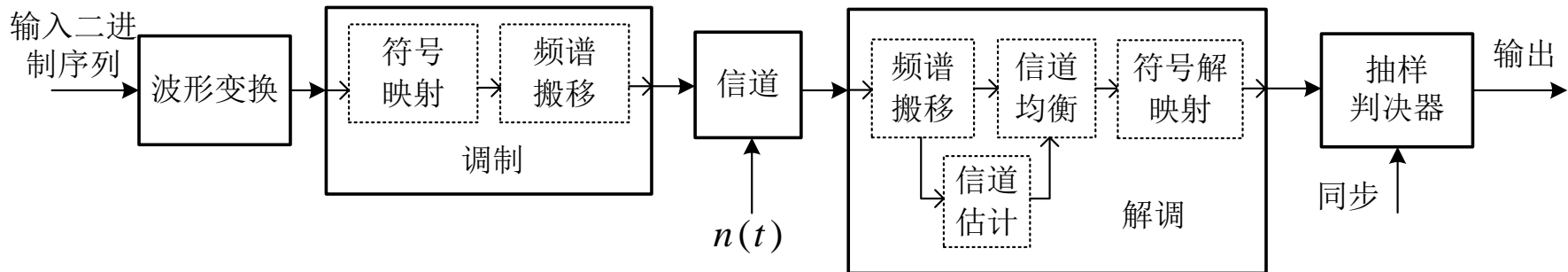
(c) 相移键控



引言(续)



■ 数字载波调制传输系统的基本结构



发送端主要操作：

波形变换

符号映射

频谱搬移

接收端主要操作：

频谱搬移

信道估计与均衡

符号解映射

(信道估计与均衡将在第7章中讨论)



6.2 数字载波调制与解调的基本原理

数字载波调制与解调的基本原理



数字载波调制信号的基本表达式

$$s(t) = A_i(t) \cos(\omega_j(t) + \phi_l(t))$$

$$A_i(t), i = 1, 2, \dots, I$$

$$\omega_j(t), j = 1, 2, \dots, J$$

$$\phi_l(t), l = 1, 2, \dots, L$$

其中幅度、频率和相位都是可以调制的载波参量。

若记 $\omega_j(t) + \phi_l(t) = \omega_c t + \Delta\omega_m t + \phi_l(t) = \omega_c t + \varphi_k(t)$

则有 $s(t) = A_i(t) \cos(\omega_c t + \varphi_k(t))$

$$A_i(t), i = 1, 2, \dots, I$$

$$\varphi_k(t), k = 1, 2, \dots, K$$

数字载波调制与解调的基本原理(续)



整理基本的表达式可得

$$\begin{aligned}
 s(t) &= A_i(t) \cos(\omega_c t + \varphi_k(t)) = A_i(t) (\cos \varphi_k(t) \cos \omega_c t - \sin \varphi_k(t) \sin \omega_c t) \\
 &= A_i(t) \cos \varphi_k(t) \cos \omega_c t - A_i(t) \sin \varphi_k(t) \sin \omega_c t \\
 &= x_n(t) \cos \omega_c t - y_n(t) \sin \omega_c t
 \end{aligned}$$

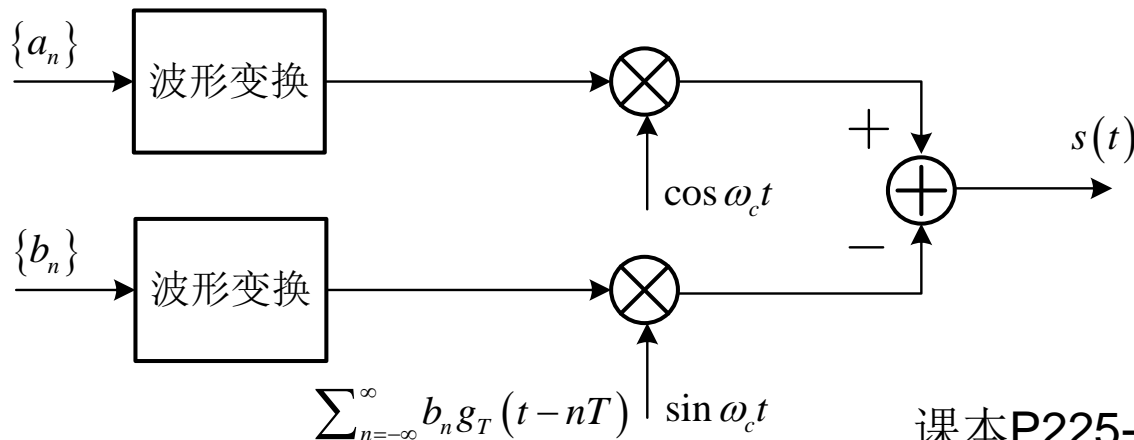
调制载波的信号为基带信号：

$$x_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT)$$

$$y_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n g_T(t - nT)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT)$$

调制基本实现方式



数字载波调制与解调的基本原理(续)



载波参数的选择

若取

$$\omega_c = N \cdot \frac{2\pi}{T}$$

其中 N 为整数, T 为符号周期

则有

$$\int_0^T \cos \omega_c t \sin \omega_c t dt = 0$$

函数

$$\Psi_1(t) = \cos \omega_c t, \quad 0 \leq t \leq T$$

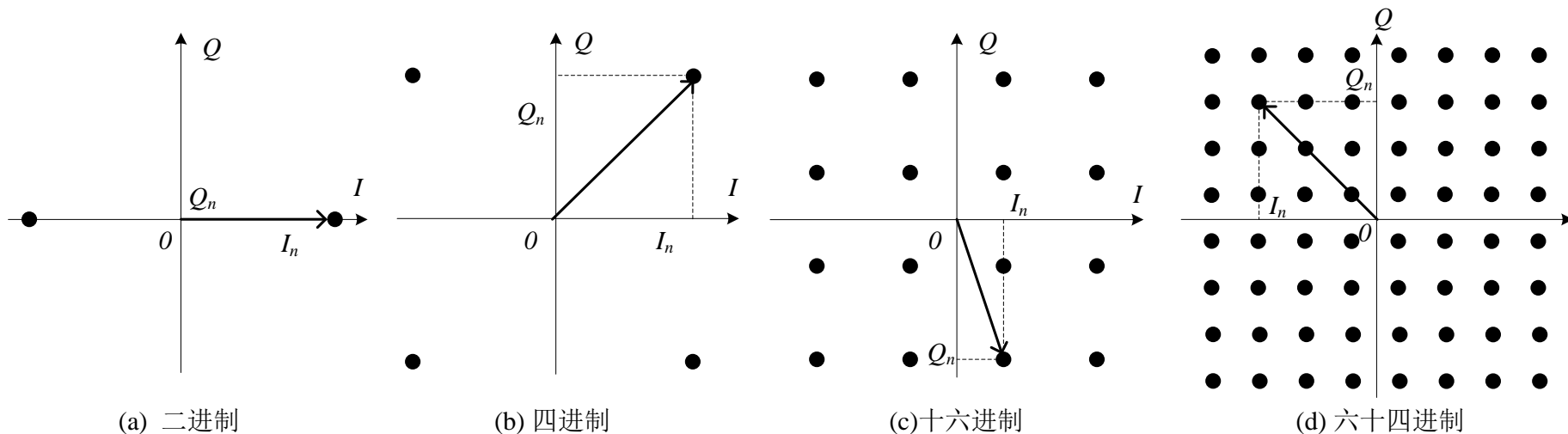
$$\Psi_2(t) = \sin \omega_c t, \quad 0 \leq t \leq T$$

构成数字载波调制系统的的一组正交的基函数。

数字载波调制与解调的基本原理(续)



数字载波调制系统常用星座图映射方式



二进制:

每个符号携
带1比特信息

四进制:

每个符号携
带2比特信息

十六进制:

每个符号携
带4比特信息

六十四进制:

每个符号携
带6比特信息

数字载波调制与解调的基本原理(续)



数字载波调制信号的功率谱分析

设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是平稳随机序列

则
$$x_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT)$$

$$y_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n g_T(t - nT)$$

是循环平稳随机序列。若 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 不相关，则

$$\begin{aligned} E[x_n(t_1) y_n(t_2)] &= E\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t_1 - nT) \sum_{n'=-\infty}^{\infty} b_{n'} g_T(t_2 - n'T)\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} E[a_n b_{n'}] g_T(t_1 - nT) g_T(t_2 - n'T) = 0 \end{aligned}$$

数字载波调制与解调的基本原理



数字载波调制信号的功率谱分析

$s(t)$ 的自相关函数为

$$\begin{aligned} R_s(t_1, t_2) &= E[s(t_1)s(t_2)] \\ &= E\left[\left(x_n(t_1)\cos\omega_c t_1 - y_n(t_1)\sin\omega_c t_1\right)\left(x_n(t_2)\cos\omega_c t_2 - y_n(t_2)\sin\omega_c t_2\right)\right] \\ &= E\left[x_n(t_1)x_n(t_2)\right]\cos\omega_c t_1\cos\omega_c t_2 - E\left[x_n(t_1)y_n(t_2)\right]\cos\omega_c t_1\sin\omega_c t_2 \\ &\quad - E\left[y_n(t_1)x_n(t_2)\right]\cos\omega_c t_2\sin\omega_c t_1 + E\left[y_n(t_1)y_n(t_2)\right]\sin\omega_c t_1\sin\omega_c t_2 \\ &= E\left[x_n(t_1)x_n(t_2)\right]\cos\omega_c t_1\cos\omega_c t_2 + E\left[y_n(t_1)y_n(t_2)\right]\sin\omega_c t_1\sin\omega_c t_2 \end{aligned}$$

数字载波调制与解调的基本原理(续)



数字载波调制信号的功率谱分析

已知循环平稳过程 $x_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT)$

$$y_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n g_T(t - nT)$$

的功率密度谱分别为

$$P_x(f) = \frac{1}{T} P_a(f) |G_T(f)|^2$$

$$P_y(f) = \frac{1}{T} P_b(f) |G_T(f)|^2$$

其中 $P_a(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) e^{-j2\pi fmT}$

$$P_b(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_b(m) e^{-j2\pi fmT}$$

$R_a(m)$ 和 $R_b(m)$ 分别是 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的自相关函数。

数字载波调制与解调的基本原理(续)



数字载波调制信号的功率谱分析

因为 $x_n(t) \cos \omega_c t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT) \cos \omega_c t$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT) \cos \omega_c(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n f_T(t - nT)$$

$$\begin{aligned} R_{x_n(t) \cos \omega_c t}(t_1, t_2) &= E \left[(x_n(t_1) \cos \omega_c t_1) (x_n(t_2) \cos \omega_c t_2) \right] \\ &= E \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n f_T(t_1 - nT) \sum_{n'=-\infty}^{\infty} a_{n'} f_T(t_2 - n'T) \right] \\ &= E \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} a_n a_{n'} f_T(t_1 - nT) f_T(t_2 - n'T) \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} E[a_n a_{n'}] f_T(t_1 - nT) f_T(t_2 - n'T) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} R_a(n - n') f_T(t_1 - nT) f_T(t_2 - n'T) \end{aligned}$$

由新定义变量符号，上式可改写为

$$R_{x_n(t) \cos \omega_c t}(t, t + \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} R_a(n - n') f_T(t - nT) f_T(t + \tau - n'T)$$

数字载波调制与解调的基本原理



数字载波调制信号的功率谱分析

直接可证明 $R_{x_n(t)\cos\omega_c t}(t+T, t+T+\tau) = R_{x_n(t)\cos\omega_c t}(t, t+\tau)$

即若 $x_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t-nT)$ 是循环平稳随机过程

则 $x_n(t)\cos(\omega_c t)$ 也是循环平稳随机过程。

同理可证明

$y_n(t)\sin(\omega_c t)$ 是循环平稳随机过程。

由此可利用循环平稳随机信号功率谱的计算公式

因为

$$f_T(t) = g_T(t)\cos\omega_c t \Leftrightarrow F_T(f) = \frac{1}{2}(G_T(f+f_c) + G_T(f-f_c))$$

数字载波调制与解调的基本原理(续)



数字载波调制信号的功率谱分析

因此有

$$\begin{aligned} P_{x_n(t)\cos\omega_c t}(f) &= \frac{1}{T} P_a(f) |F_T(f)|^2 = \frac{1}{T} P_a(f) \frac{1}{2} |G_T(f+f_c) + G_T(f-f_c)|^2 \\ &= \frac{1}{2T} P_a(f) (G_T(f+f_c) + G_T(f-f_c)) (G_T^*(f+f_c) + G_T^*(f-f_c)) \\ &= \frac{1}{2T} P_a(f) (|G_T(f+f_c)|^2 + |G_T(f-f_c)|^2) \end{aligned}$$

同理可得

$$P_{y_n(t)\sin\omega_c t}(f) = \frac{1}{4T} P_b(f) (|G_T(f+f_c)|^2 + |G_T(f-f_c)|^2)$$

由此得数字载波调制信号的功率谱为

$$\begin{aligned} P_s(f) &= P_{x_n(t)\cos\omega_c t}(f) + P_{y_n(t)\sin\omega_c t}(f) \\ &= \frac{1}{4T} (P_a(f) + P_b(f)) (|G_T(f+f_c)|^2 + |G_T(f-f_c)|^2) \end{aligned}$$

数字载波调制与解调的基本原理(续)



数字载波调制信号的功率谱分析

在推导过程中利用了关系式

$$G_T(f + f_c)G_T^*(f - f_c) = 0$$

$$G_T^*(f + f_c)G_T(f - f_c) = 0$$

这是因为上述两相乘的信号中**频谱没有重叠的成分**。

数字载波调制与解调的基本原理(续)



数字载波调制信号的解调原理

数字载波调制信号习惯上又可表示为

$$s(t) = I_n(t) \cos(\omega_c t) - Q_n(t) \sin(\omega_c t)$$

其中

$$I_n(t) = x_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT)$$

$$Q_n(t) = y_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n g_T(t - nT)$$

解调：恢复 $I_n(t)$ 和 $Q_n(t)$ 信号

接收信号

$$r(t) = s(t) + n_W(t)$$

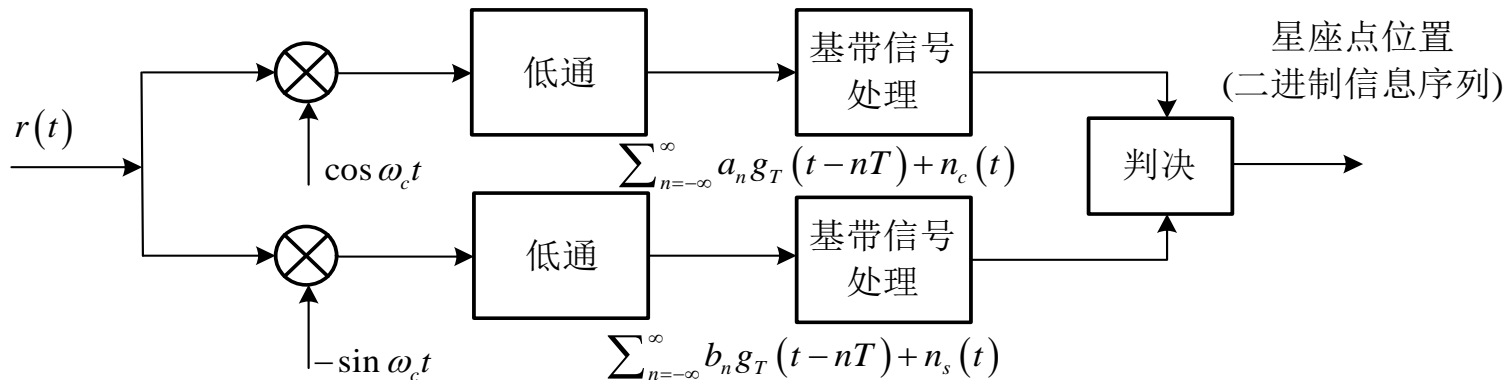
其中 $n_W(t)$ 为高斯白噪声(高斯噪声干扰信道)。

数字载波调制与解调的基本原理(续)



数字载波调制信号的解调原理

(1) 相干解调法



经带通滤波后的接收信号

$$\begin{aligned}
 r(t) &= s(t) + n(t) \\
 &= I_n(t) \cos \omega_c t - Q_n(t) \sin \omega_c t + n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t \\
 &= (I_n(t) + n_c(t)) \cos \omega_c t - (Q_n(t) + n_s(t)) \sin \omega_c t
 \end{aligned}$$

数字载波调制与解调的基本原理(续)



(1) 相干解调法(续)

与本地同频同相信号相乘后的输出

$$\begin{aligned} r(t) \cos \omega_c t &= (I_n(t) + n_c(t)) \cos \omega_c t \cos \omega_c t - (Q_n(t) + n_s(t)) \sin \omega_c t \cos \omega_c t \\ &= (I_n(t) + n_c(t)) \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega_c t) - (Q_n(t) + n_s(t)) \frac{1}{2} \sin 2\omega_c t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(t) \sin \omega_c t &= (I_n(t) + n_c(t)) \cos \omega_c t \sin \omega_c t - (Q_n(t) + n_s(t)) \sin \omega_c t \sin \omega_c t \\ &= (I_n(t) + n_c(t)) \frac{1}{2} \sin 2\omega_c t - (Q_n(t) + n_s(t)) \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega_c t) \end{aligned}$$

经低通滤波后的输出

$$I_n(t) + n_c(t)$$

$$Q_n(t) + n_s(t)$$

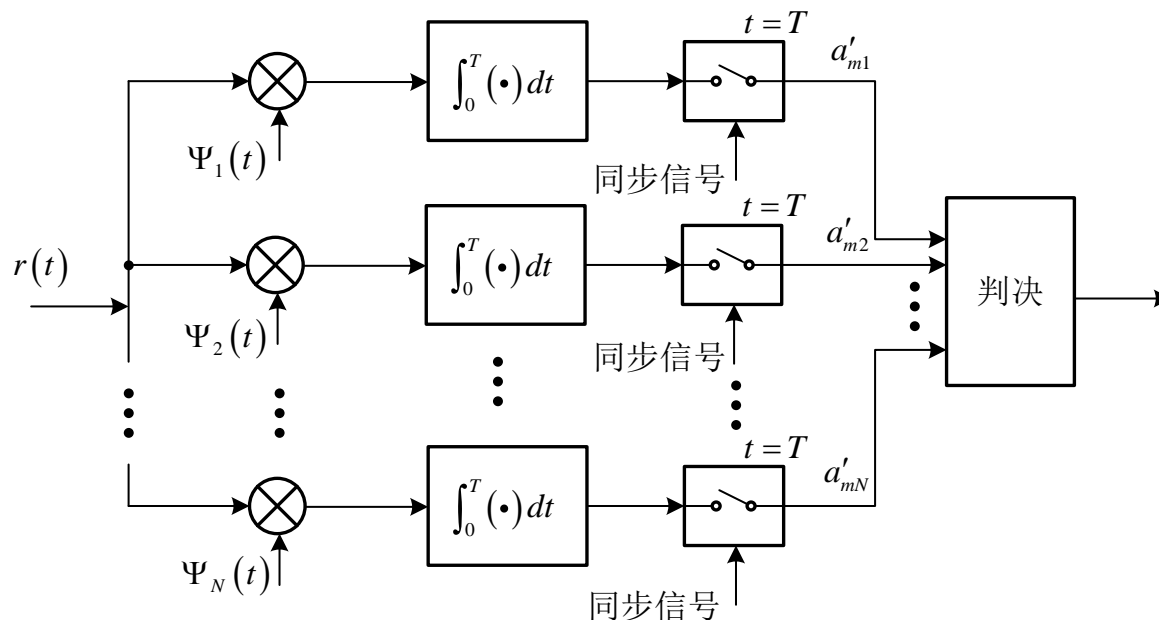
数字载波调制与解调的基本原理(续)



(2) 相关(匹配滤波器)解调法

基于基信号 $\Psi_k(t)$ $k=1,2,\dots,N$ 的数字载波调制信号

$$s_m(t) = a_{m1}\Psi_1(t) + a_{m2}\Psi_2(t) + \dots + a_{mN}\Psi_N(t) = \sum_{i=1}^N a_{mi}\Psi_i(t)$$



由解调的向量 $S'_m = [a'_{m1}, a'_{m2}, \dots, a'_{mN}]^T$ 确定发送向量 $S_m = [a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mN}]^T$

数字载波调制与解调的基本原理(续)



(2)相关(匹配滤波器)解调法(续)

采用二维基信号的二进制/M进制数字载波调制接收信号

$$\begin{aligned} r(t) &= s(t) + n_w(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t-nT) \cos \omega_c t - \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n g_T(t-nT) \sin \omega_c t + n_w(t) \end{aligned}$$

一般容易实现如下的正交条件

$$\int_0^T (g_T(t) \cos \omega_c t)(g_T(t) \sin \omega_c t) dt = \int_0^T g_T^2(t) \cos 2\omega_c t dt = 0$$

二维的基信号可取

$$\Psi_1(t) = g_T(t) \cos \omega_c t, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$\Psi_2(t) = -g_T(t) \sin \omega_c t, \quad 0 \leq t \leq T$$

数字载波调制与解调的基本原理(续)



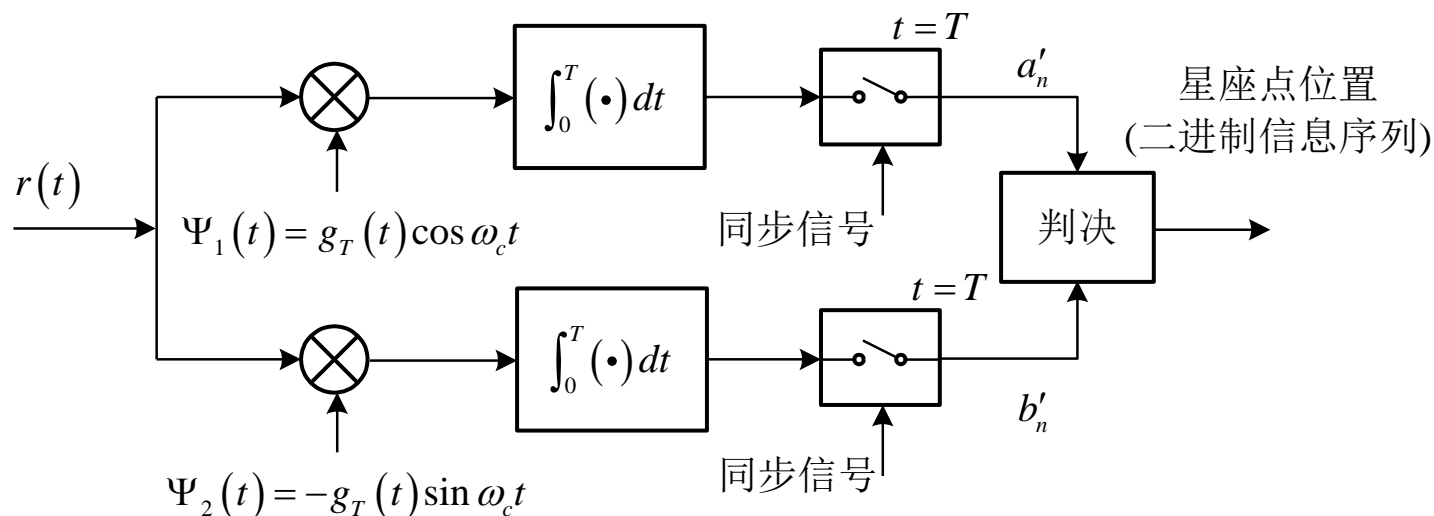
(2) 相关(匹配滤波器)解调法(续)

采用二维基信号的数字载波调制接收信号可表示为

$$r(t) = s(t) + n_w(t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \Psi_1(t - nT) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \Psi_2(t - nT) + n_w(t)$$

相关解调方式



数字载波调制与解调的基本原理(续)



(2) 相关(匹配滤波器)解调法(续)

利用条件

$$\int_0^T \Psi_1(t) \Psi_2(t) dt = 0$$

$$\int_0^T \Psi_i(t) \Psi_j(t - nT) dt = 0, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots; \quad i, j = 1, 2$$

可得

$$\begin{aligned} a'_n &= \int_{(n-1)T}^{nT} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \Psi_1(t - kT) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_k \Psi_2(t - kT) + n_W(t) \right) \Psi_1(t - nT) dt \\ &= \int_{(n-1)T}^{nT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \Psi_1(t - kT) \Psi_1(t - nT) dt + \int_{(n-1)T}^{nT} n_W(t) \Psi_1(t - nT) dt \\ &= \int_{(n-1)T}^{nT} a_n \Psi_1^2(t - nT) dt + \int_{(n-1)T}^{nT} n_W(t) \Psi_1(t - nT) dt \\ &= \int_0^T a_n \Psi_1^2(t) dt + \int_0^T n_W(t + nT) \Psi_1(t) dt = a_n + N' \end{aligned}$$

数字载波调制与解调的基本原理(续)



(2) 相关(匹配滤波器)解调法

其中 N' 为高斯随机变量，其均值和方差分别为

$$m_n = E \left[\int_0^T n_w(t+nT) \Psi_1(t) dt \right] = \int_0^T E[n_w(t+nT)] \Psi_1(t) dt = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma_N^2 &= E \left[\left(\int_0^T n_w(t+nT) \Psi_1(t) dt - m_n \right)^2 \right] = E \left[\left(\int_0^T n_w(t+nT) \Psi_1(t) dt \right)^2 \right] \\ &= E \left[\int_0^T n_w(t_1+nT) \Psi_1(t_1) dt_1 \int_0^T n_w(t_2+nT) \Psi_1(t_2) dt_2 \right] \\ &= \int_0^T \int_0^T E[n_w(t_1+nT) n_w(t_2+nT)] \Psi_1(t_1) \Psi_1(t_2) dt_1 dt_2 \\ &= \int_0^T \int_0^T \frac{N_0}{2} \delta(t_2 - t_1) \Psi_1(t_1) \Psi_1(t_2) dt_1 dt_2 \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T \Psi_1(t_2) \Psi_1(t_2) dt_2 = \frac{N_0}{2} \int_0^T \Psi_1^2(t_2) dt_2 = \frac{N_0}{2} E_{\Psi_1} \end{aligned}$$

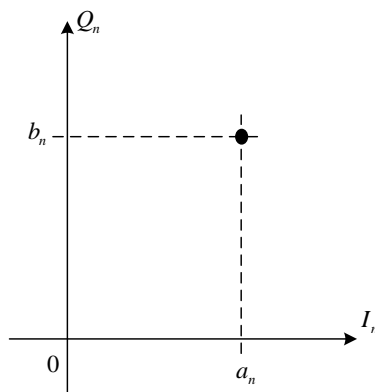
数字载波调制与解调的基本原理(续)



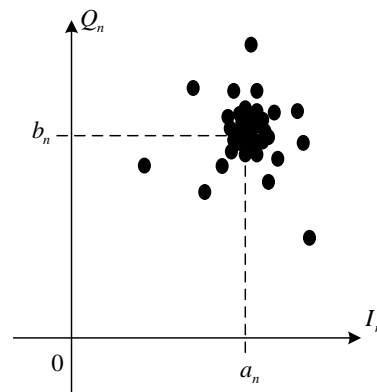
(2) 相关(匹配滤波器)解调法(续)

同理可得
$$b'_n = \int_0^T b_n \Psi_2^2(t) dt + \int_0^T n_W(t) \Psi_2(t) dt = b_n + N'$$

发送和接收的特定
星座点示意图

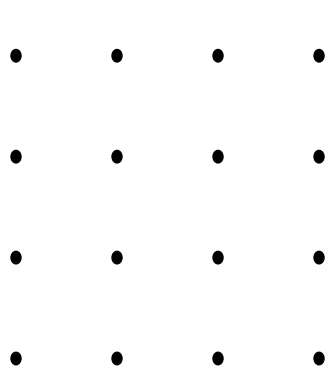


(a) (a_n, b_n)

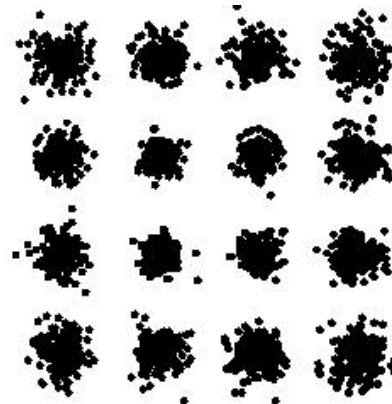


(b) (a'_n, b'_n)

发送和接收的综合
星座图



(a) (a_n, b_n)



(b) (a'_n, b'_n)



6.3 二进制数字载波调制传输系统

2ASK调制解调系统



二进制移幅键控调制：2ASK (Amplitude Shift Keying)

$$s(t) = x_n(t) \cos \omega_c t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT) \cos \omega_c t$$

其中

$$a_n = \begin{cases} a_1, & \text{概率为 } P \\ a_2, & \text{概率为 } (1-P) \end{cases}$$

$g_T(t)$ 为持续时间为一个码元周期的基带脉冲波形信号

由上节分析，2ASK信号的功率密度谱

$$P_s(f) = P_{x_n(t) \cos \omega_c t}(f) = \frac{1}{4T} P_a(f) \left(|G_T(f + f_c)|^2 + |G_T(f - f_c)|^2 \right)$$

其中

$$f_c = \omega_c / 2\pi$$

$$P_a(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) e^{-j2\pi f m T}$$

$$g_T(t) \Leftrightarrow G_T(f)$$

2ASK调制解调系统(续)



若基带信号波形为门函数

$$g_T(t) = u(t) - u(t-T)$$

则

$$g_T(t) \Leftrightarrow G_T(f) = T \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} e^{-j\pi fT} = T \text{sinc}(fT) e^{-j\pi fT}$$

相应地2ASK信号的功率密谱

$$P_s(f) = \frac{T}{4} P_a(f) \left(\text{sinc}^2 \left((f + f_c) T \right) + \text{sinc}^2 \left((f - f_c) T \right) \right)$$

2ASK调制解调系统(续)

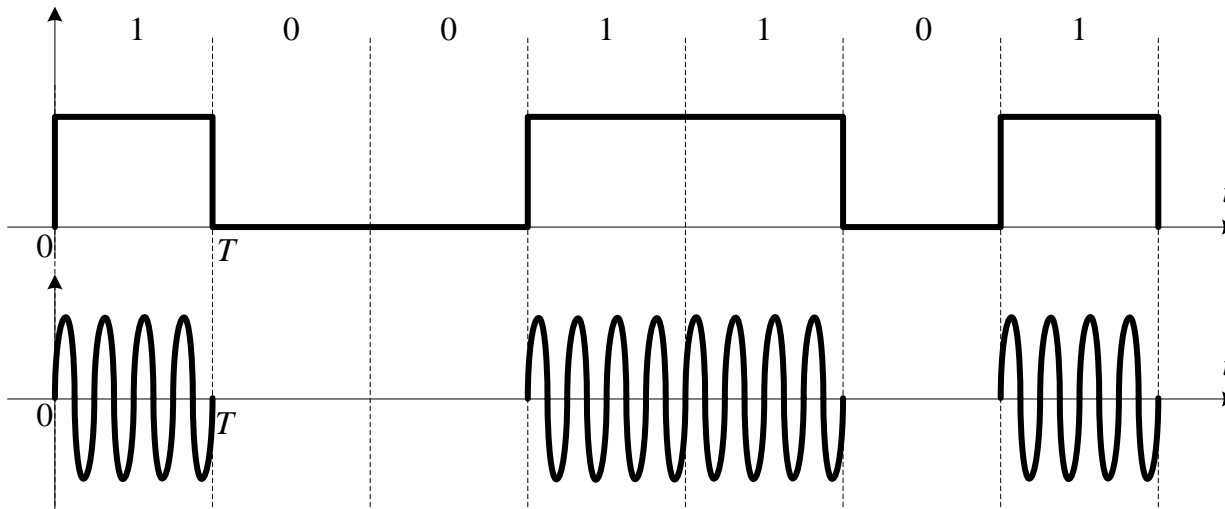


OOK信号 OOK (On-and-Off Keying) : 一种最简单的2ASK信号

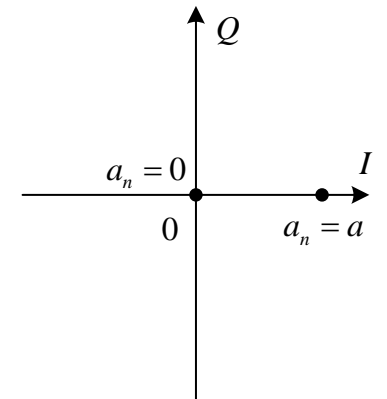
$$s(t) = x_n(t) \cos \omega_c t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT) \cos \omega_c t$$

其中 $g_T(t) = u(t) - u(t - T)$

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{概率为 } P \\ a, & \text{概率为 } (1 - P) \end{cases}$$



(a)



(b) 课本P233

2ASK调制解调系统(续)



假定 $\{a_n\}$ 为满足如下条件的平稳随机序列

$$E[a_n] = m_a \quad R_a(a_n a_m) = \begin{cases} \sigma_a^2 + m_a^2, & n = m \\ m_a^2, & n \neq m \end{cases}$$

$$E\left[(a_n - m_a)^2\right] = \sigma_a^2$$

则符号序列的功率谱

$$P_a(f) = \sigma_a^2 + \frac{m_a^2}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

相应地OOK信号的功率密度谱

$$P_s(f) = \frac{T}{4} P_a(f) \left(\text{sinc}^2((f + f_c)T) + \text{sinc}^2((f - f_c)T) \right)$$

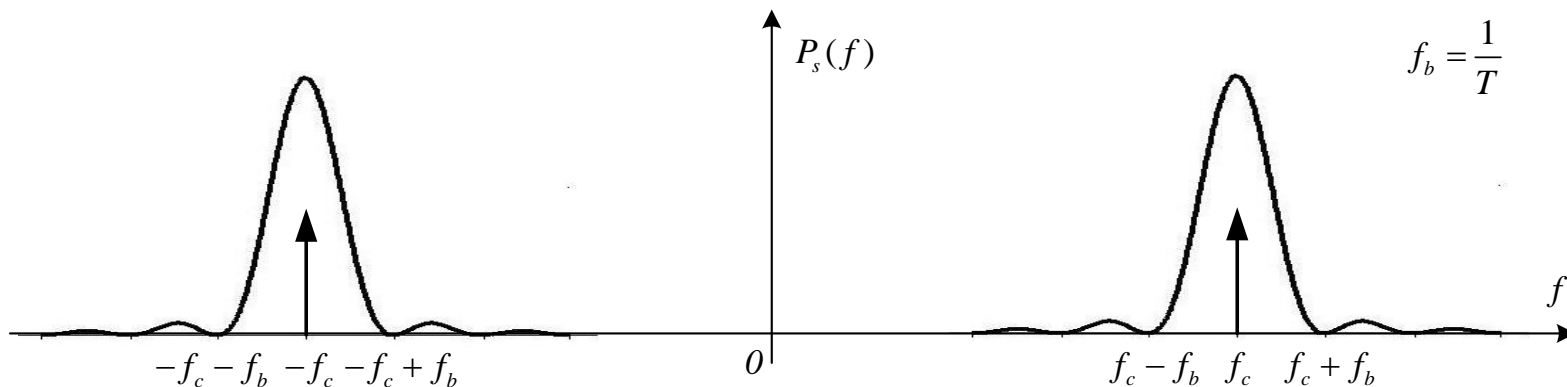
$$= \frac{T}{4} \left(\sigma_a^2 + \frac{m_a^2}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) \right) \left(\text{sinc}^2((f + f_c)T) + \text{sinc}^2((f - f_c)T) \right)$$

$$= \frac{T}{4} \sigma_a^2 \left(\text{sinc}^2((f + f_c)T) + \text{sinc}^2((f - f_c)T) \right) + \frac{m_a^2}{4} \left(\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c) \right)$$

2ASK调制解调系统(续)



OOK信号的功率密度谱



2ASK信号的频带效率

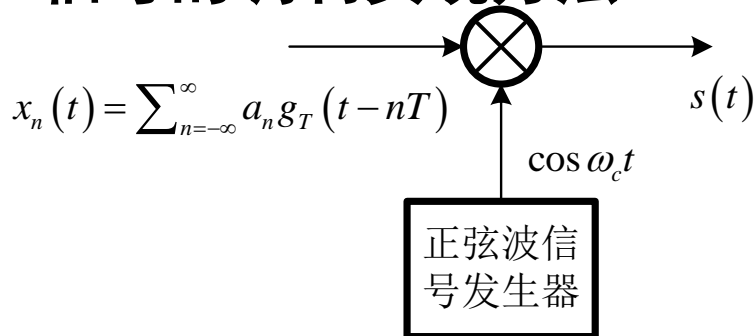
$$\eta_{2ASK} = \frac{R_S}{W_{2ASK}} = \frac{R_S}{2W_B} = \frac{1}{2} \eta_B$$

η_B 为基带信号频带效率。

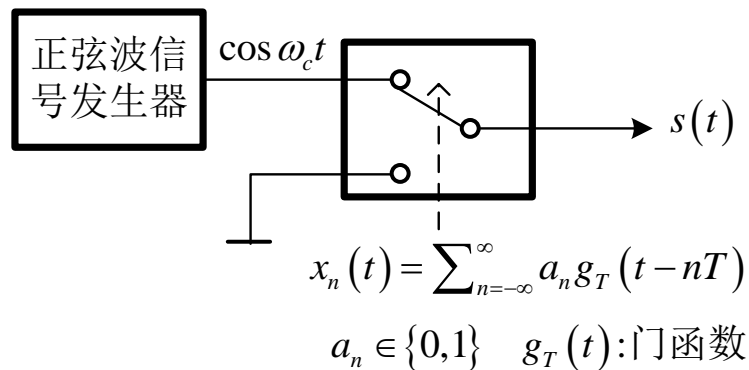
2ASK调制解调系统(续)



OOK信号的调制实现方法



(a)



(b)

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t-nT) \cos \omega_c t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t)$$

其中:

$$g_T(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{其他} t \end{cases}$$

$$u_n(t) = \begin{cases} s_1(t-nT), & \text{发送“1”时} \\ 0, & \text{发送“0”时} \end{cases}$$

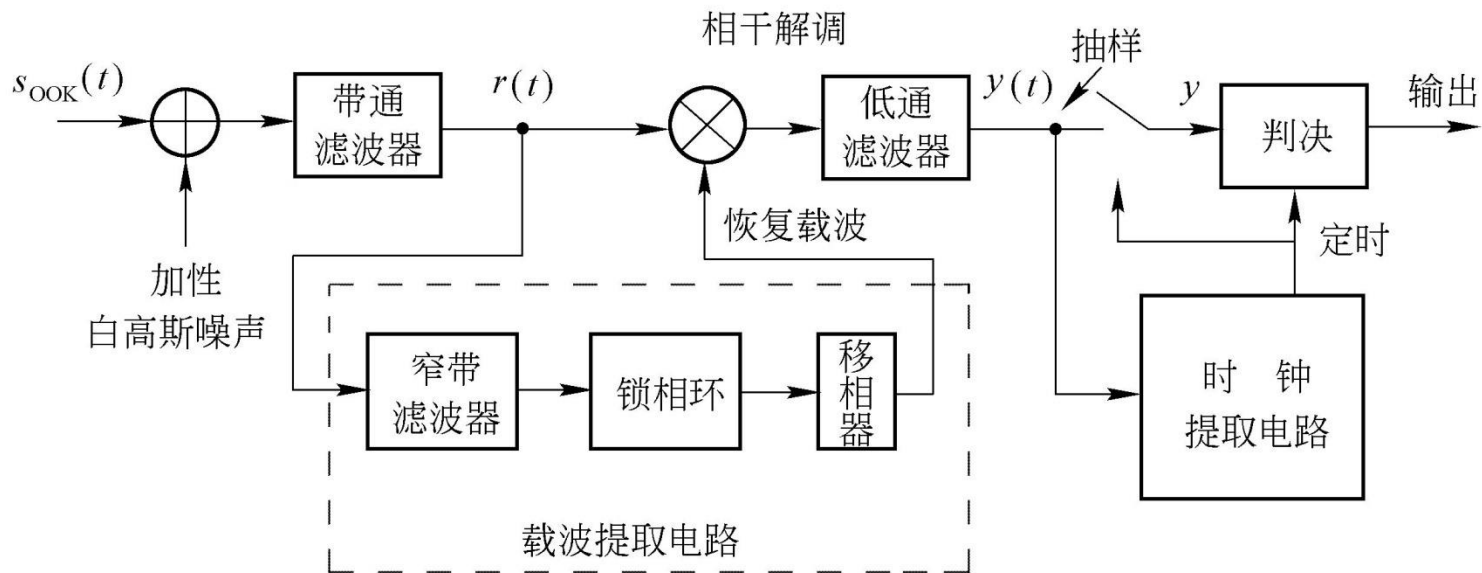
$$s_1(t) = \begin{cases} a \cos \omega_c t, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{其他} t \end{cases}$$

优缺点



- ◆ 容易受到突然增益变化的影响
- ◆ 效率不高
- ◆ 用于语音级传输，速率不超过1200 bps
- ◆ 用于在光纤在传输数字数据

OOK信号的接收及其误比特率



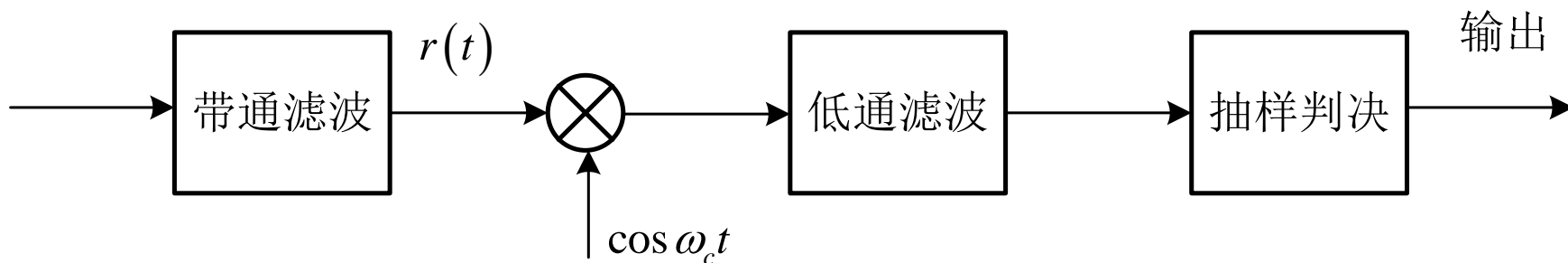
OOK信号的相干解调

2ASK调制解调系统(续)



OOK信号的解调方法

(1)OOK信号的相干解调



对第 n 个码元信号

因为 $r_n(t) = u_n(t) + n(t)$ $n(t) = n_c(t)\cos(\omega_c t) - n_s(t)\sin(\omega_c t)$

故有 $r_n(t) = \begin{cases} a \cos \omega_c t + n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t, & \text{发“1”时} \\ n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t, & \text{发“0”时} \end{cases}$

$$= \begin{cases} (a + n_c(t)) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t, & \text{发“1”时} \\ n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t, & \text{发“0”时} \end{cases}$$

2ASK调制解调系统(续)



(1) OOK信号的相干解调(续)

$$r_n(t) \cos \omega_c t = \begin{cases} (a + n_c(t)) \cos \omega_c t \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t \cos \omega_c t, & \text{发“1”时} \\ n_c(t) \cos \omega_c t \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t \cos \omega_c t, & \text{发“0”时} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(a + n_c(t))(1 + \cos 2\omega_c t) - \frac{1}{2}n_s(t) \sin 2\omega_c t, & \text{发“1”时} \\ \frac{1}{2}n_c(t)(1 + \cos 2\omega_c t) - \frac{1}{2}n_s(t) \sin 2\omega_c t, & \text{发“0”时} \end{cases}$$

经低通滤波器后得到的包络信号

$$z_n(t) = \begin{cases} a + n_c(t), & \text{发“1”时} \\ n_c(t), & \text{发“0”时} \end{cases}$$

2ASK调制解调系统(续)

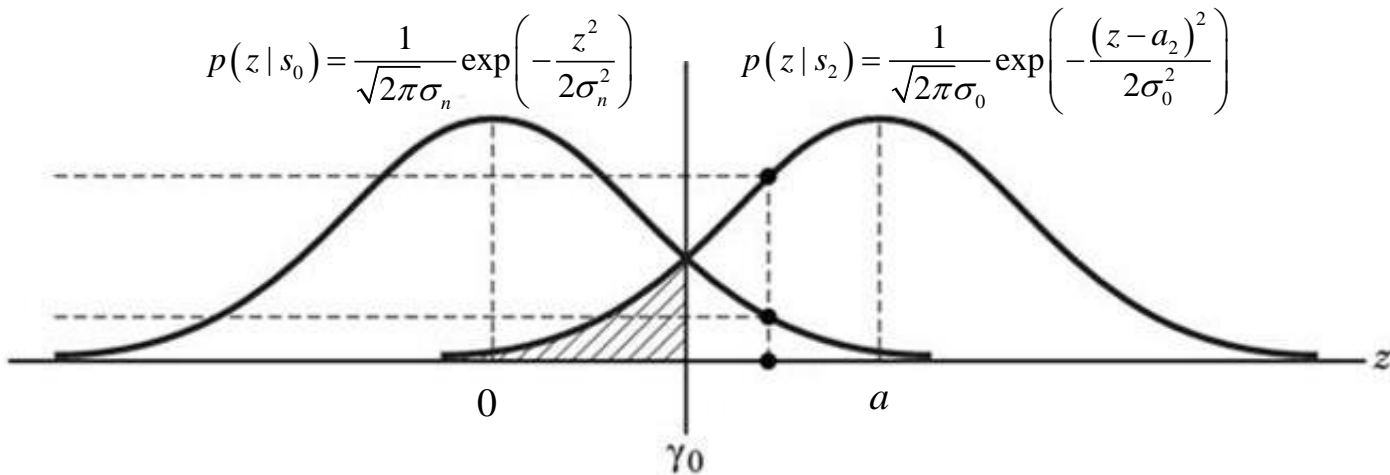


(1) OOK信号的相干解调(续) 由高斯噪声 $n_c(t)$ 的分布特性

$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

得到收到信号 z 时, 发“0”和“1”时发送信号的似然函数

$$p(z|s_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad p(z|s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{(z-a)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$



2ASK调制解调系统(续)



(1) OOK信号的相干解调(续) 由似然函数可导出如下的结果

先验等概条件下的最佳判决门限 $\gamma_0 = \frac{a}{2}$

判决规则 $z \begin{cases} < \gamma_0, & \text{判发送“0?”} \\ \geq \gamma_0, & \text{判发送“1?”} \end{cases}$

误码率 $P_E = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{a - 0}{2\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{a}{2\sigma_n}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{a^2}{4\sigma_n^2}}\right)$

因为 $\sigma_n^2 = W_c N_0 = \frac{2N_0}{T}$ $E_{s1} = \int_0^T a^2 dt = \frac{a^2 T}{2}$

$$E_b = \frac{1}{2} E_{s1} = \frac{1}{4} a^2 T$$

可得 $P_E = Q\left(\sqrt{\frac{a^2}{4\sigma_n^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{a^2}{8N_0/T}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{a^2 T/4}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right)$

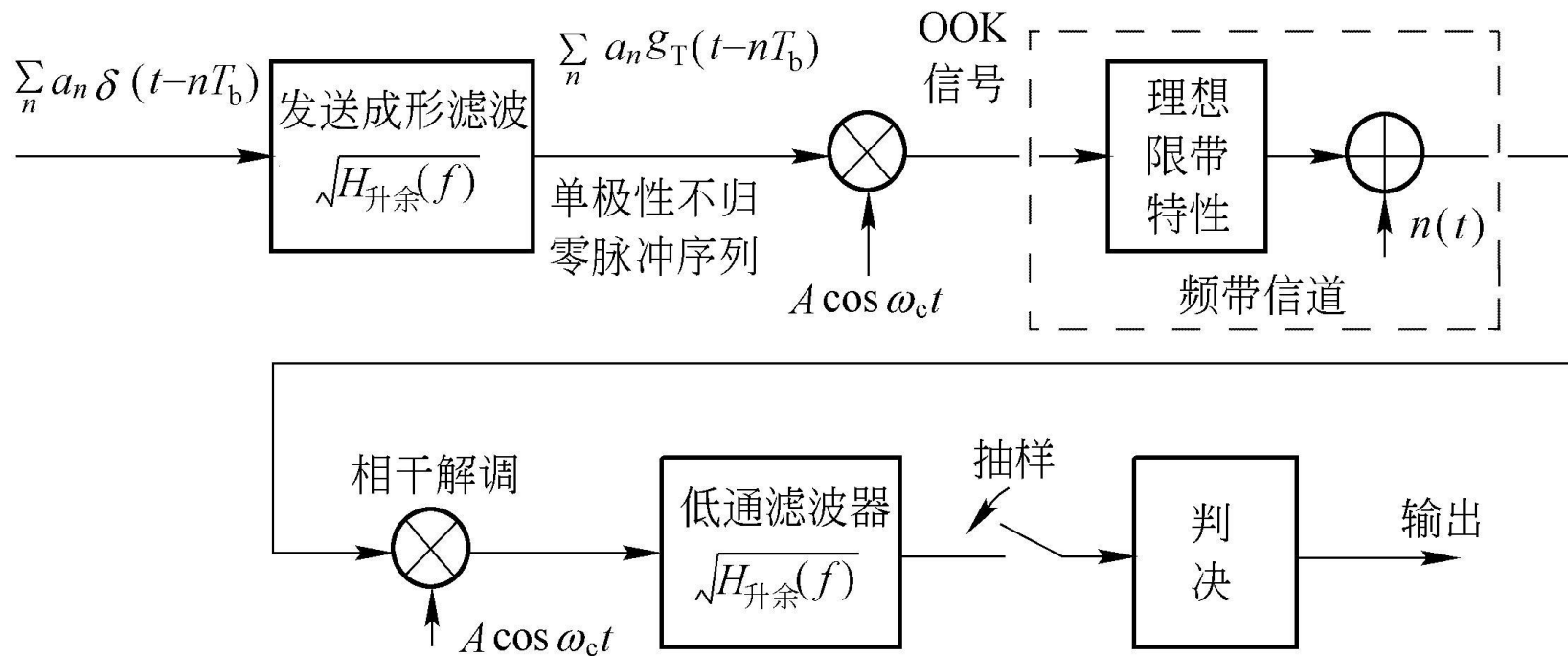
在理想限带及加性白噪 干扰信道条件下的最佳接收



◆ 频带信道的理想限带特性是指在信道

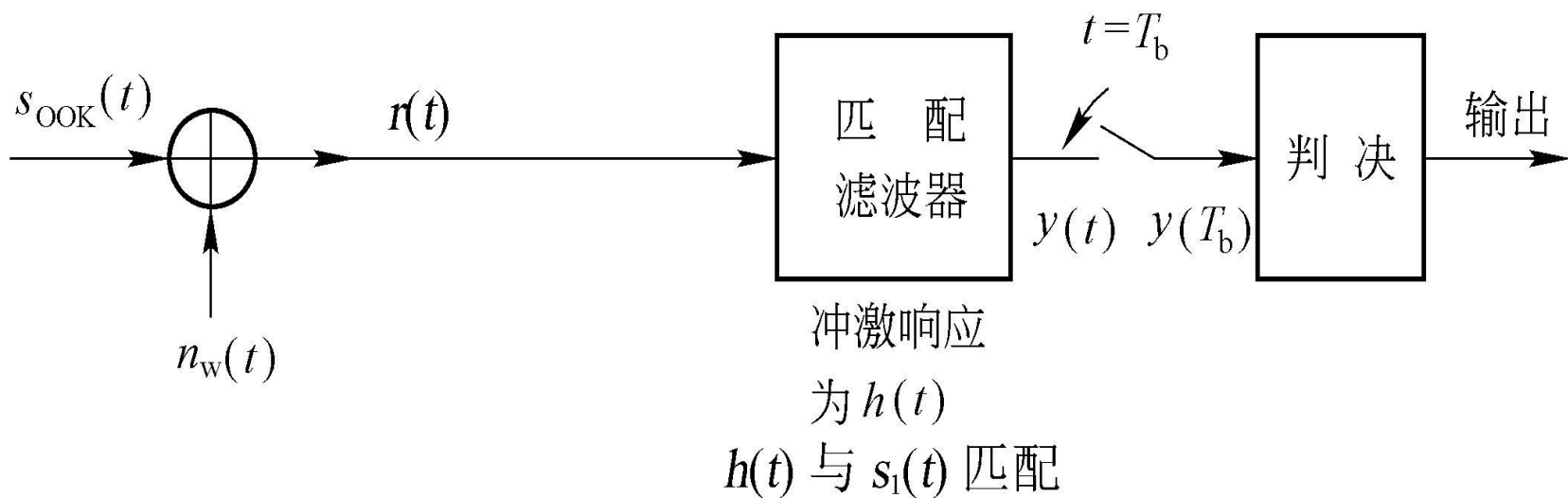
频带内幅频特性是恒定的、相频特性

是线性相移，但信道的频带 $B \leq \frac{2}{T_b}$



在理想限带及加性白噪声干扰信道条件下

OOK信号的最佳频带传输系统的框图

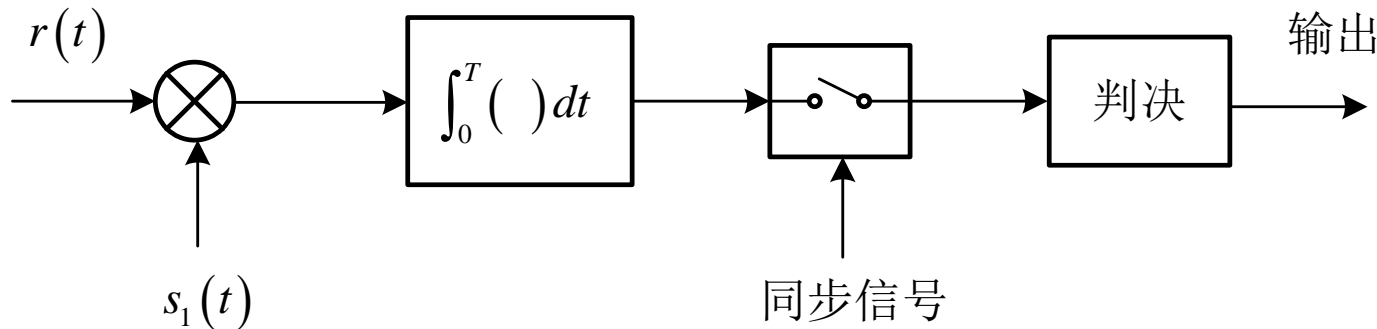


利用带通型匹配滤波器进行解调的最佳接收

2ASK调制解调系统(续)



(2) OOK信号的相关(匹配滤波器法)解调



在接收完一个码元的 $t=T$ 时刻
$$z(T) = \int_0^T r(t) s_1(t) dt$$

若发送“0”，则
$$z_0(T) = \int_0^T r(t) s_1(t) dt = \int_0^T (0 + n_w(t)) s_1(t) dt$$

$$= \int_0^T n_w(t) s_1(t) dt = N_1$$

若发送“1”，则
$$z_1(T) = \int_0^T r(t) s_1(t) dt = \int_0^T (s_1(t) + n_w(t)) s_1(t) dt$$

$$= \int_0^T s_1^2(t) dt + \int_0^T n_w(t) s_1(t) dt = E_{s1} + N_1$$

2ASK调制解调系统(续)



(2) OOK信号的相关(匹配滤波器法)解调(续)

信号中高斯噪声 N_1 的均值和方差分别为

$$E[N_1] = E\left[\int_0^T n_w(t) s_1(t) dt\right] = \int_0^T E[n_w(t)] s_1(t) dt = 0$$

$$\begin{aligned}\sigma_N^2 &= E\left[(N_1 - E[N_1])^2\right] = E\left[(N_1)^2\right] \\ &= E\left[\int_0^T n_w(t_1) s_1(t_1) dt_1 \int_0^T n_w(t_2) s_1(t_2) dt_2\right] \\ &= \int_0^T \int_0^T E[n_w(t_1) n_w(t_2)] s_1(t_1) s_1(t_2) dt_1 dt_2 \\ &= \int_0^T \int_0^T \frac{N_0}{2} \delta(t_2 - t_1) s_1(t_1) s_1(t_2) dt_1 dt_2 \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T s_1(t_2) s_1(t_2) dt_2 = \frac{N_0}{2} E_{s_1}\end{aligned}$$

2ASK调制解调系统(续)



(2) OOK信号的相关(匹配滤波器法)解调(续)

可得收到信号 z 时, 发“0”和发“1”时的似然函数

$$p(z | s_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_N} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_N^2}\right)$$

$$p(z | s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_N} \exp\left(-\frac{(z - E_{s1})^2}{2\sigma_N^2}\right)$$

由此可导出先验等概 $P(s_1)=P(s_2)=1/2$ 时的最佳判决门限

$$\gamma_0 = \frac{E_{s1}}{2}$$

相应地, 判决规则为

$$z \begin{cases} < \gamma_0, & \text{判发送“0”} \\ \geq \gamma_0, & \text{判发送“1”} \end{cases}$$

2ASK调制解调系统(续)



(2) OOK信号的相关(匹配滤波器法)解调(续)

误码率

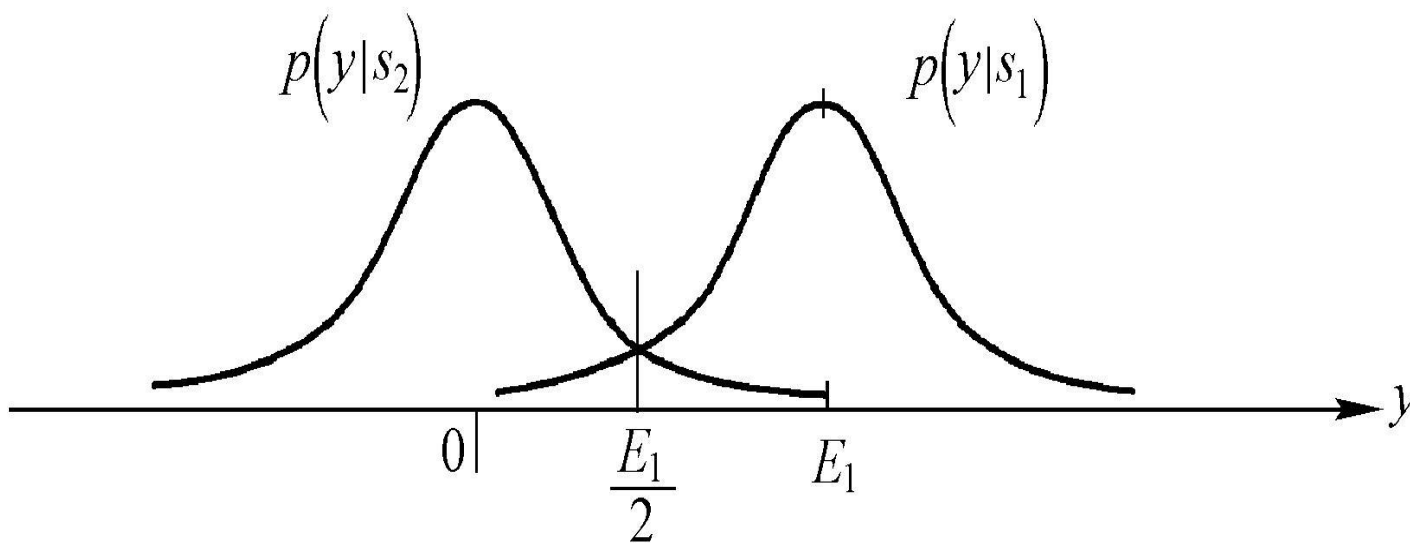
$$\begin{aligned} P_E &= Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{E_{s1} - 0}{2\sigma_N}\right) = Q\left(\frac{E_{s1}}{2\sqrt{N_0 E_{s1}/2}}\right) \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{E_{s1}}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \end{aligned}$$

Q函数值的求解方法

查表;

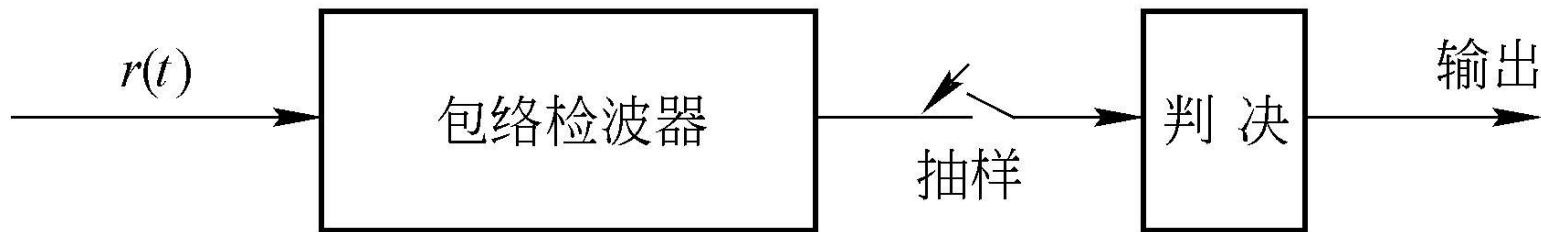
通过Matlab做数值计算;

近似估算 $Q(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \geq 3$



条件概率密度函数 $p(y|s_1)$ 及 $p(y|s_2)$

OOK信号的非相干解调



OOK信号的非相干解调

$$P_b \approx \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{A^2}{8\sigma^2}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{2N_0} \cdot \frac{R_b}{B}\right)$$

2ASK调制解调系统(续)



(3) OOK信号的包络检波法解调



第n个接收到的码元可表示为

$$r_n(t) = \begin{cases} (a + n_c(t)) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t, & \text{发“1”时} \\ n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t, & \text{发“0”时} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{(a + n_c(t))^2 + n_s^2(t)} \cos(\omega_c t + \theta_n) & \text{发“1”时} \\ \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)} \cos(\omega_c t + \theta'_n), & \text{发“0”时} \end{cases}$$

$$\theta_n = \arctan \frac{n_s(t)}{a + n_c(t)}, \quad \theta'_n = \arctan \frac{n_s(t)}{n_c(t)}$$



(3) OOK信号的包络检波法解调(续)

包络取值

$$V(t) = \begin{cases} \sqrt{[a + n_c(t)]^2 + n_s^2(t)}, & \text{发“1”时} \\ \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)}, & \text{发“0”时} \end{cases}$$

其中 $\sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)}$ 服从瑞利分布

$$p_0(V) = \frac{V}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{V^2}{2\sigma^2}\right)$$

$\sqrt{[a + n_c(t)]^2 + n_s^2(t)}$ 服从莱斯分布

$$p_1(V) = \frac{V}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{V^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{aV}{\sigma^2}\right)$$

2ASK调制解调系统(续)



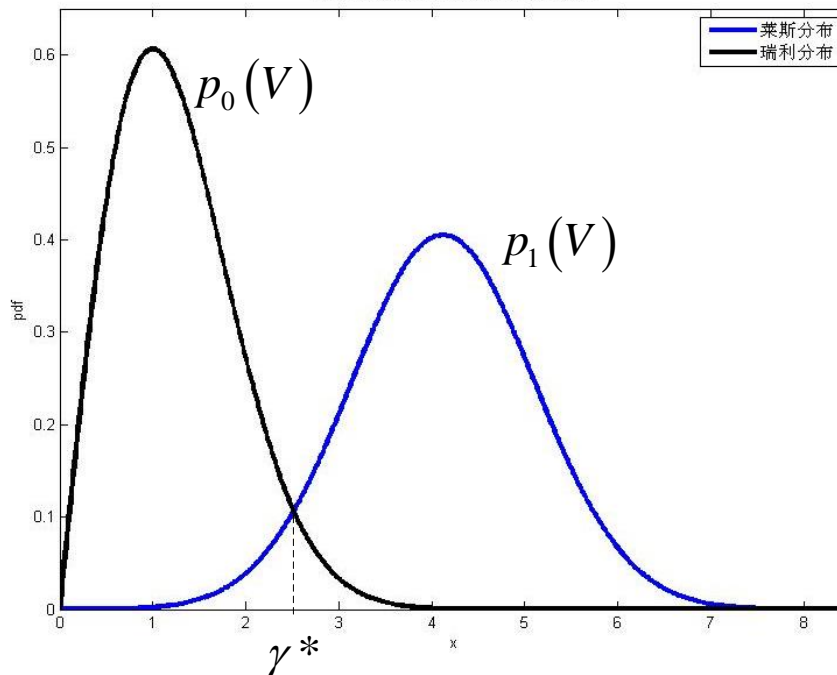
(3) OOK信号的包络检波法解调(续)

包络分布特性

$$p(V) = \begin{cases} p_1(V) = \frac{V}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{V^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{aV}{\sigma^2}\right), & \text{发“1”时} \\ p_0(V) = \frac{V}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{V^2}{2\sigma^2}\right), & \text{发“0”时} \end{cases}$$

瑞利分布
莱斯分布
特性曲线

瑞利分布与莱斯分布概率密度函数



2ASK调制解调系统(续)



(3) OOK信号的包络检波法解调(续)

判决规则
$$V(t_0) \begin{cases} \geq \gamma, & \text{判决发“1”} \\ < \gamma, & \text{判决发“0”} \end{cases}$$

发“0”时接收错误判决概率 ($\gamma_0 = \gamma/\sigma$)

$$P_{e0} = \Pr(V > \gamma) = \int_{\gamma}^{\infty} p_0(V) dV = \int_{\gamma}^{\infty} \frac{V}{\sigma^2} e^{-\frac{V^2}{2\sigma^2}} dV = e^{-\frac{\gamma^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{\gamma_0^2}{2}}$$

发“1”时接收错误判决概率

$$\begin{aligned} P_{e1} &= \Pr(V \leq \gamma) = \int_0^{\gamma} p_1(V) dV = 1 - \int_{\gamma}^{\infty} p_1(V) dV \\ &= 1 - \int_{\gamma}^{\infty} \frac{V}{\sigma^2} I_0\left(\frac{aV}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{V^2+a^2}{2\sigma^2}} dV \end{aligned}$$

2ASK调制解调系统(续)



(2) OOK信号的包络检波法解调(续)

定义马肯函数 $Q_M(\alpha, \beta) = \int_{\beta}^{\infty} t I_0(\alpha t) e^{-\frac{t^2 + \alpha^2}{2}} dt$

则有

$$P_{e1} = 1 - Q_M\left(\frac{a}{\sigma}, \frac{\gamma}{\sigma}\right) \quad r = \frac{a^2/2}{\sigma^2} = \frac{a^2}{2\sigma^2}$$

若记 $\gamma_0 = \gamma/\sigma$

则进一步有 $P_{e1} = 1 - Q_M(\sqrt{2r}, \gamma_0)$

总的误码率

$$\begin{aligned} P_E &= P(s_0)P_{e0} + P(s_1)P_{e1} \\ &= P(s_0)e^{-\frac{\gamma_0^2}{2}} + P(s_1)\left(1 - Q_M(\sqrt{2r}, \gamma_0)\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{\gamma_0^2}{2}} + \frac{1}{2}\left(1 - Q_M(\sqrt{2r}, \gamma_0)\right) \end{aligned}$$

2ASK调制解调系统(续)



(2) OOK信号的包络检波法解调(续)

分析：先验等概条件下的最佳判决门限 γ^*

由上图可知，错误概率最小等价于求 γ^* ，使得

$$\min \left(\int_{\gamma}^{\infty} p_0(V) dV + \int_0^{\gamma} p_1(V) dV \right) = \left(\int_{\gamma^*}^{\infty} p_0(V) dV + \int_0^{\gamma^*} p_1(V) dV \right) \Bigg|_{p_0(\gamma^*)=p_1(\gamma^*)}$$

即

$$p_0(\gamma^*) = \frac{V}{\sigma^2} e^{-\frac{V^2}{2\sigma^2}} \Bigg|_{V=\gamma^*} = p_1(\gamma^*) = \frac{V}{\sigma^2} I_0 \left(\frac{aV}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{V^2+a^2}{2\sigma^2}} \Bigg|_{V=\gamma^*}$$

整理可得

$$1 = I_0 \left(\frac{a\gamma^*}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \rightarrow \frac{a^2}{2\sigma^2} = \ln I_0 \left(\frac{a\gamma^*}{\sigma^2} \right) \quad (*)$$

2ASK调制解调系统(续)



(2) OOK信号的包络检波法解调(续)

在大信噪比 $\frac{a^2}{\sigma^2} \gg 1$ 条件下, 有 $\frac{a\gamma^*}{\sigma^2} \gg 1$

由零阶贝赛尔函数的性质, 有

$$\ln I_0\left(\frac{a\gamma^*}{\sigma^2}\right) \approx \frac{a\gamma^*}{\sigma^2}$$

由(*)式可得

$$\frac{a^2}{2\sigma^2} = \frac{a\gamma^*}{\sigma^2}$$

由此可得最佳判决门限:

$$\gamma^* = \frac{a}{2}$$

$$\gamma_0^* = \frac{a/2}{\sigma} = \frac{a}{2\sigma} = \sqrt{\frac{r}{2}}$$

(包络检波通常用于大信噪比的解调场合)

2ASK调制解调系统(续)



(2) OOK信号的包络检波法解调(续)

利用**马肯函数**的性质：

$$Q_M(\alpha, \beta) \approx 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}}\right)$$

其中

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad \operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

分别称为**误差函数**和**误差函数的互补函数**。

包络检波时的**误码率**

$$P_E = \frac{1}{2} e^{-\frac{r}{4}} + \frac{1}{4} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{r}}{2}\right) \approx \frac{1}{2} e^{-\frac{r}{4}} = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{a^2 T / 4}{4N_0}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{4N_0}\right)$$



$$r = \frac{a^2}{2\sigma^2} \gg 1 \quad \gamma_0^* = \frac{\gamma^*}{2\sigma} = \sqrt{\frac{r}{2}}$$

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{r}{4}} + \frac{1}{4} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{r}}{2}\right) \approx \frac{1}{2} e^{-\frac{r}{4}}$$

$$r \ll 1 \quad \gamma_0^* = \sqrt{2}$$

包络检波法和同步检测法的比较



- ◆在相同的大信噪比下，2ASK信号采用同步检测法的误码率总是低于采用包络检波法的误码率，但两者的误码性能相差并不大。
- ◆在系统实现方面，包络检波法不需要在接收端产生稳定的本地相干载波，实际实现时其电路上要比同步检测法简单得多。但是，包络检波法存在门限效应，同步检测法则无门限效应。实际挡着，对2ASK系统而言，在大信噪比条件下通常使用包络检测法进行非相干解调，而在小信噪比条件下，通常使用同步检测法进行相干解调。

2ASK调制解调系统(续)



采用三种不同方法解调OOK信号的性能比较

$$P_E|_{\text{相关法}} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) < P_E|_{\text{相干法}} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right) < P_E|_{\text{包络法}} = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{4N_0}\right)$$

例6.3.1 已知OOK信号 $R_B=4.8 \times 10^6$ $a=1\text{mV}$ $N_0=2 \times 10^{-15}\text{W/Hz}$

分析采用包络检波和相关解调时的性能。

解： (1)采用包络检波法

$$E_b = \frac{1}{4} a^2 T = \frac{1}{4} (10^{-3})^2 \frac{1}{4.8 \times 10^6} = \frac{1}{4 \times 4.8} 10^{-12} \text{ (焦耳)} \quad N_0 = 2 \times 10^{-15} \text{ W/Hz}$$

$$P_E|_{\text{包络法}} = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{4N_0}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{10^{-12}/4 \times 4.8}{4 \times 2 \times 10^{-15}}\right) = \frac{1}{2} \exp(-6.7) = 7.5 \times 10^{-4}$$

2ASK调制解调系统



例6.3.1

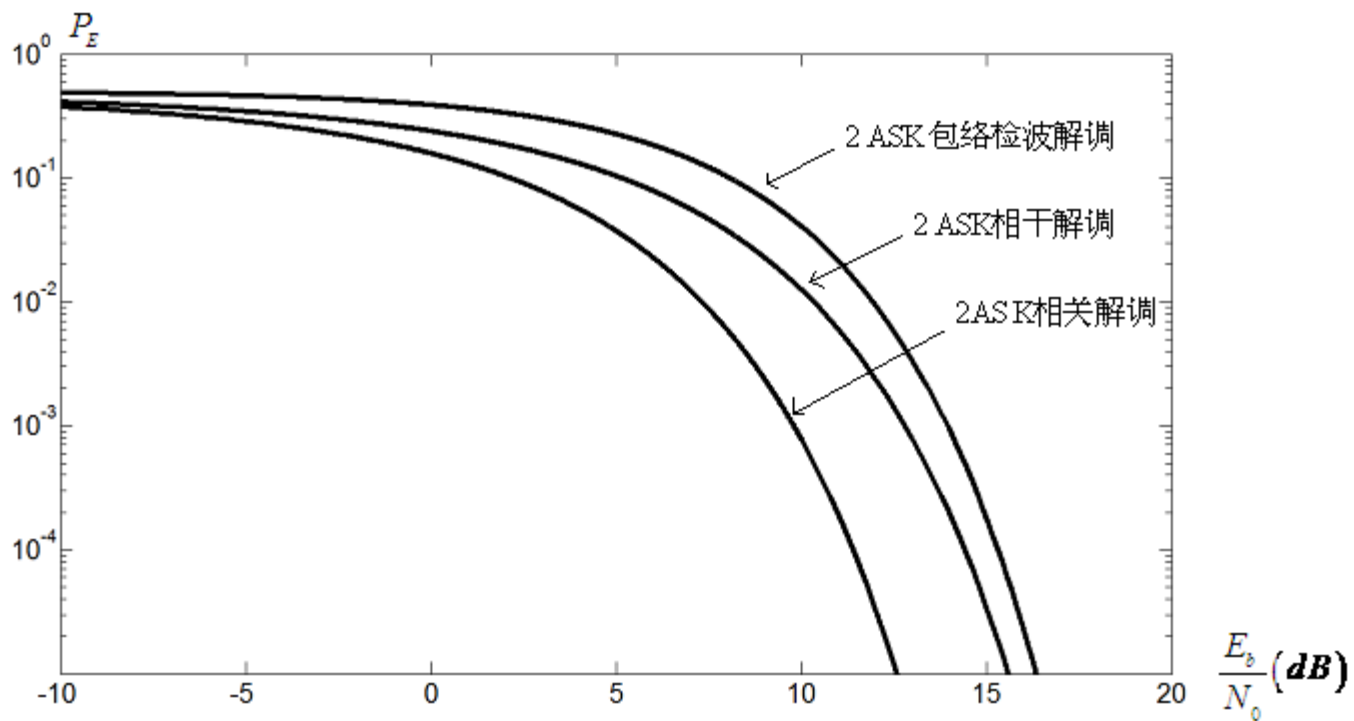
(2) 采用相关解调法

$$E_b = \frac{1}{4} a^2 T = \frac{1}{4} (10^{-3})^2 \frac{1}{4.8 \times 10^6} = \frac{1}{4 \times 4.8} 10^{-12} \text{ (焦耳)}$$

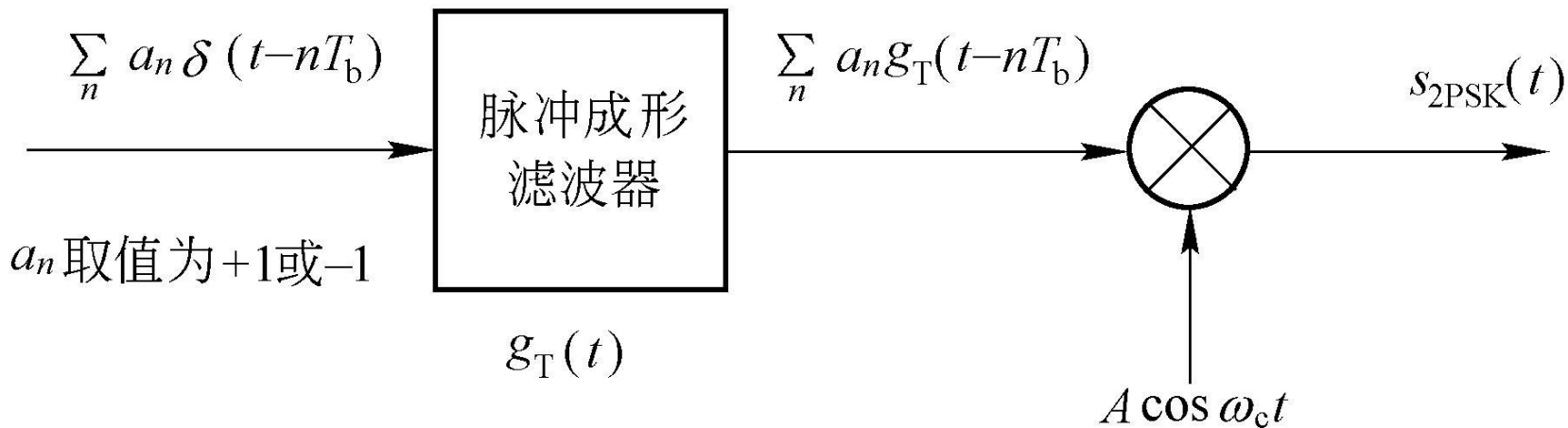
$$\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} = \left(\left(\frac{1}{4 \times 4.8} 10^{-12} \right) / (2 \times 10^{-15}) \right)^{1/2} = 5.1 > 3$$

$$P_E = Q \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \approx \exp \left(- \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)^2 / 2 \right) / \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \sqrt{2\pi} \right)$$

$$= \frac{\exp \left(- \frac{5.1^2}{2} \right)}{5.1 \times \sqrt{2\pi}} = \frac{\exp \left(- \frac{5.1^2}{2} \right)}{5.1 \times \sqrt{2\pi}} \approx \frac{\exp(-13)}{12.78} = 1.77 \times 10^{-7}$$



二进制移相键控(2PSK或BPSK)



2PSK信号的产生框图

2PSK调制解调系统



二进制移相键控调制：2PSK (Phase Shift Keying)

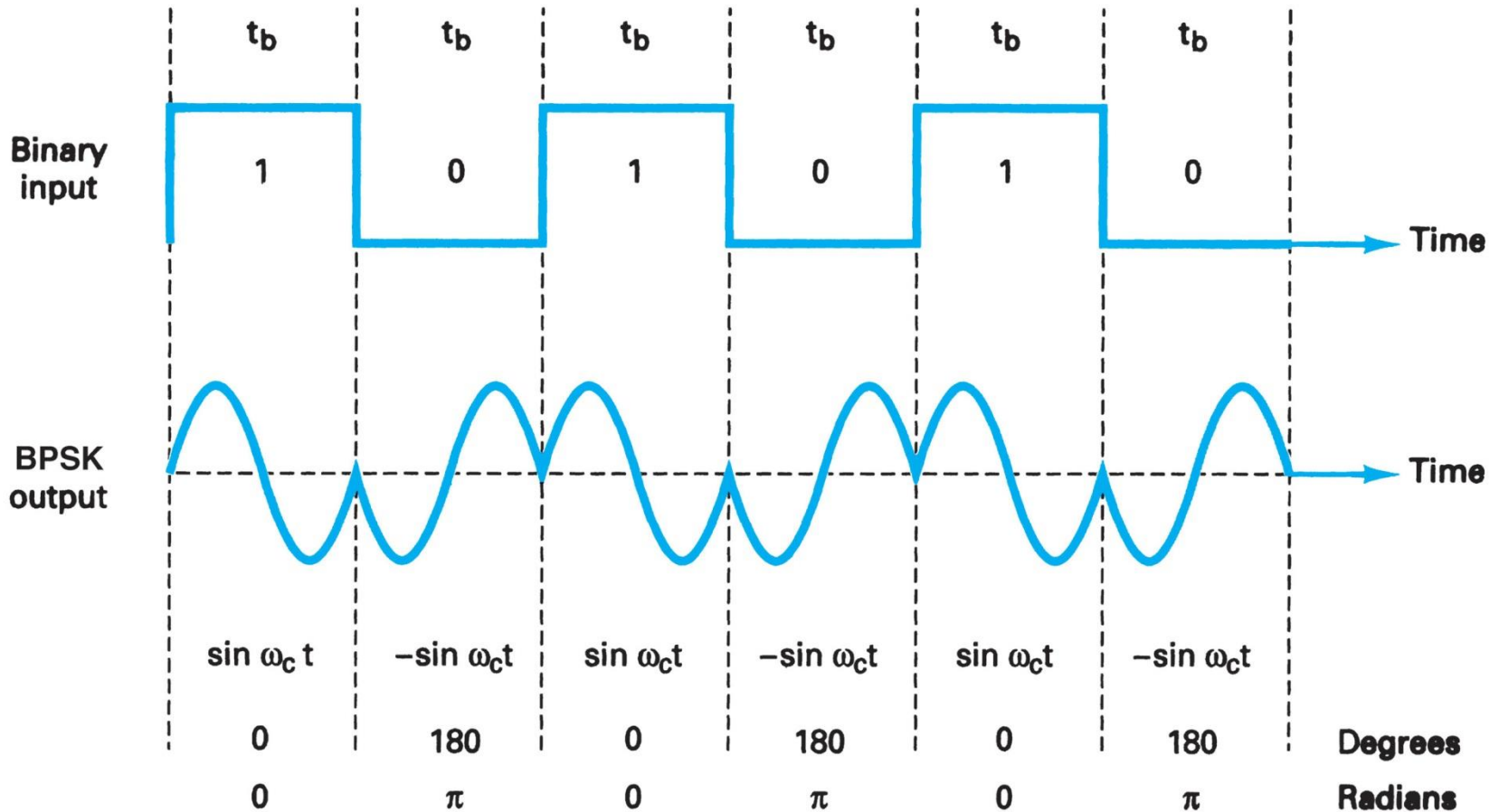
$$s(t) = x_n(t) \cos \omega_c t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT) \cos \omega_c t$$

$$a_n = \begin{cases} +a, & \text{概率为 } P \\ -a, & \text{概率为 } (1-P) \end{cases}$$

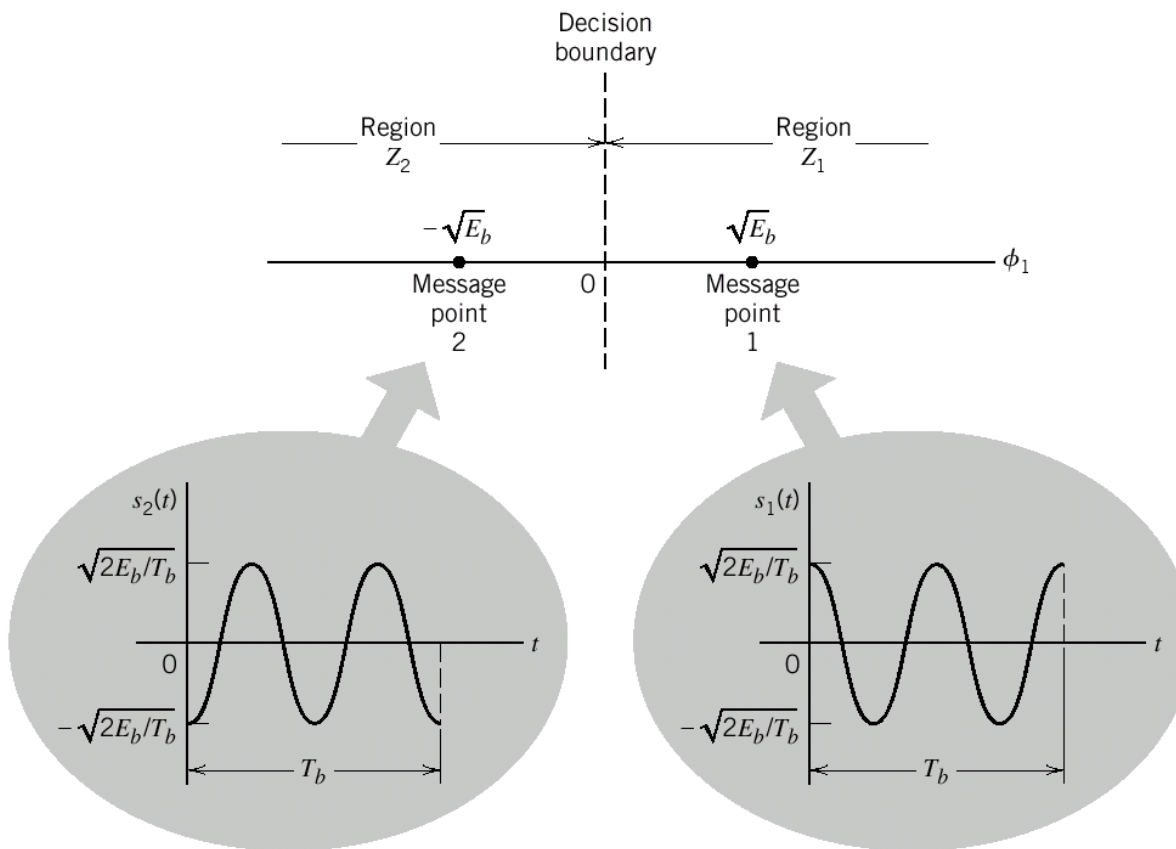
若基带信号的波形函数为门函数，2PSK信号可简要表示为

$$s(t) = \begin{cases} +a \cos \omega_c t, & \text{概率为 } P \\ -a \cos \omega_c t, & \text{概率为 } (1-P) \end{cases}$$

BPSK波形



BPSK星座图



2PSK调制解调系统(续)



2PSK信号的功率密度谱

$$P_s(f) = P_{x_n(t)\cos\omega_c t}(f) = \frac{1}{4T} P_a(f) \left(|G_T(f + f_c)|^2 + |G_T(f - f_c)|^2 \right)$$

若基带信号波形为门函数，则

$$P_s(f) = \frac{T}{4} P_a(f) \left(\text{sinc}^2((f + f_c)T) + \text{sinc}^2((f - f_c)T) \right)$$

因为，先验等概时有 $m_a = E[a_n] = 0$

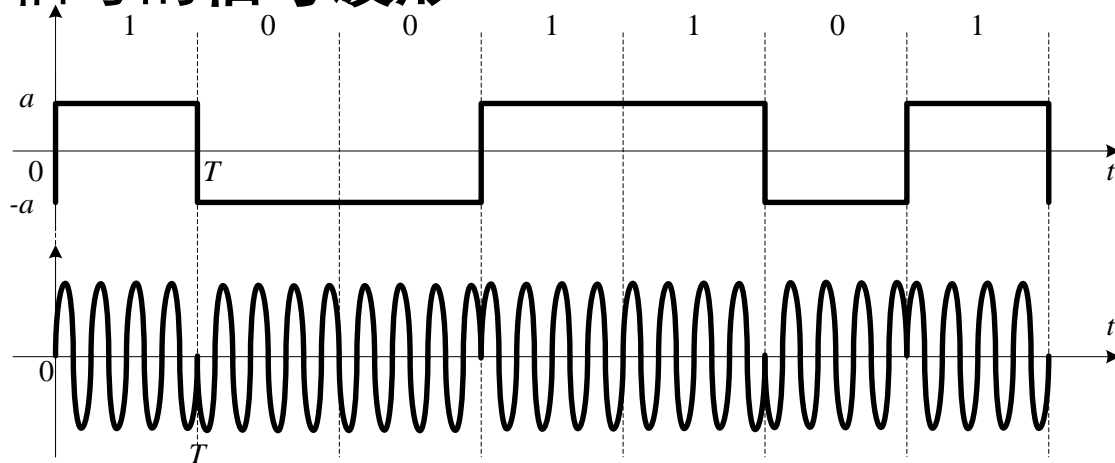
因此可得

$$\begin{aligned} P_s(f) &= \frac{T}{4} P_a(f) \left(\text{sinc}^2((f + f_c)T) + \text{sinc}^2((f - f_c)T) \right) \\ &= \frac{T}{4} \left(\sigma_a^2 + \frac{m_a^2}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) \right) \left(\text{sinc}^2((f + f_c)T) + \text{sinc}^2((f - f_c)T) \right) \\ &= \frac{T}{4} \sigma_a^2 \left(\text{sinc}^2((f + f_c)T) + \text{sinc}^2((f - f_c)T) \right) \end{aligned}$$

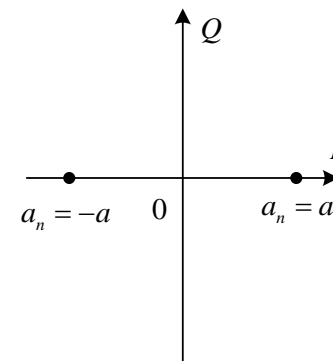
2PSK调制解调系统(续)



2PSK信号的信号波形

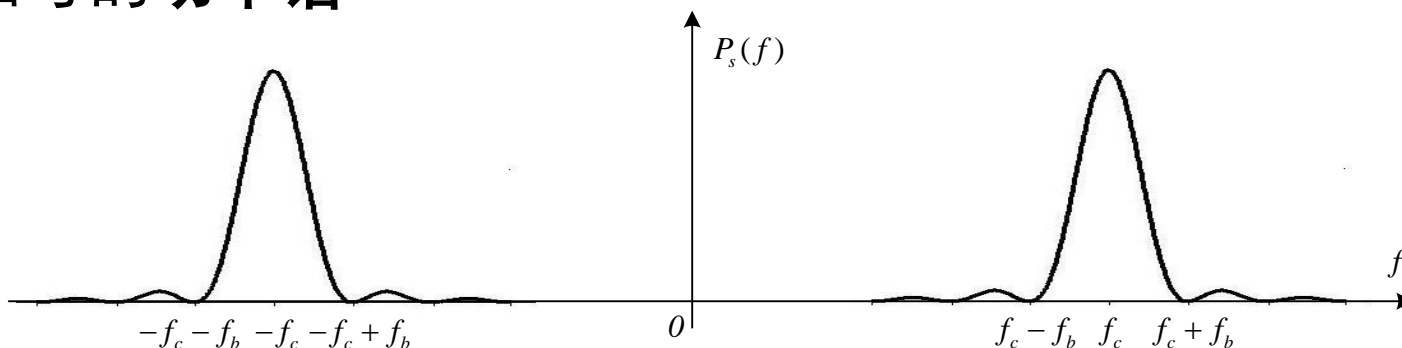


(a)



(b)

2PSK信号的功率谱



频带效率

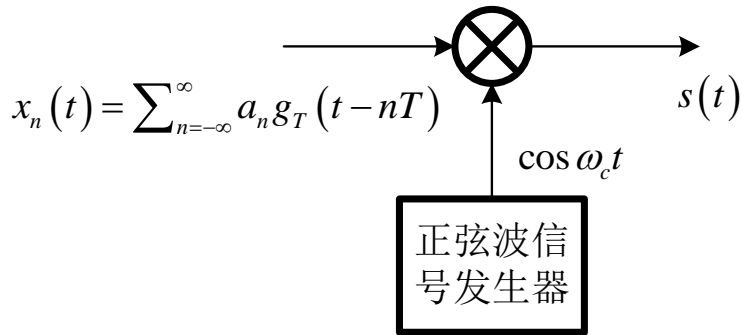
$$\eta_{2PSK} = \frac{R_S}{W_{2PSK}} = \frac{R_S}{2W_B} = \frac{1}{2} \eta_B$$

η_B 为基带信号频带效率。

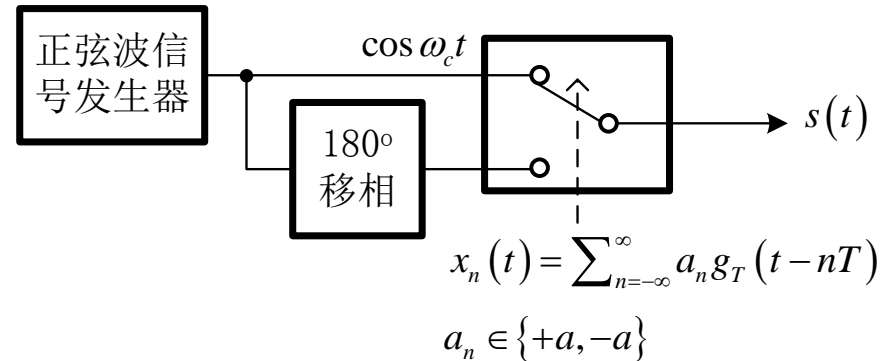
2PSK调制解调系统(续)



2PSK信号的调制实现方法



(a)



(b)

调制信号可被看作由一串调制脉冲 $u_n(t)$ 组成

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t)$$

其中

$$u_n(t) = \begin{cases} +s_1(t-nT), & \text{发送“1”时} \\ -s_1(t-nT), & \text{发送“0”时} \end{cases}$$

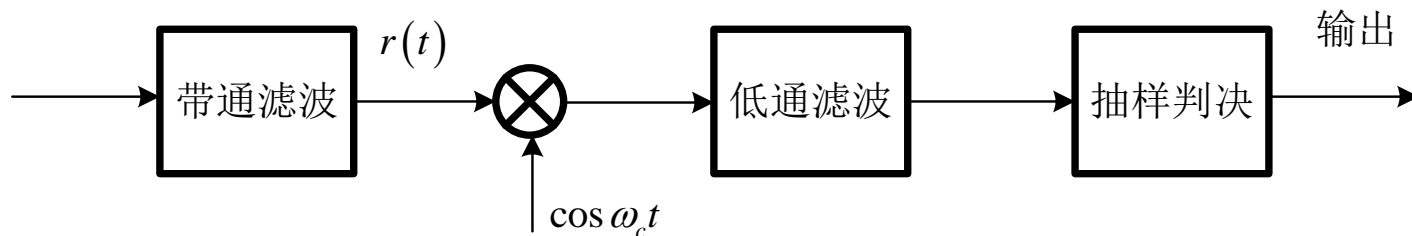
$$s_1(t) = \begin{cases} a \cos \omega_c t, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{其他} t \end{cases}$$

2PSK调制解调系统(续)



2PSK信号的解调方法

(1) 2PSK信号的相干解调



对第 n 个码元信号

$$r_n(t) = u_n(t) + n(t) \quad n(t) = n_c(t)\cos(\omega_c t) - n_s(t)\sin(\omega_c t)$$

可得

$$r_n(t) = \begin{cases} a \cos \omega_c t + n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t, & \text{发“1”时} \\ -a \cos \omega_c t + n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t, & \text{发“0”时} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (a + n_c(t)) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t, & \text{发“1”时} \\ (-a + n_c(t)) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t, & \text{发“0”时} \end{cases}$$

2PSK调制解调系统(续)



(1) 2PSK信号的相干解调(续)

$$r_n(t) \cos \omega_c t = \begin{cases} (a + n_c(t)) \cos \omega_c t \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t \cos \omega_c t, & \text{发“1”时} \\ (-a + n_c(t)) \cos \omega_c t \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t \cos \omega_c t, & \text{发“0”时} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(a + n_c(t))(1 + \cos 2\omega_c t) - \frac{1}{2}n_s(t) \sin 2\omega_c t, & \text{发“1”时} \\ \frac{1}{2}(-a + n_c(t))(1 + \cos 2\omega_c t) - \frac{1}{2}n_s(t) \sin 2\omega_c t, & \text{发“0”时} \end{cases}$$

经低通后得到的基带信号

$$z_n(t) = \begin{cases} +a + n_c(t), & \text{发“1”时} \\ -a + n_c(t), & \text{发“0”时} \end{cases}$$

2PSK调制解调系统(续)

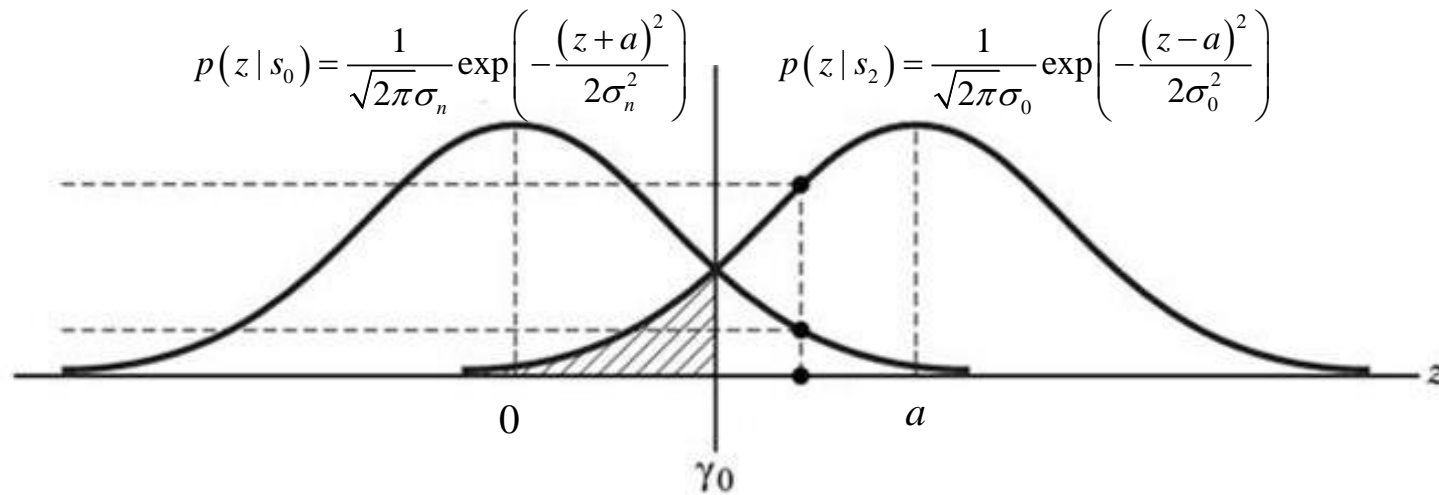


(1) 2PSK信号的相干解调(续) 由高斯噪声 $n_c(t)$ 的分布特性

$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

得到发“0”和“1”时的似然函数

$$p(z|s_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{(z+a)^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad p(z|s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{(z-a)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$



2PSK调制解调系统(续)



(1) 2PSK信号的相干解调(续) 先验等概条件下的最佳判决门限

$$\gamma_0 = 0$$

判决规则

$$z \begin{cases} < \gamma_0, & \text{判发送“0?”} \\ \geq \gamma_0, & \text{判发送“1?”} \end{cases}$$

误码率为

$$P_E = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{a - (-a)}{2\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{2a}{2\sigma_n}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{a^2}{\sigma_n^2}}\right)$$

因为

$$\sigma_{n_c}^2 = \sigma_n^2 = W_c N_0 = \frac{2N_0}{T} \quad E_{s0} = \int_0^T (-a)^2 dt = a^2 T$$

$$E_b = \frac{1}{2} E_{s0} + \frac{1}{2} E_{s1} = \frac{1}{2} (a^2 T)$$

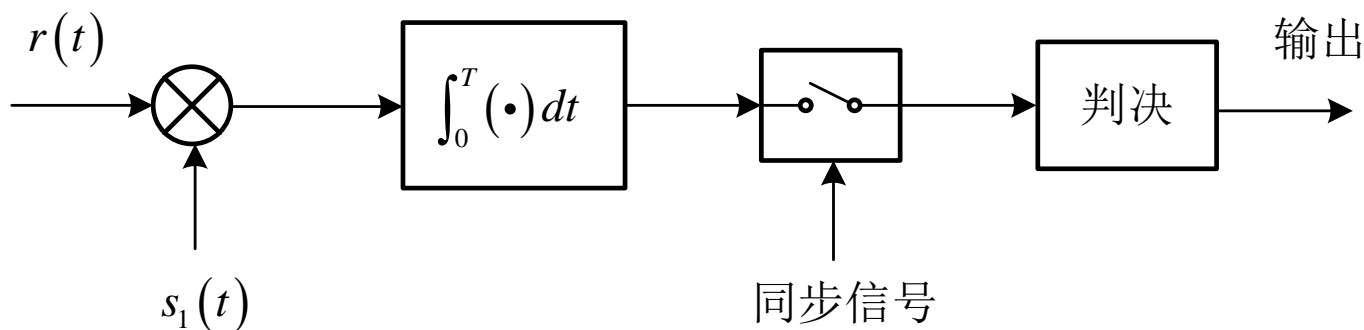
可得

$$P_E = Q\left(\sqrt{\frac{a^2}{\sigma_n^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{a^2 T / 2}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

2PSK调制解调系统(续)



(2) 2PSK信号的相关(匹配滤波器法)解调



在 $t=T$ 时刻判决输出 $z(T) = \int_0^T r(t) s_1(t) dt$

若发送“0”

$$\begin{aligned} z_0(T) &= \int_0^T r(t) s_1(t) dt = \int_0^T (-s_1(t) + n_w(t)) s_1(t) dt \\ &= \int_0^T -s_1^2(t) dt + \int_0^T n_w(t) s_1(t) dt = -E_{s_1} + N_1 \end{aligned}$$

若发送“1”

$$\begin{aligned} z_1(T) &= \int_0^T r(t) s_1(t) dt = \int_0^T (s_1(t) + n_w(t)) s_1(t) dt \\ &= \int_0^T s_1^2(t) dt + \int_0^T n_w(t) s_1(t) dt = E_{s_1} + N_1 \end{aligned}$$

2PSK调制解调系统(续)



(2) 2PSK信号的相关(匹配滤波器法)解调(续)

高斯噪声 N_1 的均值和方差分别为

$$E[N_1] = E\left[\int_0^T n_w(t) s_1(t) dt\right] = \int_0^T E[n_w(t)] s_1(t) dt = 0$$

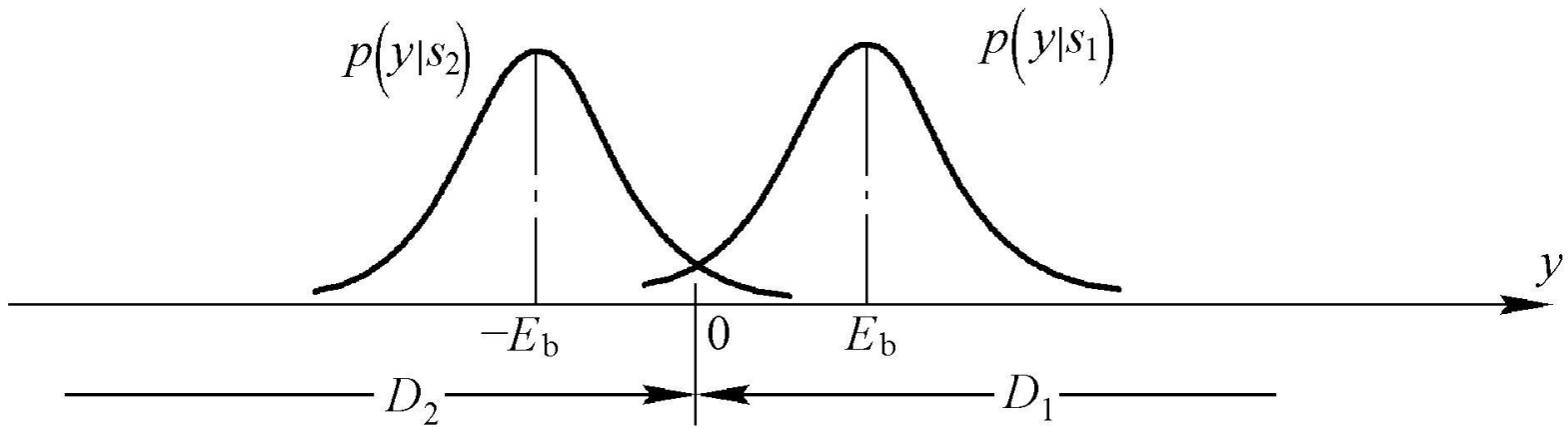
$$\begin{aligned}\sigma_N^2 &= E\left[(N_1 - E[N_1])^2\right] = E\left[(N_1)^2\right] \\ &= E\left[\int_0^T n_w(t_1) s_1(t_1) dt_1 \int_0^T n_w(t_2) s_1(t_2) dt_2\right] \\ &= \int_0^T \int_0^T E[n_w(t_1) n_w(t_2)] s_1(t_1) s_1(t_2) dt_1 dt_2 \\ &= \int_0^T \int_0^T \frac{N_0}{2} \delta(t_2 - t_1) s_1(t_1) s_1(t_2) dt_1 dt_2 \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T s_1(t_2) s_1(t_2) dt_2 = \frac{N_0}{2} E_{s1}\end{aligned}$$

Y 的条件概率密度函数



$$p(y | s_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 E_b}} \exp\left[-\frac{(y + E_b)^2}{N_0 E_b}\right]$$

$$p(y | s_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 E_b}} \exp\left[-\frac{(y - E_b)^2}{N_0 E_b}\right]$$



2PSK调制解调系统(续)



(2) PSK信号的相关(匹配滤波器法)解调(续)

可得发“0”和发“1”时的似然函数

$$p(z | s_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_N} \exp\left(-\frac{(z + E_{s1})^2}{2\sigma_N^2}\right)$$

$$p(z | s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_N} \exp\left(-\frac{(z - E_{s1})^2}{2\sigma_N^2}\right)$$

先验等概 $P(s_1)=P(s_2)=1/2$ 时, 最佳判决门限

$$\gamma_0 = 0$$

判决规则
$$z \begin{cases} < \gamma_0, & \text{判发送“0”} \\ \geq \gamma_0, & \text{判发送“1”} \end{cases}$$

2PSK调制解调系统(续)



(2) 2PSK信号的相关(匹配滤波器法)解调(续)

误码率

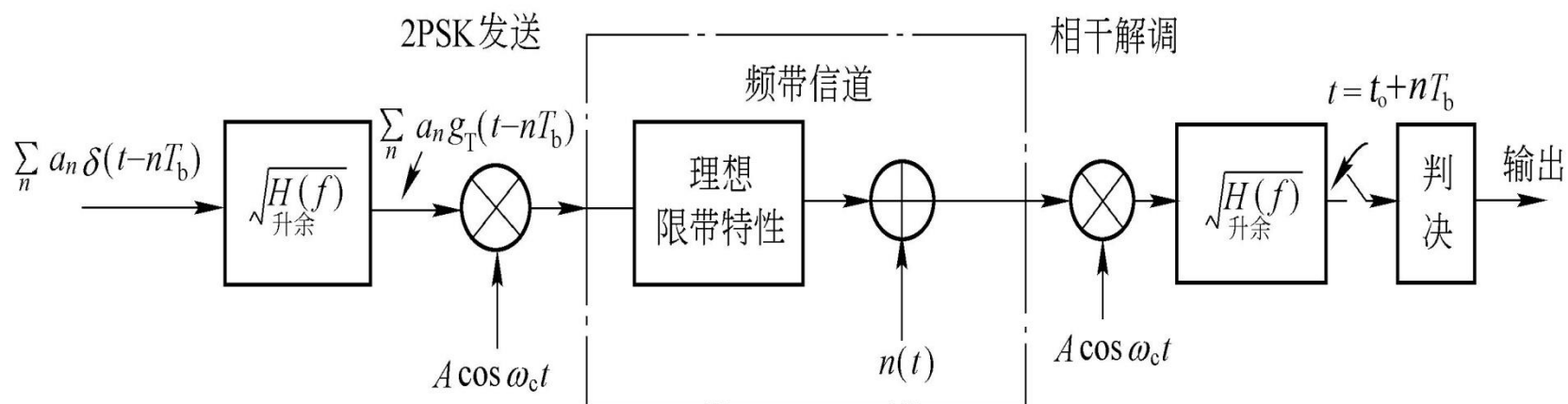
$$\begin{aligned} P_E &= Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{E_{s1} - (-E_{s1})}{2\sigma_N}\right) = Q\left(\frac{2E_{s1}}{2\sqrt{N_0 E_{s1}/2}}\right) \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{2E_{s1}}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \end{aligned}$$

2PSK信号不能用包络检波法解调。

相干法和相关法解调的性能比较

$$P_E|_{\text{相关法}} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) < P_E|_{\text{相干法}} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

即相关解调法的性能优于相干解调法。



在理想限带及加性白高斯噪声干扰的信道条件下，2PSK的最佳频带传输系统框图



◆ **2PSK信号中没有纯的载波成分，携带信息的已调载波信号的相位在 0° 和 180° 两种取值中变化。通过2PSK信号的解调一节的讨论可知，解调过程需要恢复载波信号作为相干或相关解调时的基准信号。在稍后的介绍同步的一章中将了解到，在接收端从接收信号提取载波信息的过程中，实际上并不能够确切地知道恢复出的载波信号的相位一定是 0° 或一定是 180° 。而只能知道恢复出来的载波的相位，是 0° 或 180° 中的某一个，具体是 0° 还是 180° 则具有随机性，这就是2PSK信号解调时的相位模糊问题。相位模糊会导致解调后基带信号符号的反转，即原来的“0”变为“1”，原来的“1”变为“0”。实际上，对所有的相位调制信号，在解调时都会存在类似的相位模糊的问题。**

恢复载波的相位模糊问题



- ◆ 在2PSK相干解调时，利用上述两种方法所恢复的载波有可能与接收的2PSK信号的载波同频同相，也可能发生同频反相的情况，这种恢复载波的相位不确定关系称为**相位模糊**。
- ◆ 为了解决此问题，采取的措施之一是利用差分移相键控(DPSK)调制方案。



◆ DPSK的特点是利用在当前比特的载波相位

θ_n 与前一比特的载波相位 θ_{n-1} 的相位差($\theta_n - \theta_{n-1}$)来传递当前的绝对码 $\{b_n\}$ 。

◆ 0表示前后相位相同， 1表示前后相位不同

2DPSK调制解调系统



2PSK信号解调时有本地载波的“相位模糊”问题导致解调时“0”与“1”符号的倒换。

2DPSK信号可解决“相位模糊”引起的“0”与“1”符号的倒换问题。

2DPSK信号的产生

二进制信息序列 $\{b_n\}$ $b_n \in \{0,1\}$

差分编码 $a'_n = b_n \oplus a'_{n-1}$ $a'_n \in \{0,1\}$

信号变换 $a_n = \begin{cases} +a, & a'_n = 1 \\ -a, & a'_n = 0 \end{cases}$

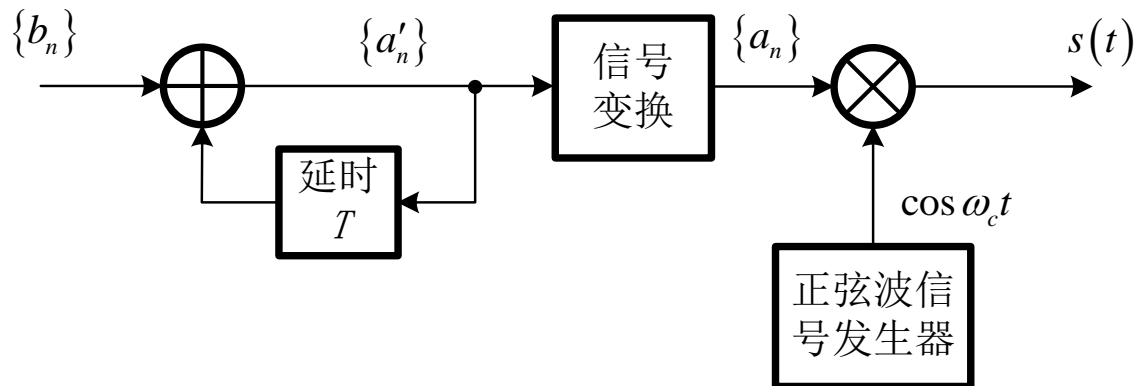
或 $a_n = \begin{cases} +a, & a'_n = 0 \\ -a, & a'_n = 1 \end{cases}$

或

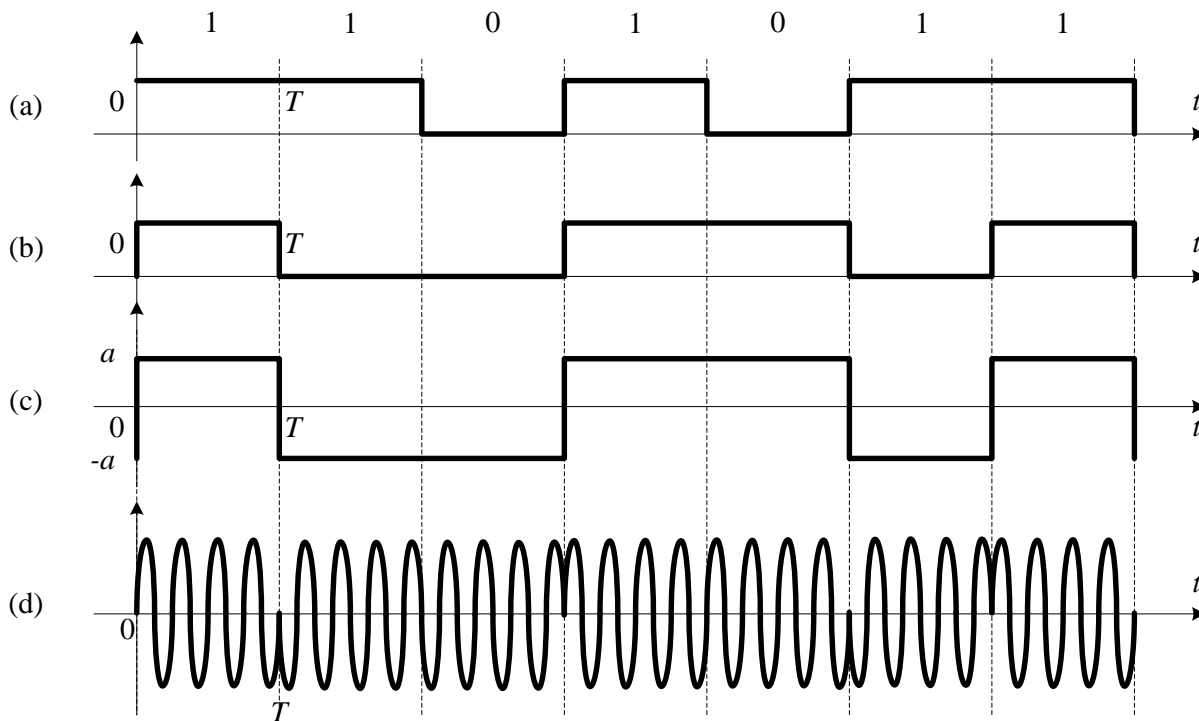
2DPSK调制解调系统(续)



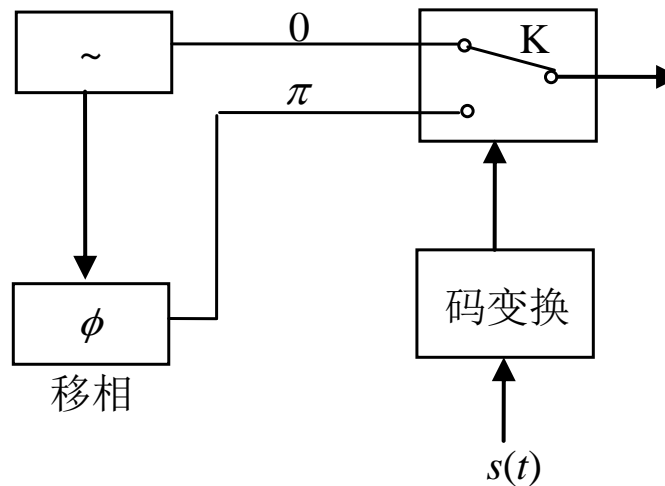
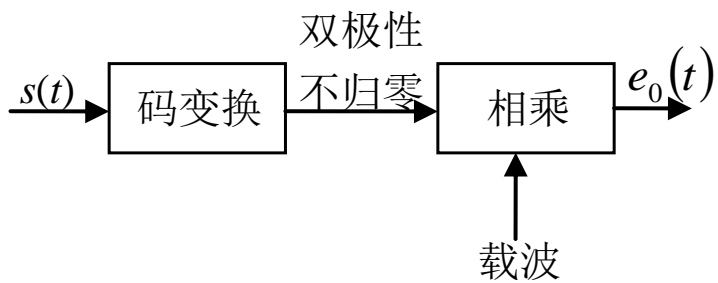
2DPSK信号 的产生方法



2DPSK信号波形



2DPSK的调制框图



DPSK信号的平均功率谱密度



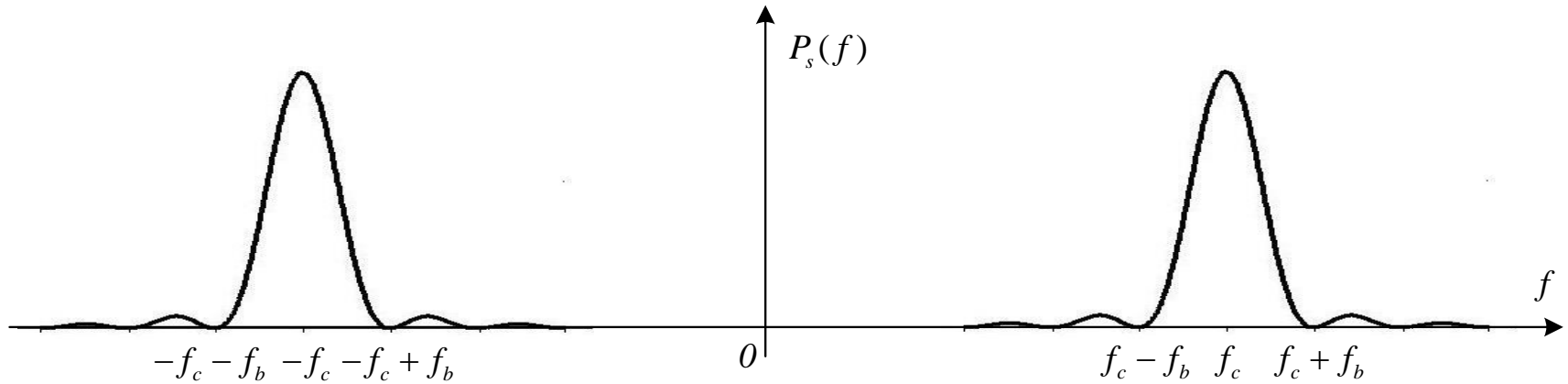
◆ DPSK信号的平均功率谱密度与2PSK信号的平均功率谱密度是相同的。

2DPSK调制解调系统(续)

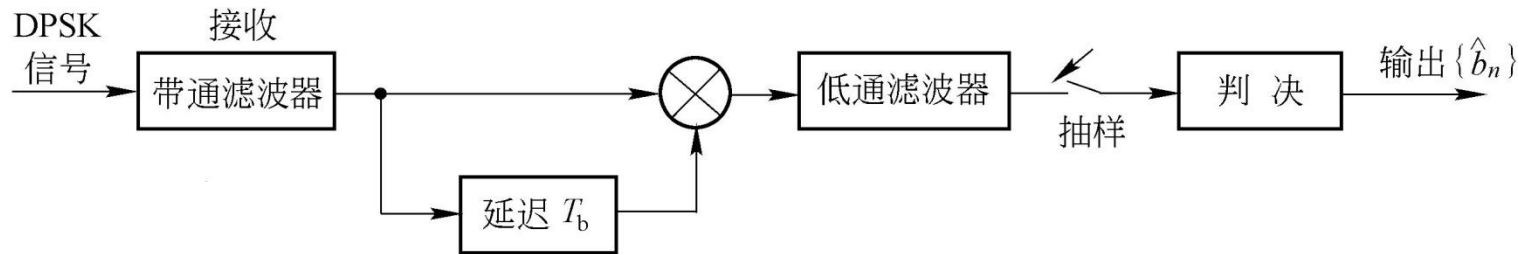


2DPSK信号的功率谱特性

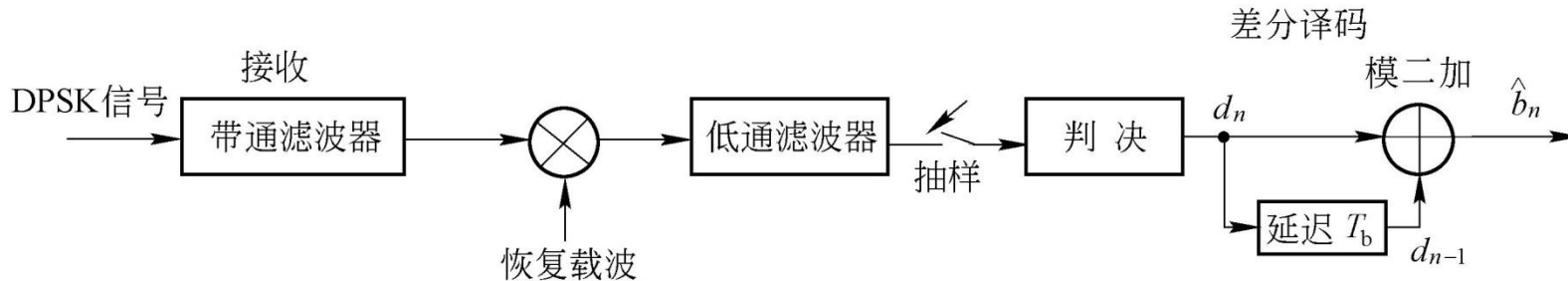
表达式与2PSK信号相同



DPSK信号的解调



(a) DPSK差分相干解调框图



(b) DPSK相干解调框图

DPSK解调的两种方案

非相干检测



(1) 差分PSK信号检测

差分信号解调：根据当前码元与前一码元的变化来进行解码。

发送信号：

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos [\omega_0 t + \theta_i(t)] \quad \begin{array}{l} 0 \leq t \leq T \\ i = 1, \dots, M \end{array}$$

接收信号：

$$r(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos [\omega_0 t + \theta_i(t) + \alpha] + n(t) \quad \begin{array}{l} 0 \leq t \leq T \\ i = 1, \dots, M \end{array}$$

判别依据：

$$[\theta_k(T_2) + \alpha] - [\theta_j(T_1) + \alpha] = \theta_k(T_2) - \theta_j(T_1) = \phi_i(T_2)$$

以前一码元信号相位作为参考基准，根据前后两个码元的相位差来确定发送的符号。

(1) 差分PSK信号检测



2DPSK信号产生 记：信息码为 $m(k)$,差分码为 $c(k)$

$$m(k) \xrightarrow{\begin{matrix} c(k)=m(k)\oplus c(k-1) \text{ 或} \\ c(k)=\overline{m(k)\oplus c(k-1)} \end{matrix}} c(k) \xrightarrow{2PSK \text{ 调制}} 2DPSK$$

由 $c(k) = m(k) \oplus c(k-1)$ 得到传号差分码；

由 $c(k) = \overline{m(k) \oplus c(k-1)}$ 得到空号差分码。

例：

空号差分码

Sample index, k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Information message, $m(k)$		1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
Differentially encoded message (first bit arbitrary), $c(k)$	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
Corresponding phase shift, $\theta(k)$	π	π	π	0	0	π	π	π	0	π	π

2DPSK调制解调系统(续)



2DPSK信号的解调

(1) 2DPSK信号的相干解调与相关解调

- 首先采用2PSK信号的相干或相关解调获得符号序列 $\{a_n\}$
- 由 $\{a_n\}$ 经变换获得差分的信息序列 $\{a'_n\}$
- 由 $\{a'_n\}$ 经差分译码恢复信息序列 $\{b_n\}$ 。

差分码译码

$$a'_n \oplus a'_{n-1} = (b_n \oplus a'_{n-1}) \oplus a'_{n-1} = b_n \oplus (a'_{n-1} \oplus a'_{n-1}) = b_n$$

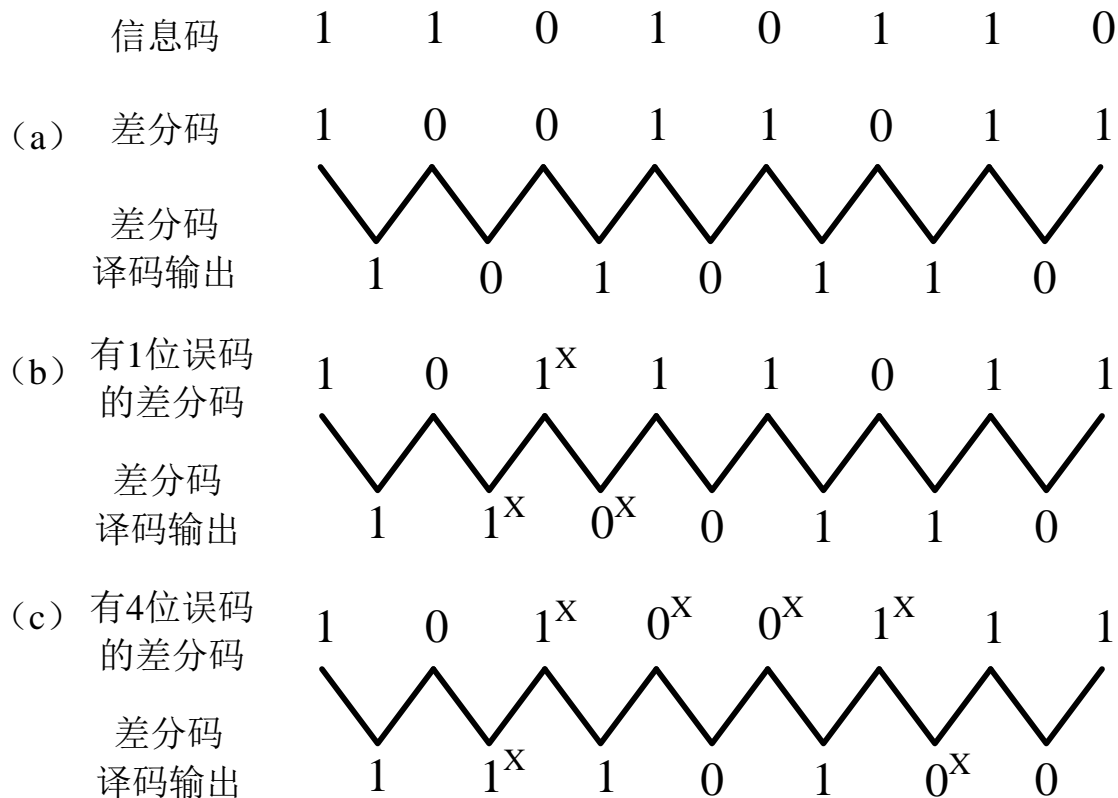
可解决相位模糊产生的“0”与“1”的倒换问题。

2DPSK调制解调系统(续)



(1) 2DPSK信号的相干解调与相关解调(续)

2DPSK信号相干解调与相关解调的误码性能分析



任意位的连续误码差分译码后只会产生两位误码。

2DPSK调制解调系统(续)



2DPSK信号相干解调与相关解调的误码性能分析

出现1位误码的概率 $P_1 = (1 - P_e)P_e(1 - P_e)$

出现2位误码的概率 $P_2 = (1 - P_e)P_e^2(1 - P_e)$

... ..

出现n位误码的概率 $P_n = (1 - P_e)P_e^n(1 - P_e)$

总的误码概率

$$\begin{aligned} P_{E,2DPSK} &= 2P_1 + 2P_2 + \dots + 2P_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} 2P_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2(1 - P_e)P_e^k(1 - P_e) = 2(1 - P_e)^2 \sum_{k=1}^{\infty} P_e^k \\ &= 2(1 - P_e)P_e \end{aligned}$$

二进制系统的差错性能



2DPSK相干检测的误比特率

得：

$$P_B = 2(1 - P_E)P_E = 2 \left(1 - Q \left[\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right] \right) Q \left[\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right] \approx 2Q \left[\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right]$$

性能较2PSK略差。

DPSK解调的平均误比特率

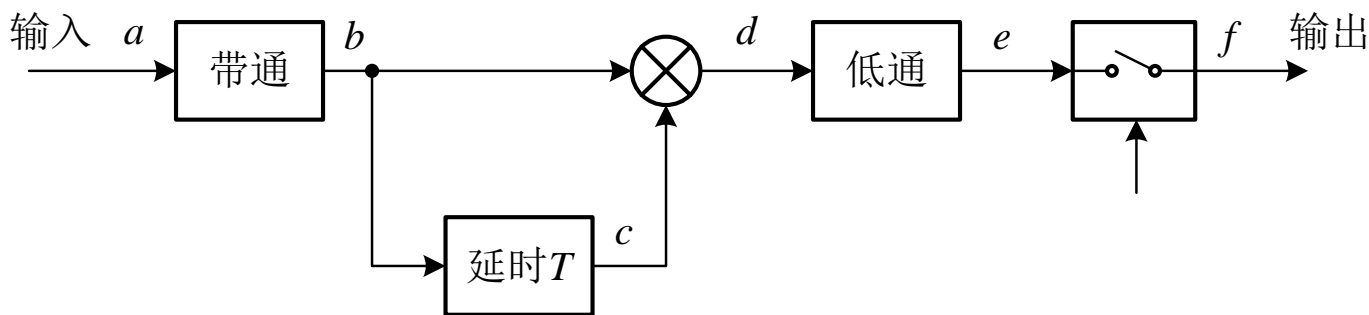


- ◆绝对移相键控系统的 P_b 很小时，DPSK的平均误比特率近似等于2倍的2PSK的平均误比特率。
- ◆在实际应用中，经常用DPSK代替2PSK，因为DPSK不受恢复载波的相位模糊对相干解调的影响。

2DPSK调制解调系统(续)



(2) 2DPSK信号的差分相干解调



特点：在本地无须恢复载波信号。

接收的第 n 个码元信号

$$u_n(t) = a_n \cos \omega_c t, \quad 0 \leq t \leq T, a_n \in \{+a, -a\}$$

相乘后在图中d点位置的信号

$$\begin{aligned} u_n(t)u_{n-1}(t) &= a_n a_{n-1} \cos \omega_c t \cos \omega_c t, \\ &= \frac{a_n a_{n-1}}{2} (1 + \cos 2\omega_c t), \quad 0 \leq t \leq T; a_{n-1}, a_n \in \{+a, -a\} \end{aligned}$$

2DPSK调制解调系统(续)



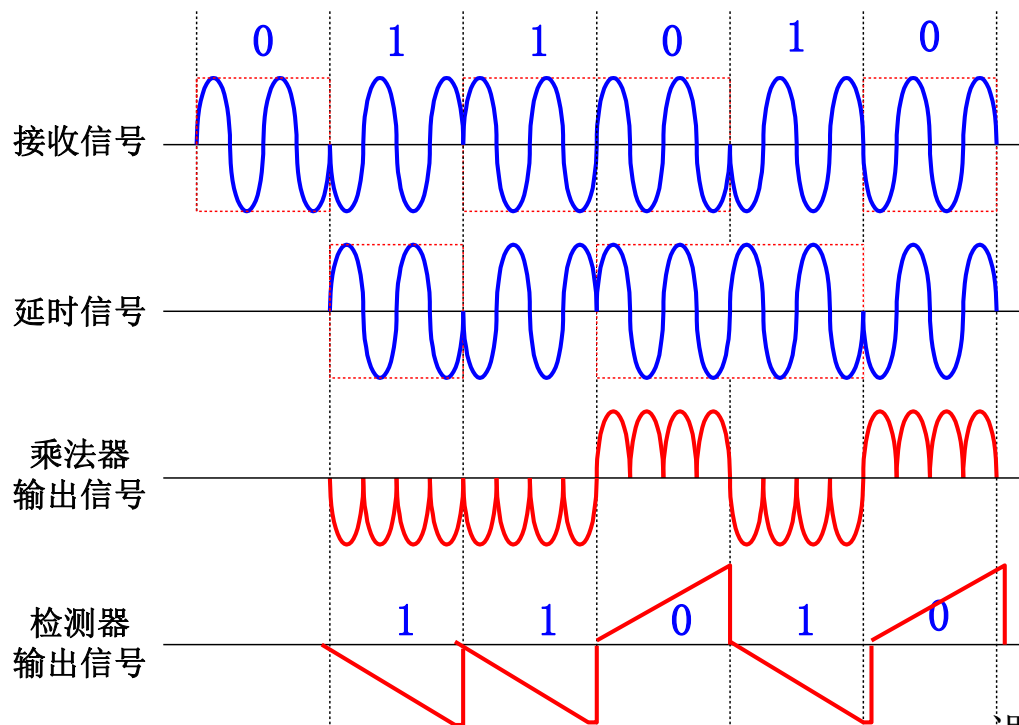
(2) 2DPSK信号的差分相干解调(续) 经低通滤波后输出信号

$$u_e(t) = a_n a_{n-1}, \quad 0 \leq t \leq T; a_{n-1}, a_n \in \{+a, -a\}$$

判决策略

$$u_e(t) = a_n a_{n-1} = \begin{cases} a^2 \geq 0, & \text{判发送"0"} \\ -a^2 < 0, & \text{判发送"1"} \end{cases}$$

**信号处理
过程。**



2DPSK调制解调系统(续)



2DPSK信号差分相干解调的误码性能分析

因为 $u'_{n-1}(t) = (a_{n-1} + n_{c,n-1}(t))\cos\omega_c t - n_{s,n-1}(t)\sin\omega_c t$, $(n-2)T \leq t \leq (n-1)T$

$u'_n(t) = (a_n + n_{c,n}(t))\cos\omega_c t - n_{s,n}(t)\sin\omega_c t$, $(n-1)T \leq t \leq nT$

因此有

$$\begin{aligned}
 & u'_{n-1}(t)u'_n(t) \\
 &= \left((a_{n-1} + n_{c,n-1}(t))\cos\omega_c t - n_{s,n-1}(t)\sin\omega_c t \right) \left((a_n + n_{c,n}(t))\cos\omega_c t - n_{s,n}(t)\sin\omega_c t \right) \\
 &= (a_{n-1} + n_{c,n-1}(t))(a_n + n_{c,n}(t))\cos\omega_c t \cos\omega_c t - (a_{n-1} + n_{c,n-1}(t))n_{s,n}(t)\sin\omega_c t \cos\omega_c t \\
 &\quad - (a_n + n_{c,n}(t))n_{s,n-1}(t)\sin\omega_c t \cos\omega_c t + n_{s,n-1}(t)n_{s,n}(t)\sin\omega_c t \sin\omega_c t \\
 &= (a_{n-1} + n_{c,n-1}(t))(a_n + n_{c,n}(t))\frac{1 + \cos 2\omega_c t}{2} - (a_{n-1} + n_{c,n-1}(t))n_{s,n}(t)\frac{\sin 2\omega_c t}{2} \\
 &\quad - (a_n + n_{c,n}(t))n_{s,n-1}(t)\frac{\sin 2\omega_c t}{2} + n_{s,n-1}(t)n_{s,n}(t)\frac{1 - \cos 2\omega_c t}{2}, \quad (n-1)T \leq t \leq nT
 \end{aligned}$$

2DPSK调制解调系统(续)



2DPSK信号差分相干解调的误码性能分析(续)

经低通滤波器输出

$$v_n(t) = (a_n + n_{c,n}(t))(a_{n-1} + n_{c,n-1}(t)) + n_{s,n}(t)n_{s,n-1}(t), \quad (n-1)T \leq t \leq nT$$

利用数学恒等式

$$x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{1}{4} \left(\left((x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \right) - \left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \right) \right)$$

可得

$$v_n(t) = \frac{1}{4} \left(\left(a_n + a_{n-1} + n_{c,n}(t) + n_{c,n-1}(t) \right)^2 + \left(n_{s,n}(t) + n_{s,n-1}(t) \right)^2 \right) - \frac{1}{4} \left(\left(a_n - a_{n-1} + n_{c,n}(t) - n_{c,n-1}(t) \right)^2 + \left(n_{s,n}(t) - n_{s,n-1}(t) \right)^2 \right)$$

2DPSK调制解调系统(续)



2DPSK信号差分相干解调的误码性能分析(续)

a. 第n位信息为"0"时, 应有

$$a_{n-1}=+a, a_n=+a \quad \text{或} \quad a_{n-1}=-a, a_n=-a$$

判决时
$$v_n(t) = (a_n + n_{c,n}(t))(a_{n-1} + n_{c,n-1}(t)) + n_{s,n}(t)n_{s,n-1}(t)$$

$$\begin{cases} \geq 0, & \text{判发送"0", 判决正确} \\ < 0, & \text{判发送"1", 判决错误} \end{cases}$$

或

$$(2a + n_{c,n}(t) + n_{c,n-1}(t))^2 + (n_{s,n}(t) + n_{s,n-1}(t))^2$$

$$\geq (n_{c,n}(t) - n_{c,n-1}(t))^2 + (n_{s,n}(t) - n_{s,n-1}(t))^2 : \text{判发送"0", 判决正确}$$

$$(2a + n_{c,n}(t) + n_{c,n-1}(t))^2 + (n_{s,n}(t) + n_{s,n-1}(t))^2$$

$$< (n_{c,n}(t) - n_{c,n-1}(t))^2 + (n_{s,n}(t) - n_{s,n-1}(t))^2 : \text{判发送"1"判决错误}$$

2DPSK调制解调系统(续)



2DPSK信号差分相干解调的误码性能分析(续)

对于高斯随机变量

$$n_{c,n}(t) + n_{c,n-1}(t) \quad n_{s,n}(t) + n_{s,n-1}(t)$$

$$n_{c,n}(t) - n_{c,n-1}(t) \quad n_{s,n}(t) + n_{s,n-1}(t)$$

其均值为0，方差为 $\sigma_n'^2 = 2\sigma_n^2$ 。

上述高斯随机变量的包络

$$V_0(t) = \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)}$$

包络取值的分布特性为

$$p(V_0) = \frac{V_0}{\sigma_n'^2} \exp\left(-\frac{V_0^2}{2\sigma_n'^2}\right)$$

2DPSK调制解调系统(续)



2DPSK信号差分相干解调的误码性能分析(续)

对于高斯随机变量

$$2a + n_{c,n}(t) + n_{c,n-1}(t)$$

均值为 $a' = 2a$ ，方差为 $\sigma_n'^2 = 2\sigma_n^2$

该高斯随机变量的包络

$$V_1(t) = \sqrt{\left(2a + n_{c,n}(t) + n_{c,n-1}(t)\right)^2 + \left(n_{s,n}(t) + n_{s,n-1}(t)\right)^2}$$

包络取值的分布特性

$$p(V_1) = \frac{V_1}{\sigma_n'^2} \exp\left(-\frac{V_1^2 + a'^2}{2\sigma_n'^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{a'V_1}{\sigma_n'^2}\right)$$

2DPSK调制解调系统(续)



2DPSK信号差分相干解调的误码性能分析(续)

发生错误判决的概率

$$\begin{aligned}
 P_{e0} &= \Pr(V_1 < V_0) = \int_0^\infty p(V_1) \int_{V_0=V_1}^\infty p(V_0) dV_0 dV_1 \\
 &= \int_0^\infty \frac{V_1}{\sigma_n'^2} \exp\left(-\frac{V_1^2 + a'^2}{2\sigma_n'^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{a'V_1}{\sigma_n'^2}\right) \int_{V_0=V_1}^\infty \frac{V_0}{\sigma_n'^2} \exp\left(-\frac{V_0^2}{2\sigma_n'^2}\right) dV_0 dV_1 \\
 &= \int_0^\infty \frac{V_1}{\sigma_n'^2} \exp\left(-\frac{V_1^2 + a'^2}{2\sigma_n'^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{a'V_1}{\sigma_n'^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{V_1^2}{2\sigma_n'^2}\right) dV_1 \\
 &= \exp\left(-\frac{a'^2}{2\sigma_n'^2}\right) \int_0^\infty \frac{V_1}{\sigma_n'^2} \cdot I_0\left(\frac{a'V_1}{\sigma_n'^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{V_1^2}{\sigma_n'^2}\right) dV_1
 \end{aligned}$$

整理可得

$$P_{e0} = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) \int_0^\infty t I_0(\alpha t) \exp\left(-\frac{\alpha^2 + t^2}{2}\right) dt$$

其中

$$t = \frac{\sqrt{2}V_1}{\sigma_n'} \quad \alpha = \frac{a'}{\sqrt{2}\sigma_n'}$$

2DPSK调制解调系统(续)



2DPSK信号差分相干解调的误码性能分析(续)

已知马肯函数

$$Q_M(\alpha, \beta) = \int_{\beta}^{\infty} t I_0(\alpha t) e^{-\frac{t^2 + \alpha^2}{2}} dt$$

具有性质

$$Q_M(\alpha, \beta) \Big|_{\beta=0} = 1, \quad Q_M(\alpha, \beta) \Big|_{\alpha=0} = \exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right)$$

由此可得发送信息位为0时，出现误码的概率

$$P_{e0} = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{a'^2}{8\sigma_n'^2}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{a^2}{4\sigma_n^2}\right)$$

2DPSK调制解调系统(续)



b. 第n位信息为“1”时，应有

$$a_{n-1} = -a, a_n = +a \quad \text{或} \quad a_{n-1} = +a, a_n = -a$$

判决时

$$v_n(t) = (a_n + n_{c,n}(t))(a_{n-1} + n_{c,n-1}(t)) + n_{s,n}(t)n_{s,n-1}(t)$$

$$\begin{cases} \geq 0, & \text{判发送“0”, 判决错误} \\ < 0, & \text{判发送“1”, 判决正确} \end{cases}$$

此时有 (经变换后与信息位为0时相同)

$$v'_n(t) = -v_n(t)$$

$$= (-a_n + n_{c,n}(t))(a_{n-1} + n_{c,n-1}(t)) + n_{s,n}(t)n_{s,n-1}(t) \begin{cases} \leq 0, & \text{判发送“0”, 判决错误} \\ > 0, & \text{判发送“1”, 判决正确} \end{cases}$$

$$= (a'_n + n_{c,n}(t))(a_{n-1} + n_{c,n-1}(t)) + n_{s,n}(t)n_{s,n-1}(t) \begin{cases} \leq 0, & \text{判发送“0”, 判决错误} \\ > 0, & \text{判发送“1”, 判决正确} \end{cases}$$

2DPSK调制解调系统(续)



2DPSK信号差分相干解调的误码性能分析(续)

做同样的分析, 可得

$$P_{e1} = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{a'^2}{4\sigma_n'^2}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

总的错误概率 $P_E = P(s_0)P_{e0} + P(s_1)P_{e1} = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_n^2}\right)$

由 $E_{s0} = E_{s1} = E_b$

$$W \approx \frac{1}{T}$$

可得 $P_E = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_n^2}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{2N_0}\right)$

二进制移频键控(2FSK)



◆用二进制数字基带信号去控制正弦载波的

载频称为二进制移频键控(2FSK)。此时，

对应于传号与空号的载波频率分别为 f_1 及

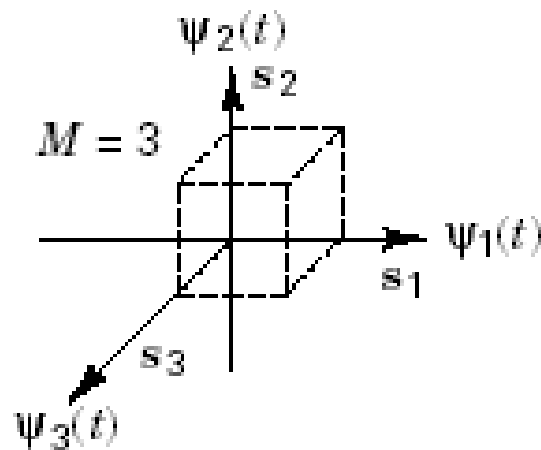
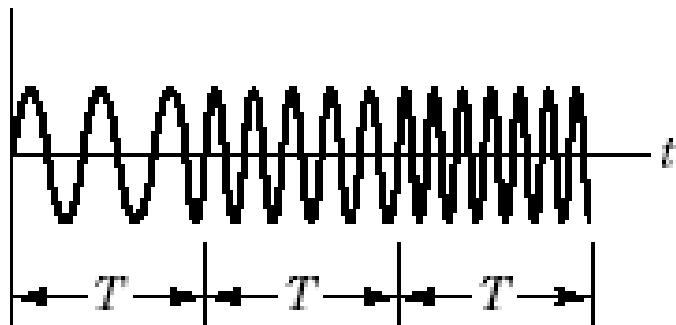
f_2 。

频移键控(FSK)

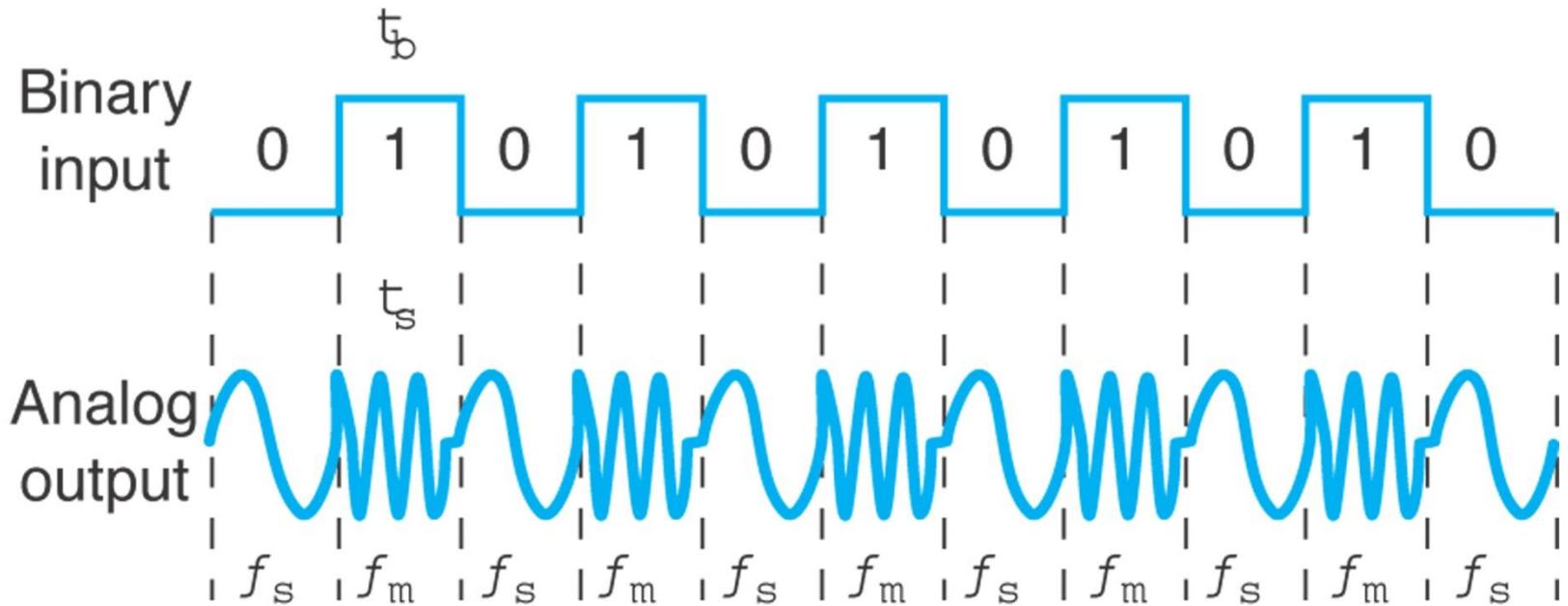


$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_i t + \phi) \quad \begin{matrix} 0 \leq t \leq T \\ i = 1, \dots, M \end{matrix}$$

例：M=3 的频移键控，可选择特定的频率组，使满足相互正交的条件。



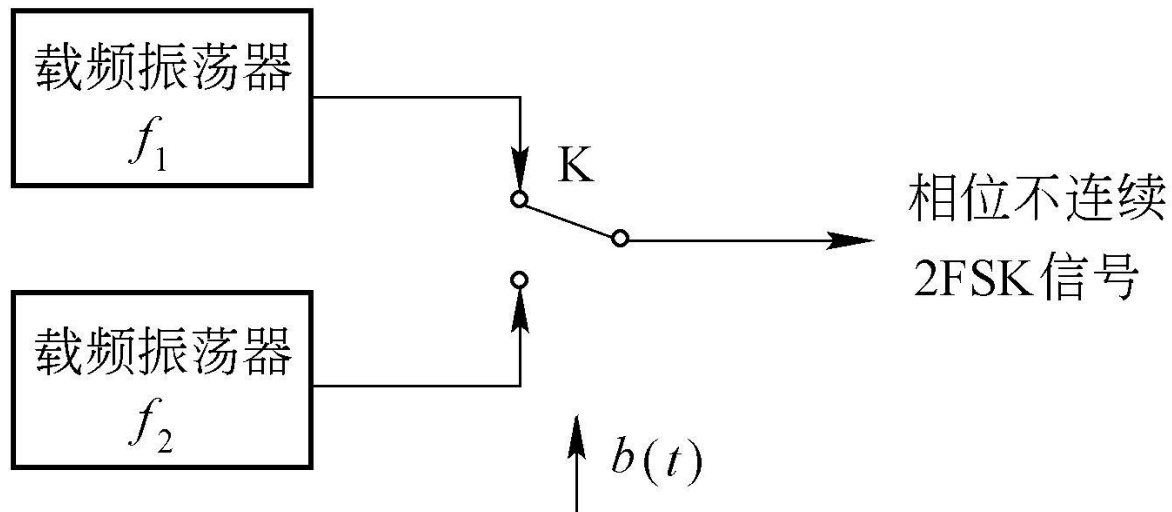
FSK时域波形



f_m , mark frequency; f_s space frequency

(a)

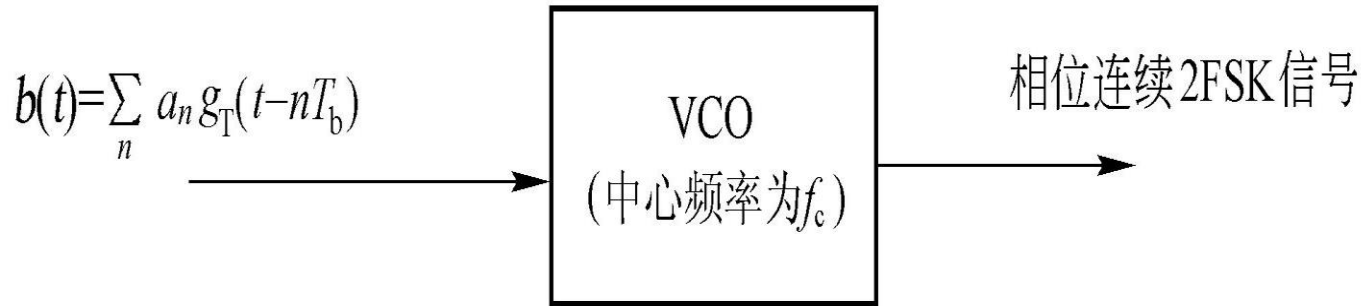
相位不连续的2FSK信号



$$s_{FSK}(t) = \begin{cases} s_1(t) = A \cos 2\pi f_1 t & \text{“传号”} \\ s_2(t) = A \cos 2\pi f_2 t & \text{“空号”} \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T_b$$

where f_1 and f_2 are offset from carrier frequency f_c by equal but opposite amounts

相位连续的2FSK信号



利用VCO做调频器产生连续相位2FSK信号

$$s_{FSK}(t) = A \cos[\omega_c t + 2\pi K_f \int_{-\infty}^t b(\tau) d\tau] = \text{Re}[v(t) e^{j\omega_c t}]$$



◆ 复包络

$$v(t) = Ae^{j\theta(t)}$$


$$\theta(t) = 2\pi K_f \int_{-\infty}^t b(\tau) d\tau$$

2FSK调制解调系统



2FSK信号的一般表达式

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n ag_T(t-nT) \cos \omega_{c1}t + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{a}_n ag_T(t-nT) \cos \omega_{c2}t$$

其中 $a_n \in \{0,1\}$

也可表示为

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t)$$

$$u_n(t) = \begin{cases} ag_T(t-nT) \cos \omega_{c1}t, & a_n = 1(\text{概率为}P) \\ ag_T(t-nT) \cos \omega_{c2}t, & a_n = 0(\text{概率为}1-P) \end{cases}$$

若波形函数为门函数，则简化为

$$u_n(t) = \begin{cases} a \cos \omega_{c1}t, & a_n = 1(\text{概率为}P) \\ a \cos \omega_{c2}t, & a_n = 0(\text{概率为}1-P) \end{cases}, (n-1)T \leq t < nT$$

2FSK调制解调系统(续)



2FSK信号两载波频率的选择原则：保证两调制符号具有正交性

$$\begin{aligned} & \int_0^T \cos(\omega_{c1}t + \phi) \cos \omega_{c2}t dt \\ &= \cos \phi \int_0^T \cos \omega_{c1}t \cos \omega_{c2}t dt - \sin \phi \int_0^T \sin \omega_{c1}t \cos \omega_{c2}t dt \\ &= \frac{1}{2} \cos \phi \left(\frac{\sin(\omega_{c1} + \omega_{c2})T}{\omega_{c1} + \omega_{c2}} + \frac{\sin(\omega_{c1} - \omega_{c2})T}{\omega_{c1} - \omega_{c2}} \right) \\ & \quad + \frac{1}{2} \sin \phi \left(\frac{\cos(\omega_{c1} + \omega_{c2})T - 1}{\omega_{c1} + \omega_{c2}} + \frac{\cos(\omega_{c1} - \omega_{c2})T - 1}{\omega_{c1} - \omega_{c2}} \right) = 0 \end{aligned}$$

因为 $\omega_{c1} + \omega_{c2} \gg 1$

一般地有 $\frac{\sin(\omega_{c1} + \omega_{c2})T}{\omega_{c1} + \omega_{c2}} \approx 0$, $\frac{\cos(\omega_{c1} + \omega_{c2})T - 1}{\omega_{c1} + \omega_{c2}} \approx 0$

2FSK调制解调系统(续)



2FSK信号两载波频率的选择条件简化为

$$\cos \phi \sin (\omega_{c_1} - \omega_{c_2}) T + \sin \phi (\cos (\omega_{c_1} - \omega_{c_2}) T - 1) = 0$$

相当于要求

$$\sin (\omega_{c_1} - \omega_{c_2}) T = 0$$

$$\cos (\omega_{c_1} - \omega_{c_2}) T - 1 = 0$$

由此可得

$$(\omega_{c_1} - \omega_{c_2}) T = 2\pi k \longrightarrow \omega_{c_1} - \omega_{c_2} = \frac{2\pi k}{T}, \quad k \text{ 为正整数}$$

满足正交性的最小间隔

$$\min \Delta \omega = \min |\omega_{c_1} - \omega_{c_2}| = \frac{2\pi}{T}$$

2FSK调制解调系统(续)



2FSK信号两载波频率的选择(续)

特别地，若已知 $\phi = 0$ ，即两载波间的初始相位为0。

正交性的条件变为

$$\sin(\omega_{c1} - \omega_{c2})T = 0 \longrightarrow \omega_{c1} - \omega_{c2} = \frac{\pi k}{T}, \quad k \text{ 为正整数}$$

相应的有

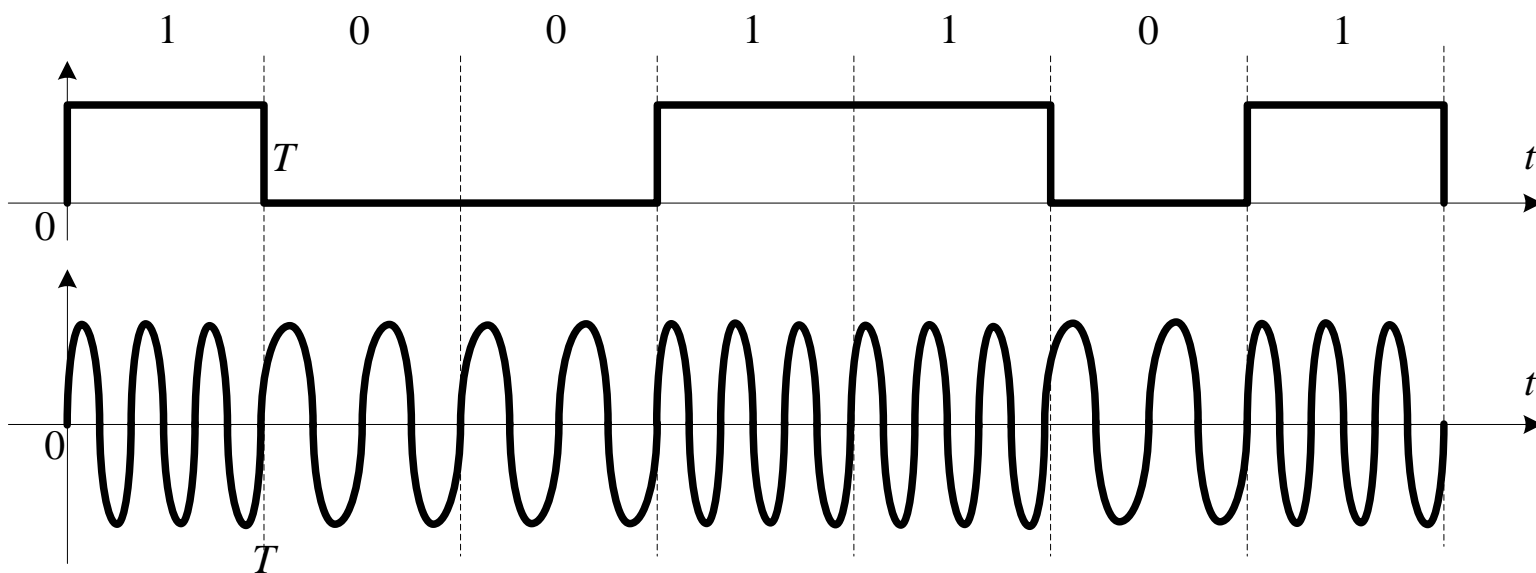
$$\min \Delta\omega = \min |\omega_{c1} - \omega_{c2}| = \frac{\pi}{T}$$

即满足正交性的两载波间的频率间隔降低为任意初相时的1/2。

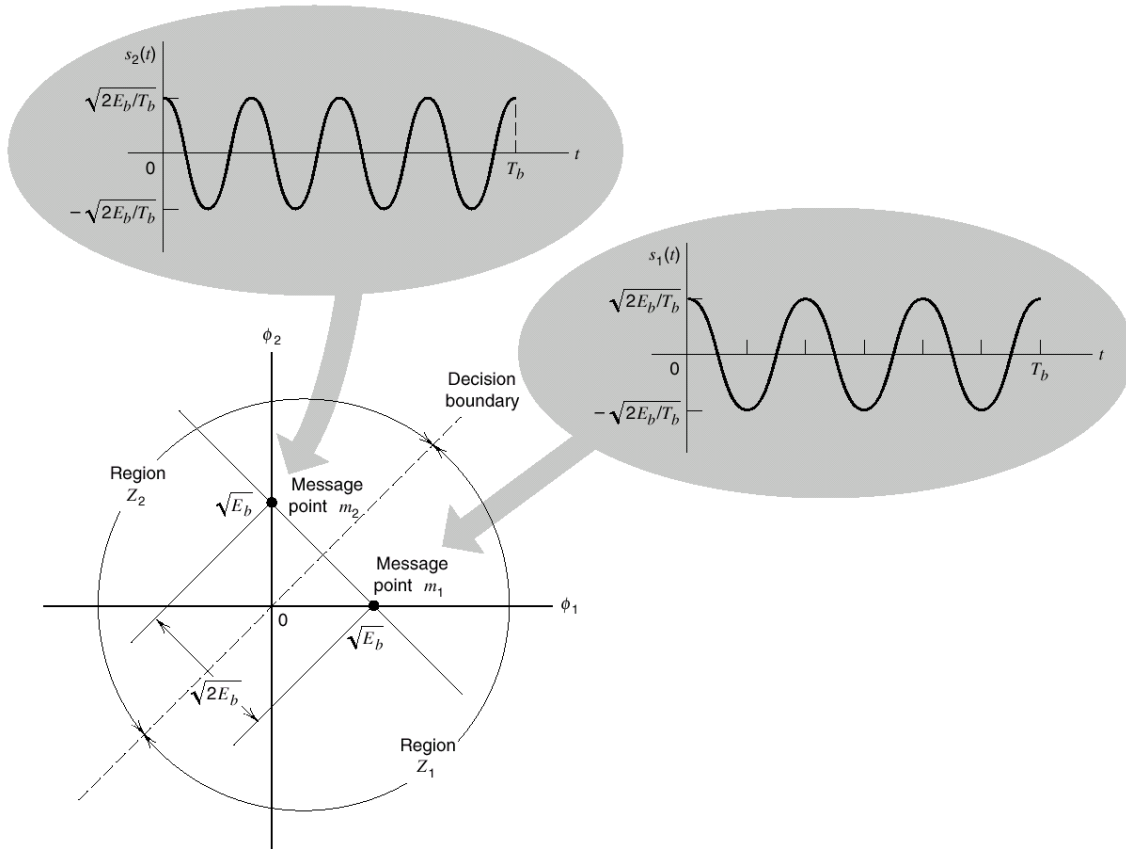
2FSK调制解调系统(续)



2FSK信号波形示例



BFSK系统信号空间图



2FSK调制解调系统(续)



2FSK信号的功率密度谱

2FSK信号可看作两OOK信号的叠加，因此有

$$P_s(f) = \frac{1}{4T} P_a(f) \left(|G_T(f + f_{c1})|^2 + |G_T(f - f_{c1})|^2 \right) \\ + \frac{1}{4T} P_{\bar{a}}(f) \left(|G_T(f + f_{c2})|^2 + |G_T(f - f_{c2})|^2 \right)$$

其中

$$P_a(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) e^{-j2\pi f m T}$$

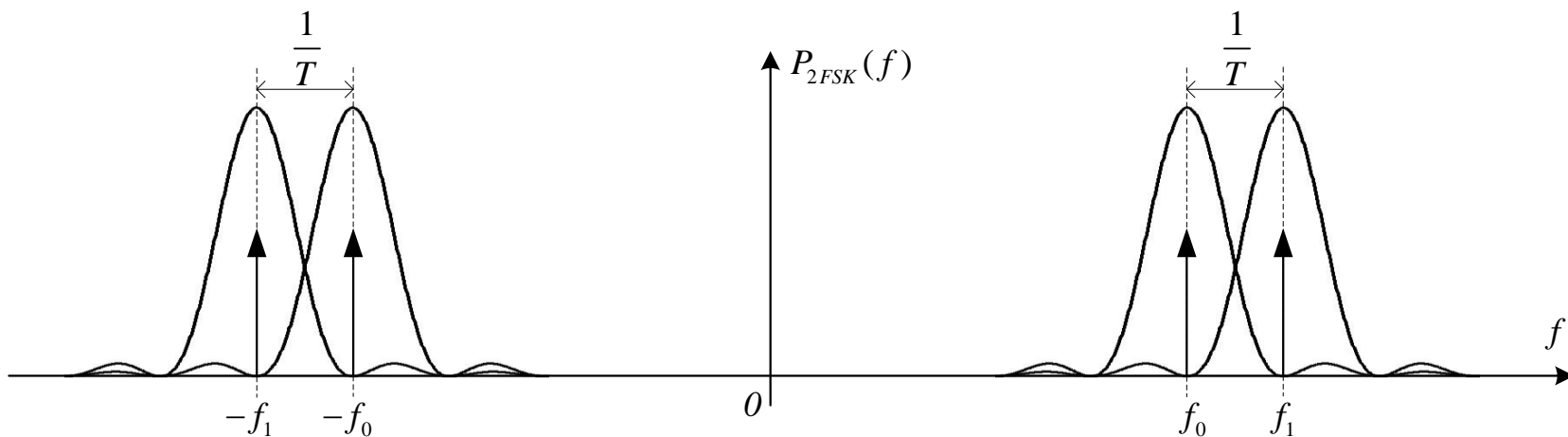
$$P_{\bar{a}}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{\bar{a}}(m) e^{-j2\pi f m T}$$

分别是序列 $\{a'_n : a'_n = a_n a\}$ 和 $\{\bar{a}'_n : \bar{a}'_n = \bar{a}_n a\}$ 的谱密度函数。

2FSK调制解调系统(续)



2FSK信号的功率密度谱示意图

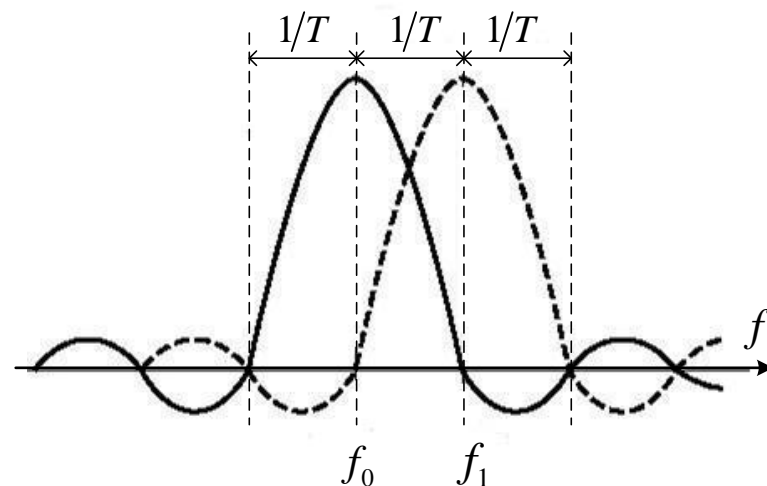


信号带宽

$$W = f_{c1} - f_{c2} + 2\frac{1}{T} = \frac{3}{T}$$

频谱效率

$$\eta_{2FSK} = \frac{R_s}{W_{2FSK}} = \frac{1/T}{3/T} = \frac{R_s}{3W_B} = \frac{1}{3}\eta_B$$



FSK信号的非相干检测



非相干正交FSK信号的带宽

若只考虑信号主瓣的频率宽度BW:

对2FSK信号: $BW = (2+1) / T$

对MFSK信号: $BW = (M+1) / T$

对一般的MFSK信号, f_1, f_2, \dots, f_M , 不妨设

$$f_1 = f_{\text{Min}}$$

$$f_M = f_{\text{Max}}$$

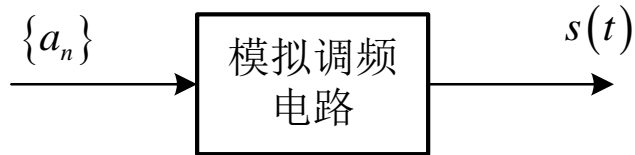
则信号的带宽近似为:

$$BW = 2/T + |f_M - f_1|$$

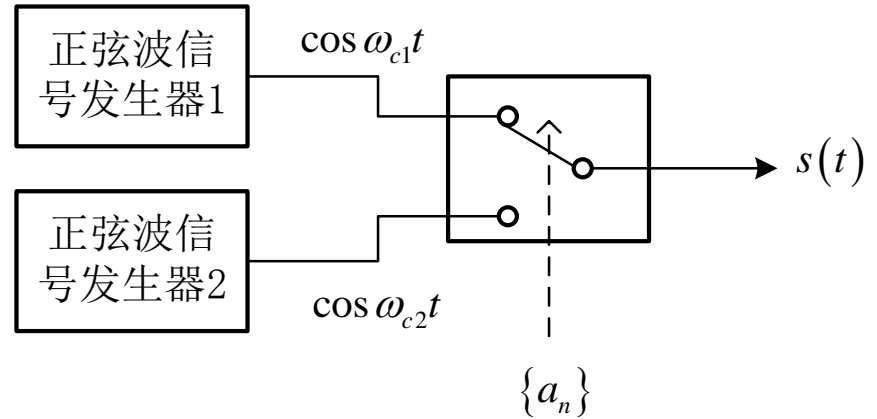
2FSK调制解调系统(续)



2FSK信号的产生



(a)



(b)

(a)模拟调频方法：频率间变化时可平滑过渡；

(b)切换调频方法：载波频率容易实现稳定工作。

BFSK的特点



- ◆ 比ASK抗错性好
- ◆ 同样用于语音级别的传输, 速率不超过 1200bps
- ◆ 用于高频 (3 to 30 MHz) 无线电传输
- ◆ 可用于采用同轴电缆的LAN中的高频传输

相干检测



FSK信号的相干检测

FSK信号的一般表达式:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_i t + \phi) \quad \begin{array}{l} 0 \leq t \leq T \\ i = 1, \dots, M \end{array}$$

当满足条件 $k\pi/T = \omega_{i+1} - \omega_i$, k 是非零整数时, 基函数集可表示为:

$$\psi_j(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_j t \quad j = 1, \dots, N$$

归一化的相干解调输出:

$$a_{ij} = \int_0^T \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_i t) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_j t dt$$

相干检测



FSK信号的相干检测

由：

$$a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{E} & \text{for } i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

可根据择大的原则进行判决。

在不同FSK信号正交的条件下，任意两个信号矢量直接的距离为常数（当 $i \neq j$ 时）：

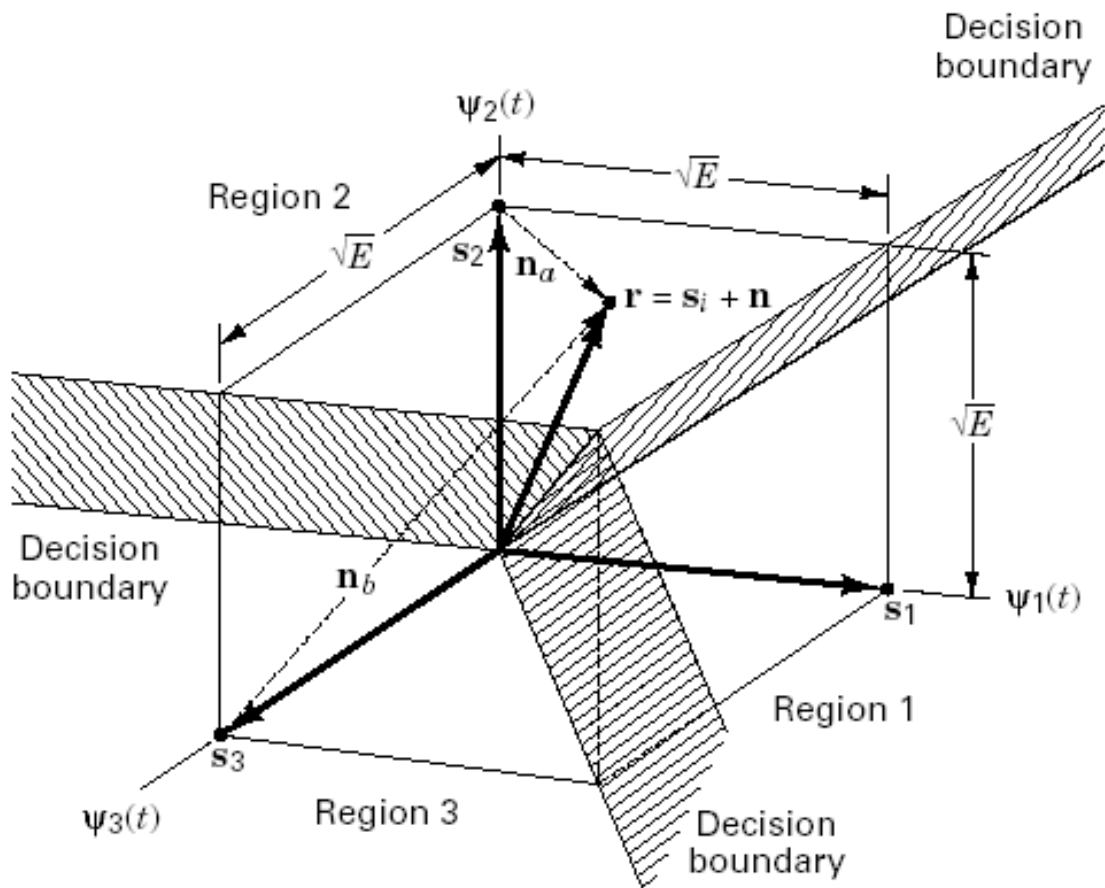
$$\begin{aligned} d(s_i, s_j) &= \|s_i - s_j\| \\ &= \left[\int_0^T \left(\sqrt{\frac{2E}{T}} \cos \omega_i t - \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos \omega_j t \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2E} \end{aligned}$$

相干检测



FSK信号的相干检测

三进制FSK信号空间及判决区域的形象表示：

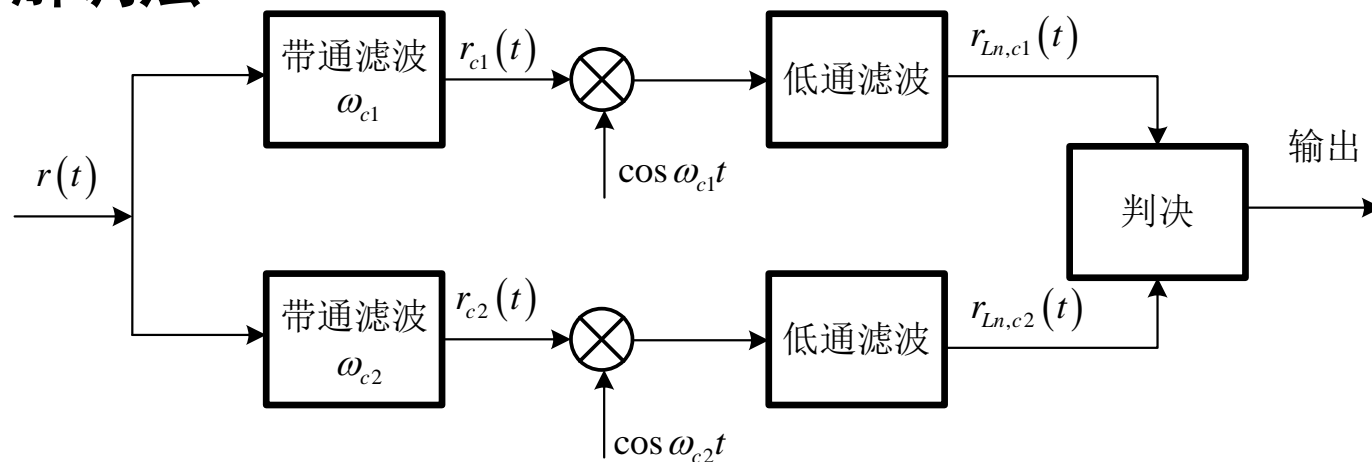


2FSK调制解调系统(续)



2FSK信号的解调

(1)相干解调法



若发送信号为 $u_n(t) = a \cos \omega_{c1}t, (n-1)T \leq t < nT$

如图则有

$$r_{n,c1}(t) = a \cos \omega_{c1}t + n_{c1}(t) \cos \omega_{c1}t - n_{s1}(t) \sin \omega_{c1}t, (n-1)T \leq t < nT$$

$$r_{n,c2}(t) = n_{c2}(t) \cos \omega_{c2}t - n_{s2}(t) \sin \omega_{c2}t, (n-1)T \leq t < nT$$

2FSK调制解调系统(续)



(1)相干解调法(续)

经低通滤波输出

$$r_{Ln,c1}(t) = a + n_{c1}(t), \quad (n-1)T \leq t < nT$$

$$r_{Ln,c2}(t) = n_{c2}(t), \quad (n-1)T \leq t < nT$$

若发送信号为

$$u_n(t) = a \cos \omega_{c2}t, \quad (n-1)T \leq t < nT$$

则经低通滤波输出

$$r_{Ln,c1}(t) = n_{c1}(t), \quad (n-1)T \leq t < nT$$

$$r_{Ln,c2}(t) = a + n_{c2}(t), \quad (n-1)T \leq t < nT$$

判决规则：“择大判决”

$$\begin{cases} r_{Ln,c1}(t) \geq r_{Ln,c2}(t) \rightarrow \text{判决发送"1"} \\ r_{Ln,c1}(t) < r_{Ln,c2}(t) \rightarrow \text{判决发送"0"} \end{cases}$$

2FSK调制解调系统(续)



(1)相干解调法(续)

发“1”时错误判决的概率

$$\Pr(r_{Ln,c1}(t) < r_{Ln,c2}(t)) = \Pr(a + n_{c1}(t) < n_{c2}(t)) = \Pr(a < n_{c2}(t) - n_{c1}(t))$$

发“0”时错误判决的概率

$$\Pr(r_{Ln,c2}(t) < r_{Ln,c1}(t)) = \Pr(a + n_{c2}(t) < n_{c1}(t)) = \Pr(a < n_{c1}(t) - n_{c2}(t))$$

若记 $n'_c(t) = n_{c2}(t) - n_{c1}(t)$

其均值为0，方差为 $2\sigma_n^2$

相应地，其分布特性

$$p_{n'_c(t)}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2\sigma_n}} \exp\left(-\frac{n^2}{2(2\sigma_n^2)}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{n^2}{4\sigma_n^2}\right)$$

2FSK调制解调系统(续)



(1)相干解调法(续)

错误判决概率统一表述为

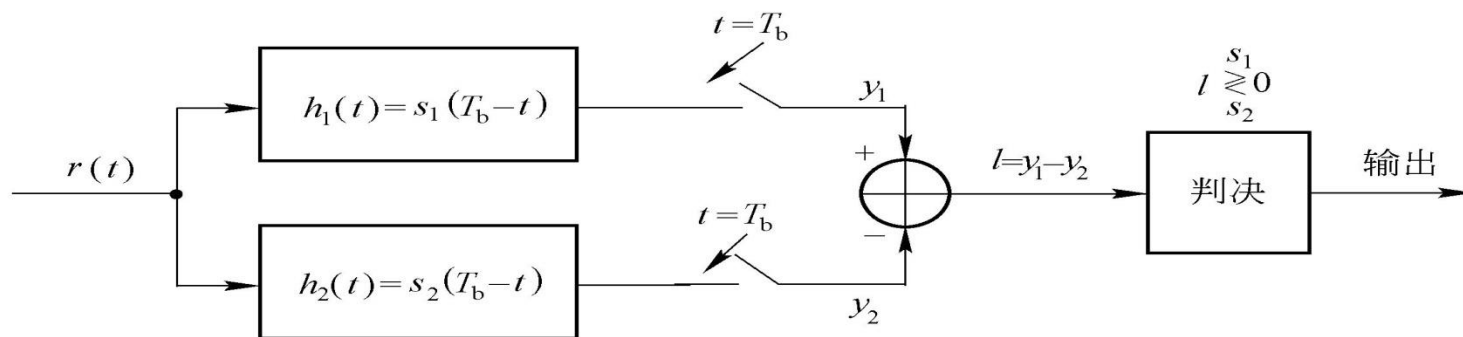
$$\begin{aligned} P_E &= \Pr(a < n'_c(t)) = \int_a^\infty p_{n'_c(t)}(n) dn \\ &= \int_a^\infty \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{n^2}{4\sigma_n^2}\right) dn = \int_{\frac{a}{\sqrt{2}\sigma_n}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = Q\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma_n}\right) \end{aligned}$$

由

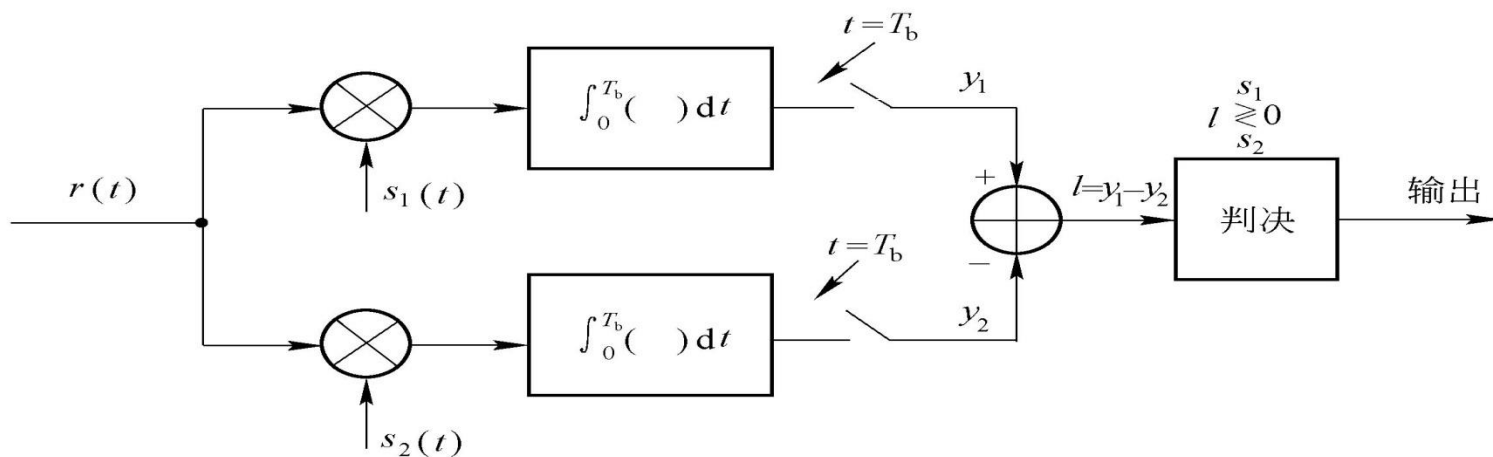
$$\sigma_n^2 = N_0 W_c \approx N_0 (2/T) \quad E_b = E_{s1} = E_{s2} = \frac{1}{2} a^2 T$$

可得以比特能量和噪声功率密度谱表示的错误概率

$$P_E = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right)$$



(a) 匹配滤波器



(b) 相关型解调器

在加性白噪声信道条件下**2FSK**的最佳接收

二进制系统的差错性能



正交2FSK相干检测的误比特率

对FSK信号，相干检测器：

$$a_{ij} = \int_0^T \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_i t) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_j t dt = \begin{cases} \sqrt{E} & \text{for } i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

等效于匹配滤波器（相关接收）。

对二进制的传输系统，当先验等概且码元能量相等时有

$$P_B = Q \left[\sqrt{\frac{E_b}{N_0} (1 - \rho)} \right]$$

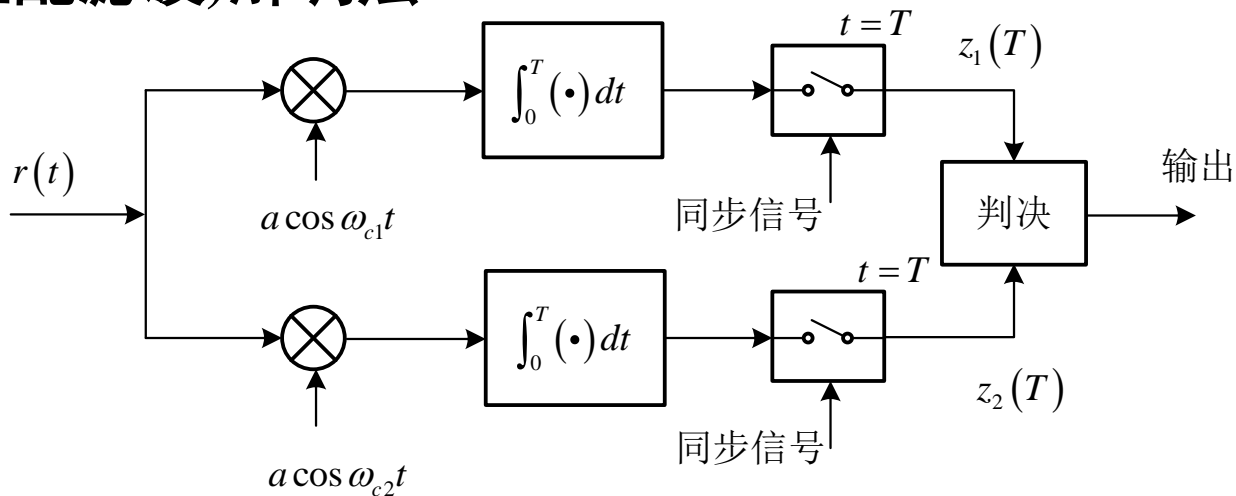
因此，对正交对2FSK信号， $\rho=0$ ，误比特率（误码率）为：

$$P_B = Q \left[\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right]$$

2FSK调制解调系统(续)



(2)相关(匹配滤波)解调法



第n个发送码元

$$u_n(t) = \begin{cases} a \cos \omega_{c1}t = s_1(t), & a_n = 1 (\text{概率为 } P) \\ a \cos \omega_{c2}t = s_2(t), & a_n = 0 (\text{概率为 } 1-P) \end{cases}, (n-1)T \leq t < nT$$

若发 $s_1(t)$, 两

$$z_1(T) = \int_0^T r(t) s_1(t) dt = \int_0^T (s_1(t) + n_{w1}(t)) s_1(t) dt$$

相关器输出

$$= \int_0^T s_1^2(t) dt + \int_0^T n_{w1}(t) s_1(t) dt = E_{s1} + N_1$$

$$z_2(T) = \int_0^T r(t) s_2(t) dt = \int_0^T n_{w2}(t) s_2(t) dt = N_1'$$

2FSK调制解调系统(续)



(2)相关(匹配滤波)解调法(续)

上式中

$$E[N_1] = E[N'_1] = 0 \quad \sigma_{N_1}^2 = \sigma_{N_2}^2 = N_0 E_{s1} / 2$$

错误判决概率 $\Pr(z_1(T) < z_2(T)) = \Pr(E_{s1} + N_1 < N'_1) = \Pr(E_{s1} < N'_1 - N_1)$

其中随机变量 $N = N'_1 - N_1$ 的均值为0, 方差为 $2\sigma_{N_1}^2$

其分布特性

$$p_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2\sigma_{N_1}^2}} \exp\left(-\frac{n^2}{2(2\sigma_{N_1}^2)}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma_{N_1}} \exp\left(-\frac{n^2}{4\sigma_{N_1}^2}\right)$$

同理可得发 $s_2(t)$ 时错判的概率

$$\Pr(z_2(T) < z_1(T)) = \Pr(E_{s2} + N_2 < N'_2) = \Pr(E_{s2} < N'_2 - N_2)$$

2FSK调制解调系统(续)



(2)相关(匹配滤波)解调法(续)

$$\text{由 } E_{s2} = E_{s1} = \frac{a^2 T}{2}$$

可知 $E_b = E_{s1} = E_{s2}$

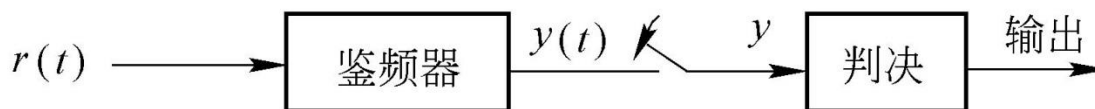
由此可得总的错误判决概率(误码率)

$$\begin{aligned} P_E &= \Pr(E_b < N) = \int_a^\infty p_N(n) dn \\ &= \int_{E_b}^\infty \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma_{N_1}} \exp\left(-\frac{n^2}{4\sigma_{N_1}^2}\right) dn = \int_{\frac{E_b}{\sqrt{2}\sigma_{N_1}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\ &= Q\left(\frac{E_b}{\sqrt{2}\sigma_{N_1}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \end{aligned}$$

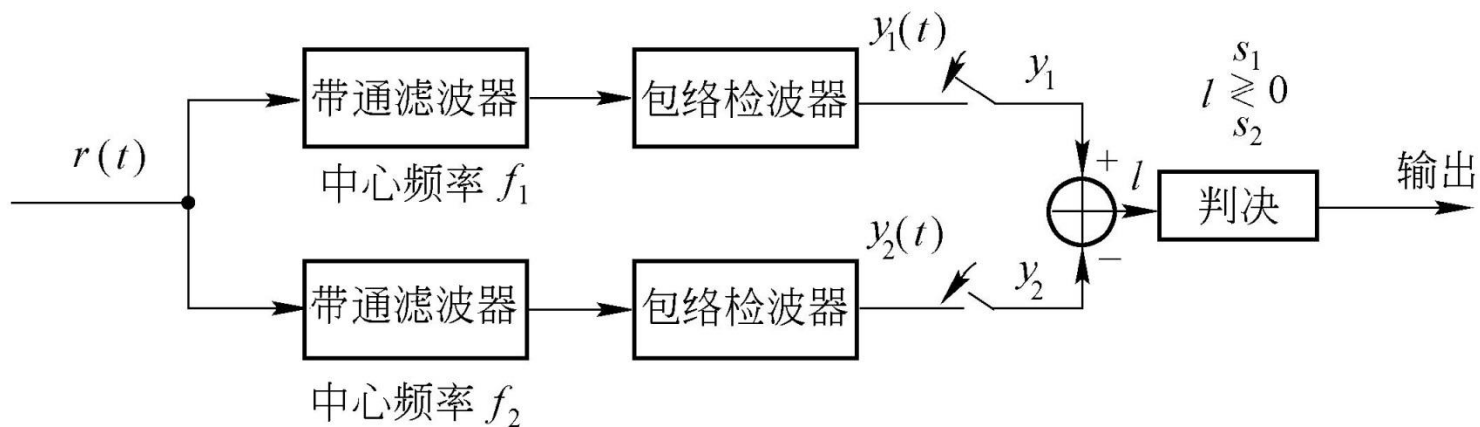
(2) 2FSK信号的非相干解调



- ◆ FSK信号的非相干解调方案有两个：
 - 一是由鉴频器对它进行解调，常用锁相环作鉴频器；
 - 另一是用包络检波方案。



(a) 鉴频器方案



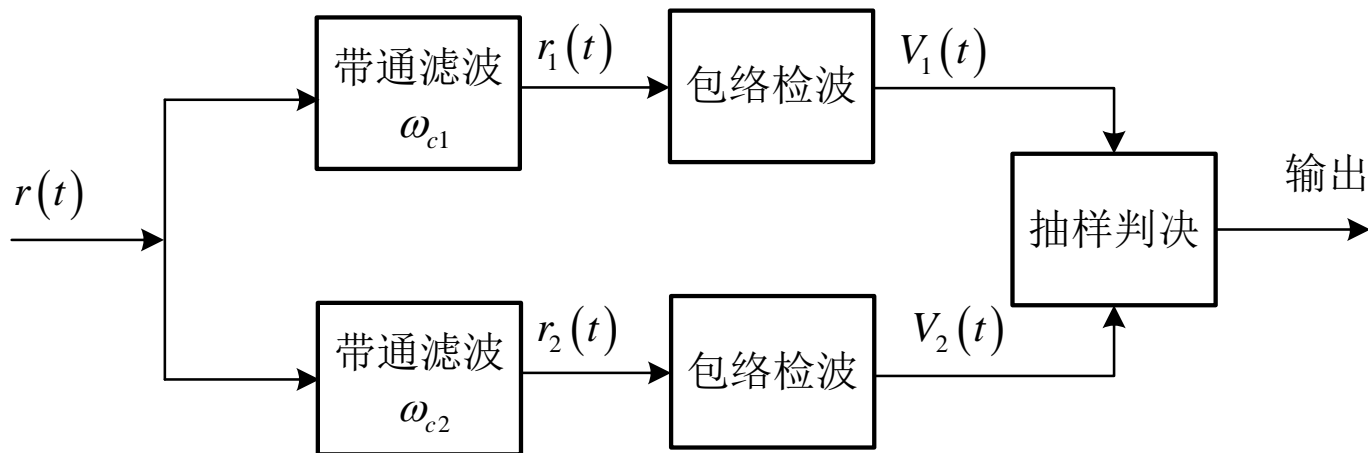
(b) 包络检波方案

2FSK信号的非相干解调

2FSK调制解调系统(续)



(3) 包络检波解调法



若发送信号为 $s_1(t)$

则接收的第 n 个码元信号 $r_n(t)$ 经包络检波后两路输出

$$V_1(t) = \sqrt{(a + n_{c1}(t))^2 + n_{s1}^2(t)}$$

$$V_2(t) = \sqrt{n_{c2}^2(t) + n_{s2}^2(t)}$$

2FSK调制解调系统(续)



(3)包络检波解调法(续)

其中

$$p(V_1) = \frac{V_1}{\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{V_1^2 + a^2}{2\sigma_n^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{aV_1}{\sigma_n^2}\right)$$
$$p(V_2) = \frac{V_2}{\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{V_2^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

错误判决概率

$$P_{e1} = \Pr(V_1 < V_2) = \int_0^\infty p(V_1) \int_{V_2=V_1}^\infty p(V_2) dV_2 dV_1 = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{a^2}{4\sigma_n^2}\right)$$

同理可得发 $s_2(t)$ 错误判决概率

$$P_{e2} = \Pr(V_2 < V_1) = \int_0^\infty p(V_2) \int_{V_1=V_2}^\infty p(V_1) dV_1 dV_2 = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{a^2}{4\sigma_n^2}\right)$$

2FSK调制解调系统(续)



(3)包络检波解调法(续)

总的错误概率(误码率)

$$P_E = P(s_1)P_{e1} + P(s_2)P_{e2} = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{a^2}{4\sigma_n^2}\right)$$

以

$$W = \frac{2}{T} \quad \sigma_n^2 = WN_0 = \frac{2N_0}{T} \quad E_b = E_{s2} = E_{s1} = \frac{a^2T}{2}$$

代入得以比特能量与噪声功率密度谱表示的误码率

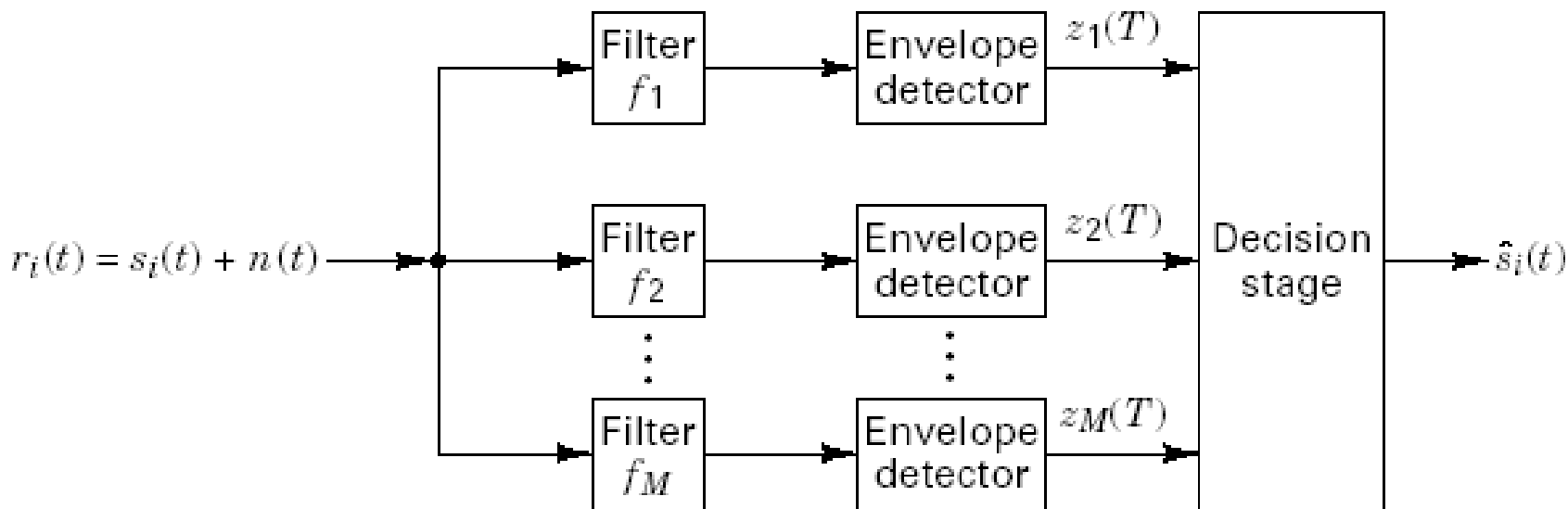
$$P_E = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{a^2}{4\sigma_n^2}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{4N_0}\right)$$

FSK信号的非相干检测



包络检测接收方式：利用利用包络检测器判断信号的有无。

Bandpass filters centered
at f_i with bandwidth $W_f = 1/T$



信号的检测可采样简单的择大判决法。

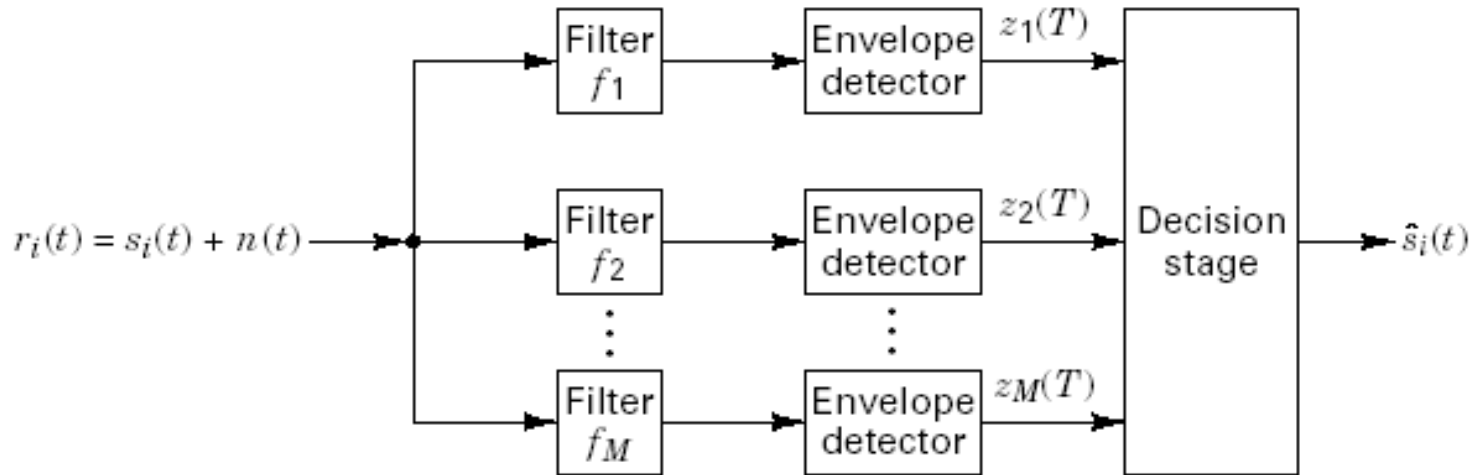
理论上，FSK信号的非相干检测也可以在频域中进行，先对信号作傅里叶变换，然后判断频率所在的位置。

二进制系统的差错性能



正交2FSK非相干检测的误比特率

对一般MFSK信号，基于包络检测的非相干检测器：



在输出端，采用择大的方式来进行判决。

对2FSK信号，出现误码的概率为：

$$P_B = P(s_1)P(z_2 > z_1 | s_1) + P(s_2)P(z_1 > z_2 | s_2) \quad (*)$$

正交2FSK非相干检测的误比特率



首先分析收到 $r(t)=s_2(t)+n(t)$ 的情况，信号经Filter1后， $s_2(t)$ 信号被滤除，剩下窄带高斯噪声经包络检测器。

窄带高斯噪声经包络检测器后服从瑞利(Rayleigh)分布：

$$p(z_1|s_2) = \begin{cases} \frac{z_1}{\sigma_0^2} \exp\left(-\frac{z_1^2}{2\sigma_0^2}\right) & z_1 \geq 0 \\ 0 & z_1 < 0 \end{cases}$$

信号经Filter2后，为正弦信号加窄带高斯噪声，经包络检测器后服从莱斯(Rician)分布：

$$p(z_2|s_2) = \begin{cases} \frac{z_2}{\sigma_0^2} \exp\left[-\frac{(z_2^2 + A^2)}{2\sigma_0^2}\right] I_0\left(\frac{z_2 A}{\sigma_0^2}\right) & z_2 \geq 0 \\ 0 & z_2 < 0 \end{cases}$$

正交2FSK非相干检测的误比特率



上式中,

$A = \sqrt{2E/T}$ 为收到的信号幅度

σ_0^2 为滤波器输出噪声

$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(x \cos \theta) d\theta$ 为第一类零阶修正的贝塞尔函数。

通常有 $P(z_2 > z_1 | s_1) = P(z_1 > z_2 | s_2)$ ，因而在先验等概的条件下，

得

$$\begin{aligned}
 P_B &= P(z_1 > z_2 | s_2) \\
 &= \int_0^{\infty} p(z_2 | s_2) \left[\int_{z_2}^{\infty} p(z_1 | s_2) dz_1 \right] dz_2 \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{z_2}{\sigma_0^2} \exp \left[-\frac{(z_2^2 + A^2)}{2\sigma_0^2} \right] I_0 \left(\frac{z_2 A}{\sigma_0^2} \right) \left[\int_{z_2}^{\infty} \frac{z_1}{\sigma_0^2} \exp \left(-\frac{z_1^2}{2\sigma_0^2} \right) dz_1 \right] dz_2
 \end{aligned}$$

正交2FSK非相干检测的误比特率



可以证明，上述积分结果：

$$P_B = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{A^2}{4\sigma_0^2}\right)$$

若滤波器带宽为 W_f ，噪声功率密度谱为 $G_n(f)=N_0/2$ ，则噪声功率

$$\sigma_0^2 = 2 \left(\frac{N_0}{2}\right) W_f$$

若取 $W_f = R \text{ bits/s} = 1/T$ ，则误比特率（在二进制的情况下等于误码率）为：

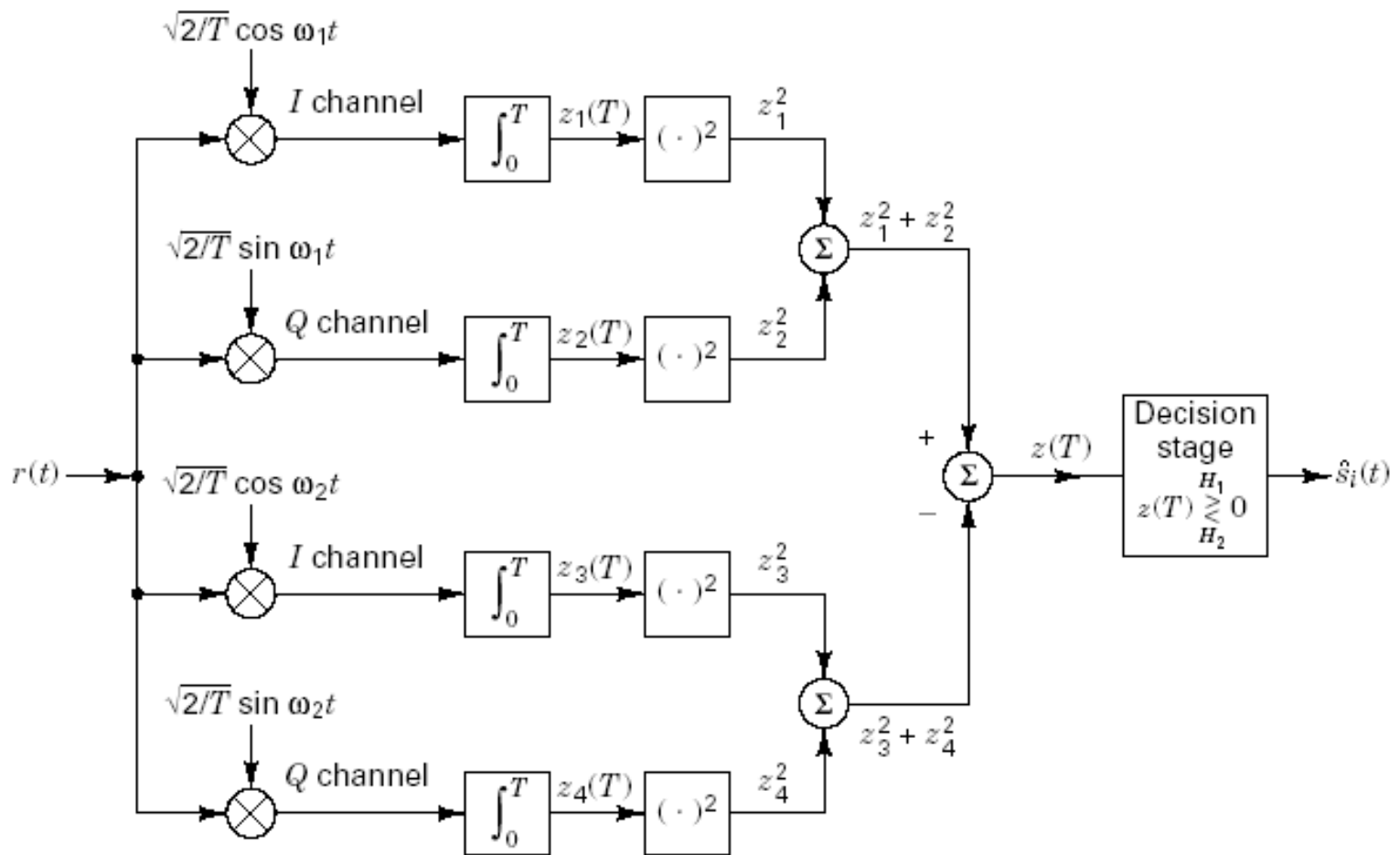
$$P_B = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{A^2 T}{4N_0}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{2N_0}\right)$$

非相干检测



FSK信号的非相干检测

正交接收方式：利用两对非相干的正交信号进行解调。



FSK信号的非相干检测



正交接收方式 假定 $|\omega_2 - \omega_1|$ 是 $2\pi/T$ 的整数倍，则由前面的分析或傅氏级数可知 $\cos \omega_1 t, \sin \omega_1 t, \cos \omega_2 t, \sin \omega_2 t$ 是正交函数集，因而有：

$$\int_0^T \cos \omega_i t \cos \omega_j t dt = \begin{cases} T/2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin \omega_i t \cos \omega_j t dt = 0$$

$$\int_0^T \sin \omega_i t \sin \omega_j t dt = \begin{cases} T/2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

FSK信号的非相干检测

正交接收方式

接收信号一般地可以表示为：

$$r(t) = A \cos(\omega_i t + \phi) + n(t)$$

$$= A \cos \phi \cos \omega_i t - A \sin \phi \sin \omega_i t + n(t)$$

在非相干检测的条件下，一般 ϕ 是一个缓慢变化的量，因此

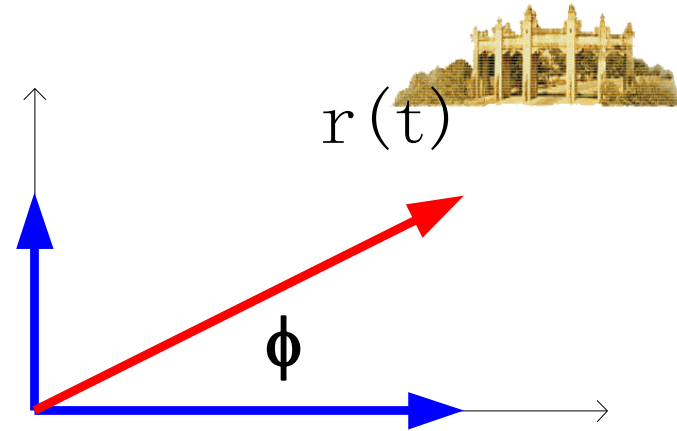
当发 ω_1 时，有

$$z_1^2 + z_2^2 > 0, z_3^2 + z_4^2 \approx 0$$

当发 ω_2 时，有

$$z_3^2 + z_4^2 > 0, z_1^2 + z_2^2 \approx 0$$

由此可作出判决。该方法同样适合于MFSK的信号检测。



三种基本调制及其谱的Matlab代码



```
A=1;
fc = 2; %2Hz;
N_sample = 8;
N = 500; %码元数
Ts = 1; %1 baud/s
dt = Ts/fc/N_sample; %波形采样间隔
t = 0:dt:N*Ts-dt;
Lt = length(t);
%产生二进制信源
d = sign(randn(1,N));
dd = sigexpand((d+1)/2,fc*N_sample);
gt = ones(1,fc*N_sample); %NRZ波形
d_NRZ = conv(dd,gt);
[f,d_NRZf]=T2F( t,d_NRZ(1:length(t)) );
%2ASK信号
ht = A*cos(2*pi*fc*t);
s_2ask = d_NRZ(1:Lt).*ht;
[f,s_2askf]=T2F(t,s_2ask );
%2PSK信号
d_2psk = 2*d_NRZ-1;
s_2psk = d_2psk(1:Lt).*ht;
% 2FSK
% s_2fsk = A*cos(2*pi*fc*t + int(2*d_NRZ-1) );
sd_2fsk = 2*d_NRZ-1;
s_2fsk = A*cos(2*pi*fc*t + 2*pi*sd_2fsk(1:length(t)).* t );
[f,s_2fskf] = T2F(t,s_2fsk);
```

FPGA实现



◆参看段吉海等“基于CPLD/FPGA的数字通信系统建模与设计” 电子工业出版社
P198

◆FSK PSK

◆CPSK DPSK

◆MASK MFSK MPSK

◆亦有

二进制调制解调系统的误码性能比较



误比特率 P_E 性能比较

性能的优劣自左至右依次为：

PSK相干检测

DPSK相干检测

DPSK差分相干检测

正交FSK最佳检测

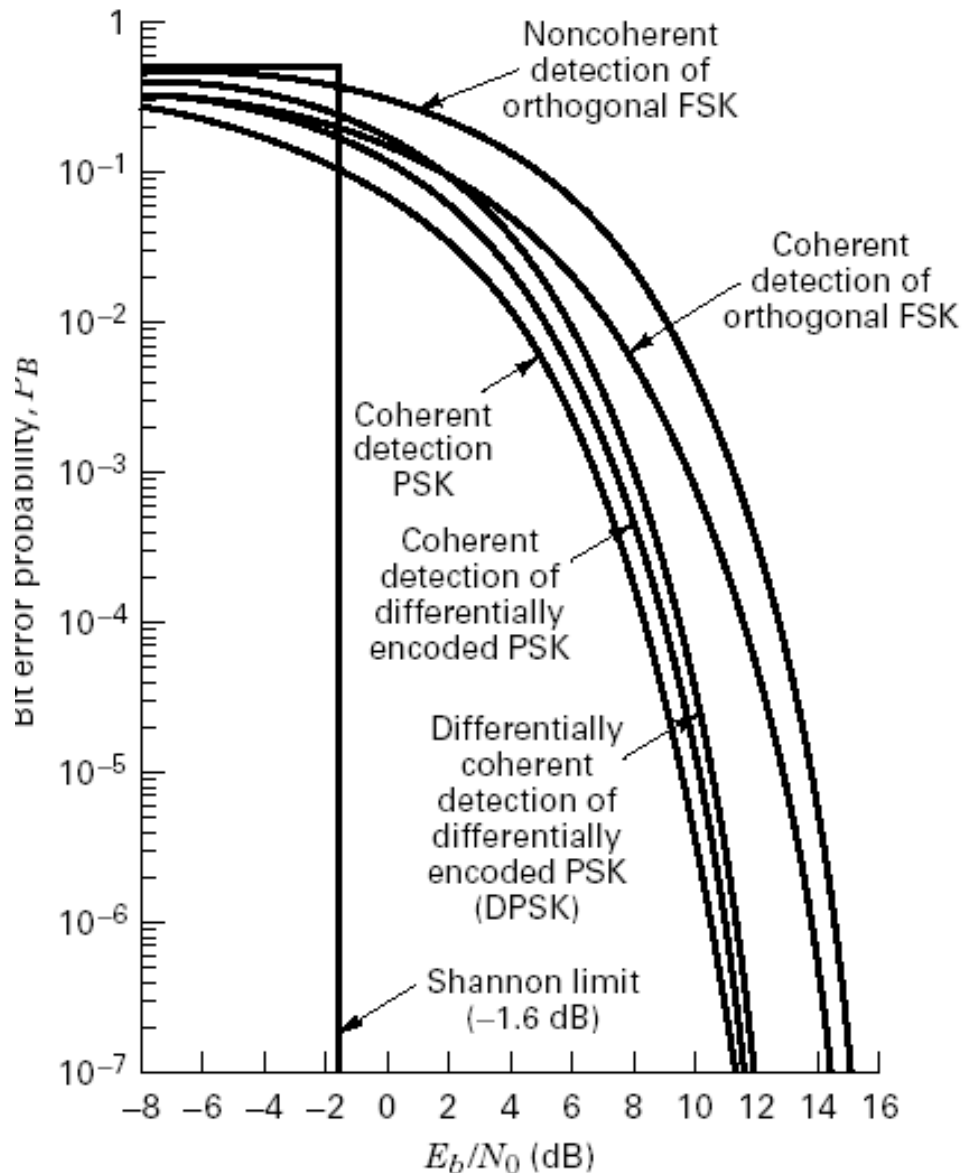
ASK(OOK)最佳检测

正交FSK非相干检测

ASK(OOK)信号非相干解调

香农限 (Shannon Limit) 的涵义： E_b/N_0 不能小于 -1.6dB ，
若小于该值，找不到相应的可实现无差错传输的物理系统。

二进制调制性能优劣比较





6.4 多进制数字载波调制传输系统

M进制数字调制



- ◆ 在实际的频带传输系统中，由于信道的频率资源有限，因而要求有效地利用信道频带，希望尽量提高信道频带的利用率：在有限的信道频带内，传输高速数据。为此，必须采用 M 进制数字调制方式，将高速的二进制码经过 M 进制($M > 2$)数字调制后，使已调信号频带达到给定的限带要求。

多(M)进制调制系统的有关参数



M —进制数； k —每个码元携带的比特数； R_b —比特速率；
 R_S —码元速率； T_S —码元周期； T_b —比特周期； W —主瓣带宽
 参数间具有如下关系

$$R_S = \frac{R_b}{\log_2 M}, \quad M = 2^k, k = \log_2 M$$

对于MASK、MPSK和MQAM，因为码元速率
频带利用率
对基带信号

$$R_S \approx \frac{W}{1 + \alpha}$$

$$\eta_B = \frac{R_b}{W_B} = \frac{R_S \log_2 M}{W_B} = \frac{2}{1 + \alpha} \log_2 M \text{ (bits / s / Hz)}$$

对调制信号

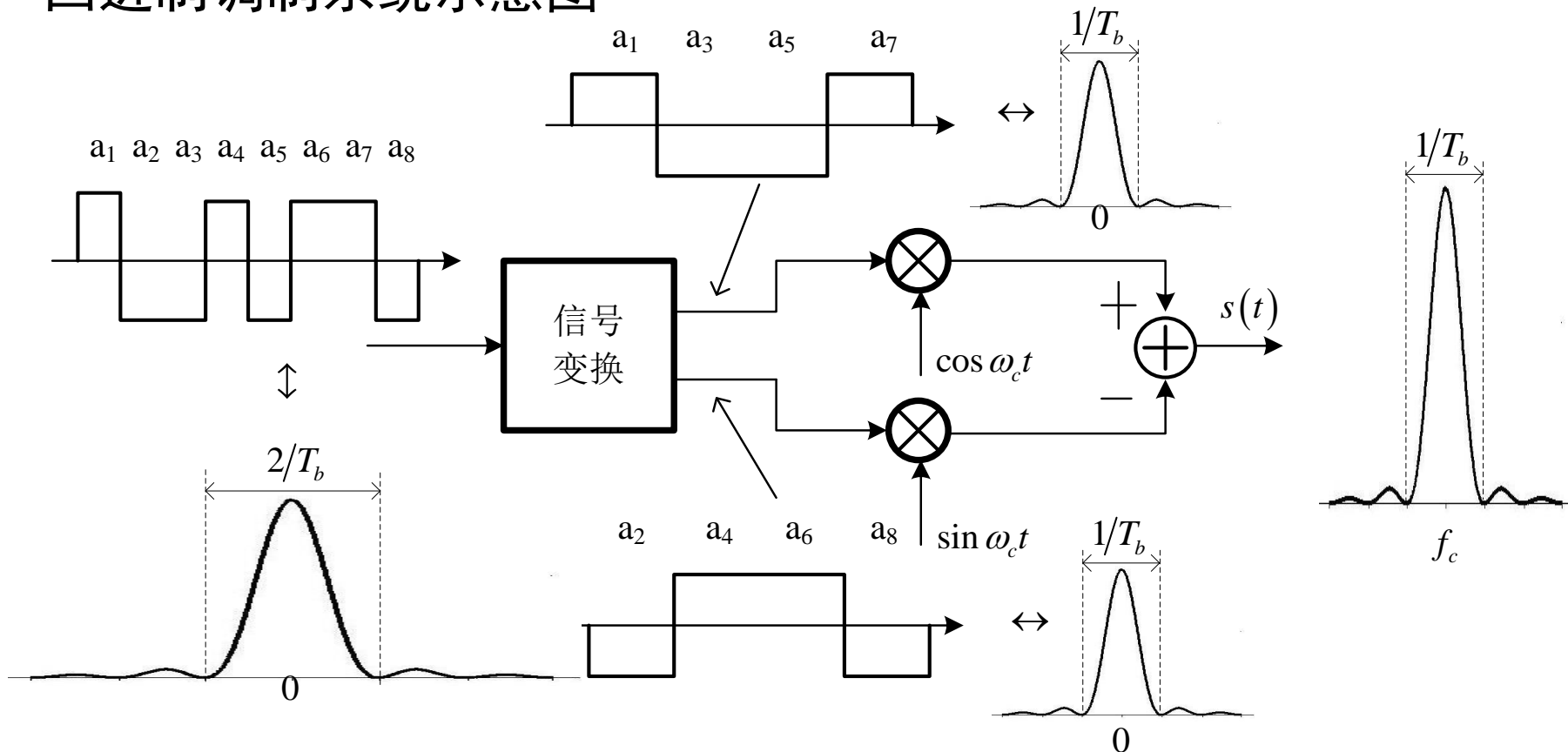
$$\eta_C = \frac{R_b}{W_C} = \frac{R_S \log_2 M}{W_C} = \frac{1}{1 + \alpha} \log_2 M = \frac{1}{2} \eta_B$$

数字载波调制系统的频带利用率降低为基带系统的1/2。

多进制数字调制示例



四进制调制系统示意图

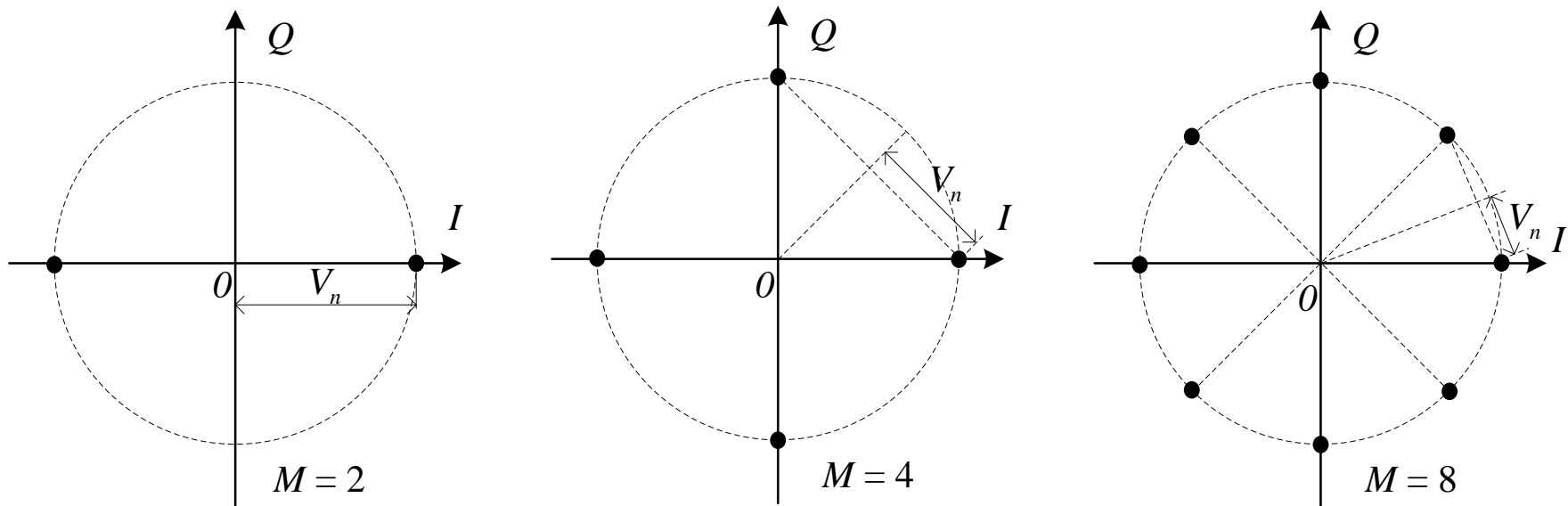


注意在信号处理过程中码元周期大小与信号频谱宽度的变化
码元周期加倍，频谱宽度减半。

多进制调制系统的噪声容限问题



M进制相位调制系统的星座图



当 R_b 不变时， M 增大， R_S 降低， $1/T_S$ 减少，所需带宽减少；
 若信号幅度不变，噪声容限下降，误码上升；

M 增大时，要保持相同的噪声容限，要提高信号功率。

N维信号空间



N维信号空间的标准正交基： $\{\Psi_k(t), k = 1, 2, \dots, N\}$

$$\langle \Psi_i(t), \Psi_j(t) \rangle = \int_0^{T_s} \Psi_i(t) \Psi_j(t) dt = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

N维信号空间中的M进制系统的符号函数集

$$\{s_m(t) : m = 1, 2, \dots, M; t \in [0, T]\}$$

符号函数与基函数之间的关系

$$s_m(t) = s_{m1} \Psi_1(t) + s_{m2} \Psi_2(t) + \dots + s_{mN} \Psi_N(t) = \sum_{i=1}^N s_{mi} \Psi_i(t)$$

其中系数

$$s_{mi} = \int_0^{T_s} s_m(t) \Psi_i(t) dt \quad i = 1, 2, \dots, N$$

N维信号空间(续)



当基函数确定之后，符号函数 $s_m(t)$ 完全由其系数矢量决定

$$\vec{S}_m = [s_{m1}, s_{m2}, \dots, s_{mN}]^T \quad m = 1, 2, \dots, M$$

信号能量与系数矢量间的关系

$$E_m = \int_0^{T_s} s_m^2(t) dt = \int_0^{T_s} \left[\sum_{i=1}^N s_{mi} \Psi_i(t) \right]^2 dt = \sum_{i=1}^N s_{mi}^2$$
$$m = 1, 2, \dots, M$$

两符号函数间相关系数

$$\rho_{mk} = \frac{1}{\sqrt{E_m} \sqrt{E_k}} \int_0^{T_s} s_m(t) s_k(t) dt = \frac{1}{\sqrt{E_m E_k}} \int_0^{T_s} \left(\sum_{i=1}^N s_{mi} \Psi_i(t) \right) \left(\sum_{j=1}^N s_{kj} \Psi_j(t) \right) dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{E_m E_k}} \sum_{i=1}^N s_{mi} s_{ki} = \frac{\vec{S}_m \cdot \vec{S}_k}{\sqrt{E_m E_k}}$$

N维信号空间(续)



符号函数集中任两信号 $s_m(t)$ 和 $s_k(t)$ 间的欧氏距离

$$\begin{aligned}
 d_{mk} &= \left\{ \int_0^{T_s} (s_m(t) - s_k(t))^2 dt \right\}^{1/2} = \left\{ \int_0^{T_s} (s_m^2(t) - 2s_m(t)s_k(t) + s_k^2(t)) dt \right\}^{1/2} \\
 &= \left\{ \int_0^{T_s} s_m^2(t) dt + \int_0^{T_s} s_k^2(t) dt - 2 \int_0^{T_s} s_m(t)s_k(t) dt \right\}^{1/2} \\
 &= \left(E_m + E_k - 2\sqrt{E_m E_k} \rho_{mk} \right)^{1/2} = \left(E_m + E_k - 2\vec{S}_m \cdot \vec{S}_k \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

(1) 若两信号间正交： $\int_0^{T_s} s_m(t)s_k(t) dt = 0 \leftrightarrow \vec{S}_m \cdot \vec{S}_k = 0$
 则

$$d_{mk} = (E_m + E_k)^{1/2} \quad (\text{如 } E_m = E_k \text{ 则, } d_{mk} = \sqrt{2E_m})$$

(2) 若两信号间对极： $s_m(t) = -s_k(t)$

$$d_{mk} = \left\{ \int_0^{T_s} (s_m(t) - (-s_m(t)))^2 dt \right\}^{1/2} = \left\{ \int_0^{T_s} 4s_m^2(t) dt \right\}^{1/2} = 2\sqrt{E_m}$$

N维信号空间(续)



任两信号间的欧氏距离与系数矢量间的关系

$$\begin{aligned}d_{mk} &= \left(E_m + E_k - 2\vec{S}_m \cdot \vec{S}_k \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^N s_{mi}^2 + \sum_{i=1}^N s_{ki}^2 - 2\sum_{i=1}^N s_{mi}s_{ki} \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^N \left(s_{mi}^2 - 2s_{mi}s_{ki} + s_{ki}^2 \right) \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^N \left(s_{mi} - s_{ki} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &= \left| \vec{S}_m - \vec{S}_k \right|\end{aligned}$$

其中

$$\vec{S}_m = [s_{m1}, s_{m2}, \dots, s_{mN}]^T$$

$$\vec{S}_k = [s_{k1}, s_{k2}, \dots, s_{kN}]^T$$

统计判决理论的基本概念



通信系统接收的信号都是随机信号，噪声的干扰和信道对信号的劣化均是随机的，随机信号的接收与判决均基于统计判决的原理；

前面介绍的二进制的符号接收与判决方法本质上都是根据统计判决原理得到的方法；

在讨论多进制系统的调制解调技术时，将在前面讨论二进制系统符号接收的基础上，在更一般的意义上分析信号的最佳接收问题。

统计判决的基本方法



- (1) 假定M个可能发送的信号和其先验概率 $p(s_i)$ 已知；
- (2) 假定可以确定信道的转移概率或者后验概率：

$$\text{转移概率: } p(r | s_i) \quad \text{后验概率: } p(s_i | r)$$

(似然函数)

- (3) 收到接收信号 r 后，根据先验概率、信道转移概率或后验概率得到统计判决的准则；
- (4) 根据判决准则确定判决门限/判决域；
- (5) 计算差错概率。

最大似然判决法/准则(ML)



设发送信号的空间为

$$\{S\} = \{s_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T_S\}$$

接收信号为：

$$r(t) = s_i(t) + n_W(t), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T_S$$

$n_W(t)$ 为高斯白噪声。可以证明，若选择满足：

$$\hat{s} = \arg \max_{s_i \in \{S\}} P(s_i) p(r | s_i)$$

的 s_i 作为对发送码元信号的判决，可使差错概率最小。

最大似然判决法/准则(ML)(续)



或者说, 若收到 r , 且已知 $p(r|s_i), i=1,2,\dots,M$
则可实现差错概率最小意义上的最佳接收。

特别地, 若发送的各码元信号先验等概:

$$P(s_i) = \frac{1}{M}, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

则ML准则可以简化为

$$\hat{s} = \arg \max_{s_i \in \{S\}} p(r | s_i)$$

最大后验概率准则(MAP)



因为 $P(s_i)p(r | s_i) = p(r)p(s_i | r), \quad i = 1, 2, \dots, M$

$$p(s_i | r) = \frac{P(s_i)p(r | s_i)}{p(r)}$$

因此，在先验等概的条件下，ML准则等价于

$$\arg \max_{s_i \in \{S\}} p(r | s_i) \leftrightarrow \arg \max_{s_i \in \{S\}} p(s_i | r)$$

由此可得最大后验准则

$$\hat{s} = \arg \max_{s_i \in \{S\}} p(s_i | r)$$

即在符号集 $\{s_k\}$ 中选择满足上式的 s_i 的符号作为判决输出。

M进制信号的最佳接收方法



已知发送信号是符号集中的某个信号

$$s_j(t) = \sum_{i=1}^N s_{ji} \Psi_i(t), \quad j = 1, 2, \dots, M$$

其中 $\{\Psi_k(t), k = 1, 2, \dots, N\}$ 是一组标准的正交基。

接收信号为

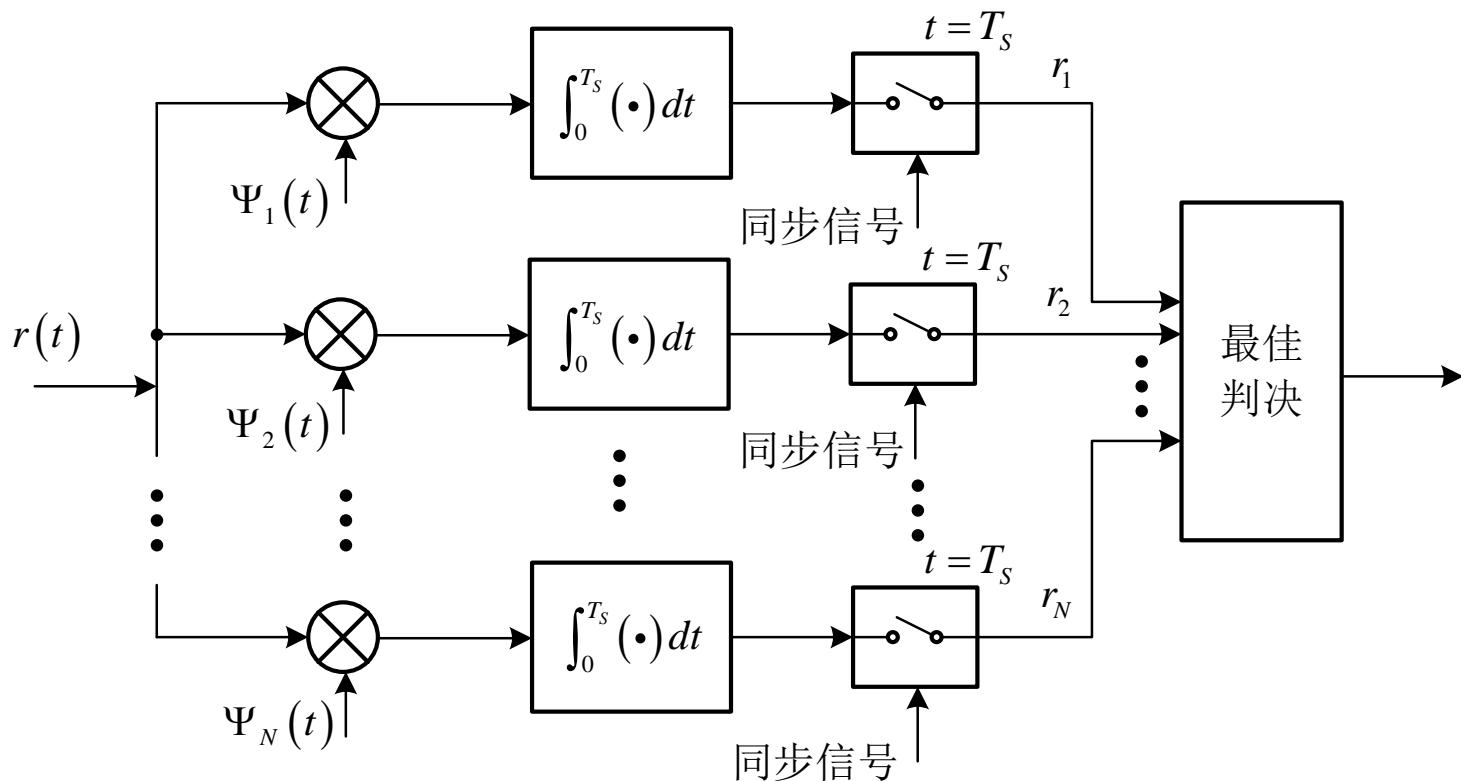
$$r(t) = s_j(t) + n_w(t) = \sum_{i=1}^N s_{ji} \Psi_i(t) + n_w(t)$$

M进制信号的最佳接收方法 (续)



最佳接收机可由下图构建

(注意系统工作时本地的 $\Psi_i(t)$ 要与输入信号 $r(t)$ 同步)



M进制信号的最佳接收方法 (续)



在最佳接收机中，第*i*个分量

$$\begin{aligned} r_i &= \int_0^{T_s} r(t) \Psi_i(t) dt = \int_0^{T_s} [s_j(t) + n_w(t)] \Psi_i(t) dt \\ &= \int_0^{T_s} s_j(t) \Psi_i(t) dt + \int_0^{T_s} n_w(t) \Psi_i(t) dt \\ &= \int_0^{T_s} \left(\sum_{k=1}^N s_{jk} \Psi_k(t) \right) \Psi_i(t) dt + \int_0^{T_s} n_w(t) \Psi_i(t) dt \\ &= s_{ji} + n_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

式中

$$s_{ji} = \int_0^{T_s} s_j(t) \Psi_i(t) dt, \quad n_i = \int_0^{T_s} n_w(t) \Psi_i(t) dt$$

高斯噪声 n_i 具有如下的统计特性

均值为0，方差为 $\sigma_{ni}^2 = \frac{N_0}{2} E_{\Psi_i} = \frac{N_0}{2}$

M进制信号的最佳接收方法 (续)



在最佳接收机中, 第*i*个分量的分布特性

$$p(r_i | s_{ji}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{ni}^2}} \exp\left(-\frac{(r_i - s_{ji})^2}{2\sigma_{ni}^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(r_i - s_{ji})^2}{N_0}\right)$$

其中的各个分量 $r_i, i=1,2,\dots,M$ 间统计独立。

收到信号 $r(t)$ 后, 关于信号集 $\{s_k(t)\}$ 中信号 $s_m(t)$ 的似然函数

$$\begin{aligned} p(r | s_m) &= p(r_1 r_2, \dots, r_N | s_{m1} s_{m2}, \dots, s_{mN}) \\ &= p(r_1 | s_{m1}) p(r_2 | s_{m2}) \dots p(r_N | s_{mN}) \\ &= \prod_{i=1}^N p(r_i | s_{mi}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(r_i - s_{mi})^2}{N_0}\right), \quad m = 1, 2, \dots, M \end{aligned}$$

M进制信号的最佳接收方法 (续)



由最大似然法, 可由

$$\hat{s} = \arg \max_{s_i \in \{S\}} p(r | s_i)$$

得到最大似然判决。

因为对数函数是单调增函数, 对似然函数取对数不会影响判决

即有

$$\max_{s_m \in \{S\}} p(r | s_m) \leftrightarrow \max_{s_m \in \{S\}} \ln p(r | s_m)$$

因为 $\ln p(r | s_m) = \ln \left(\prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left(-\frac{(r_i - s_{mi})^2}{N_0} \right) \right)$

$$= \ln \left(\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \right)^N - \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^N (r_i - s_{mi})^2, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

M进制信号的最佳接收方法（续）



因此

$$\max_{s_m \in \{S\}} p(r | s_m) \leftrightarrow \max_{s_m \in \{S\}} \ln p(r | s_m) \leftrightarrow \min_{s_m \in \{S\}} \sum_{i=1}^N (r_i - s_{mi})^2$$

由此，最大似然判决归结为

(1) 由相关接收机解调得到

$$\vec{R} = [r_1, r_2, \dots, r_N]^T$$

(2) 将上述的接收信号矢量与符号集中的系数矢量集

$$\vec{S}_m = [s_{m1}, s_{m2}, \dots, s_{mN}]^T \quad m=1, 2, \dots, M$$

逐一进行比较。

(3) 取满足条件 $\min_{s_m \in \{S\}} \sum_{i=1}^N (r_i - s_{mi})^2$ 的系数矢量所对应的符号作为判决结果。

M进制振幅键控(MASK)调制解调系统



MASK信号的一般表达式

$$s_i(t) = a_i g_T(t) \cos \omega_c t \quad a_i = 2i - 1 - M, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

若记波形函数的能量为 $E_g = \int_0^{T_s} g_T^2(t) dt$

则归一化的基函数可表示为

$$\Psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g_T(t) \cos \omega_c t$$

由此可得

$$s_i(t) = a_i g_T(t) \cos \omega_c t = s_i \Psi_1(t), \quad i = 1, 2, \dots, M$$

其中

$$s_i = \sqrt{\frac{E_g}{2}} a_i, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

根据一般M进制系统的分析，直接可得任两符号间的欧氏距离

$$d_{ij} = |s_i - s_j| = \left| \sqrt{\frac{E_g}{2}} a_i - \sqrt{\frac{E_g}{2}} a_j \right| = \sqrt{\frac{E_g}{2}} |a_i - a_j|$$



◆ MASK信号的平均功率谱密度是将MPAM

基带信号的平均功率谱密度搬移到载频上

$$P_s(f) = \frac{A^2}{4} [P_b(f - f_c) + P_b(f + f_c)]$$

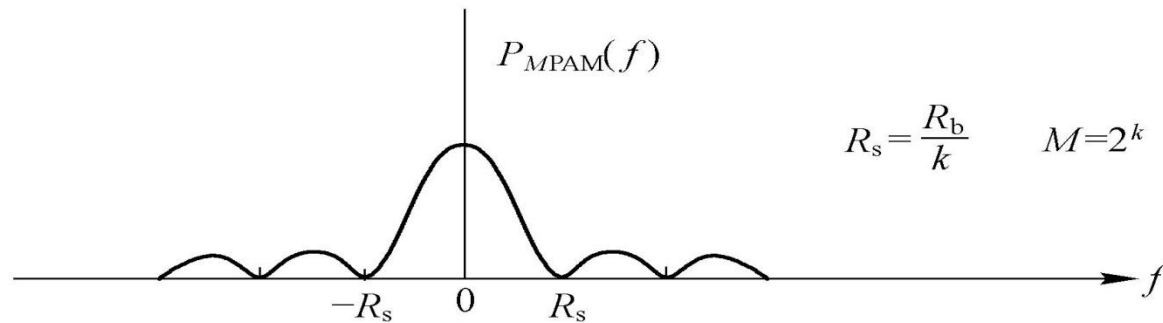
MPAM基带信号的平均功率谱密度

$$P_b(f) = \frac{\partial_a^2}{T_s} |G_T(f)|^2$$

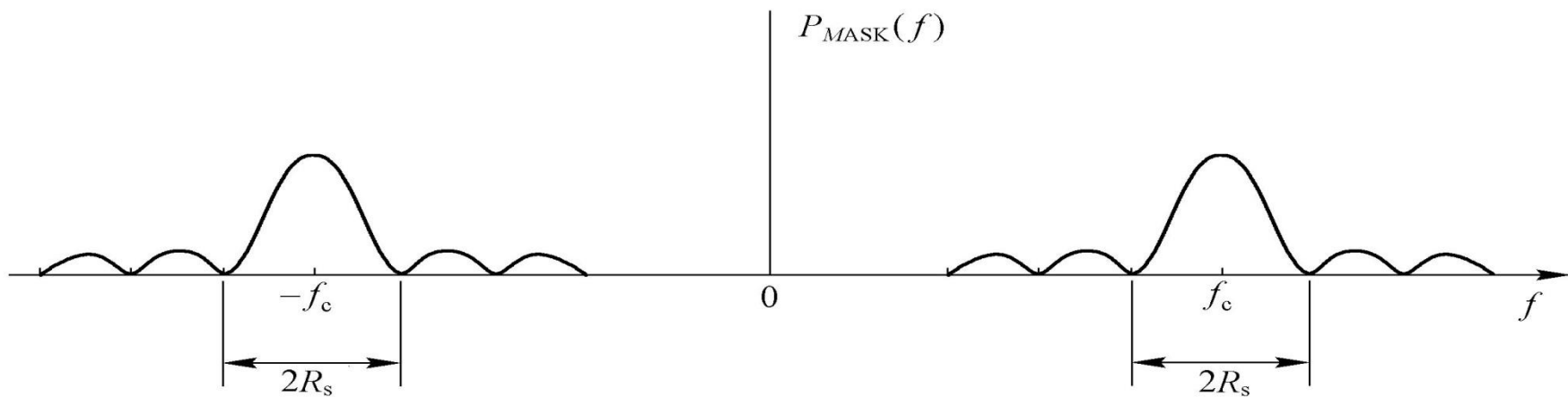
MASK相比于2ASK具有更高的频谱利用率。



◆ MASK信号平均功率谱密度的特点是：主瓣宽度仅与M进制符号速率 $R_s=1/T_s$ 有关，由于 $R_s=R_b/K$ ，所以MASK信号的功率谱主瓣宽度为 $2R_s=2R_b/K$ 。

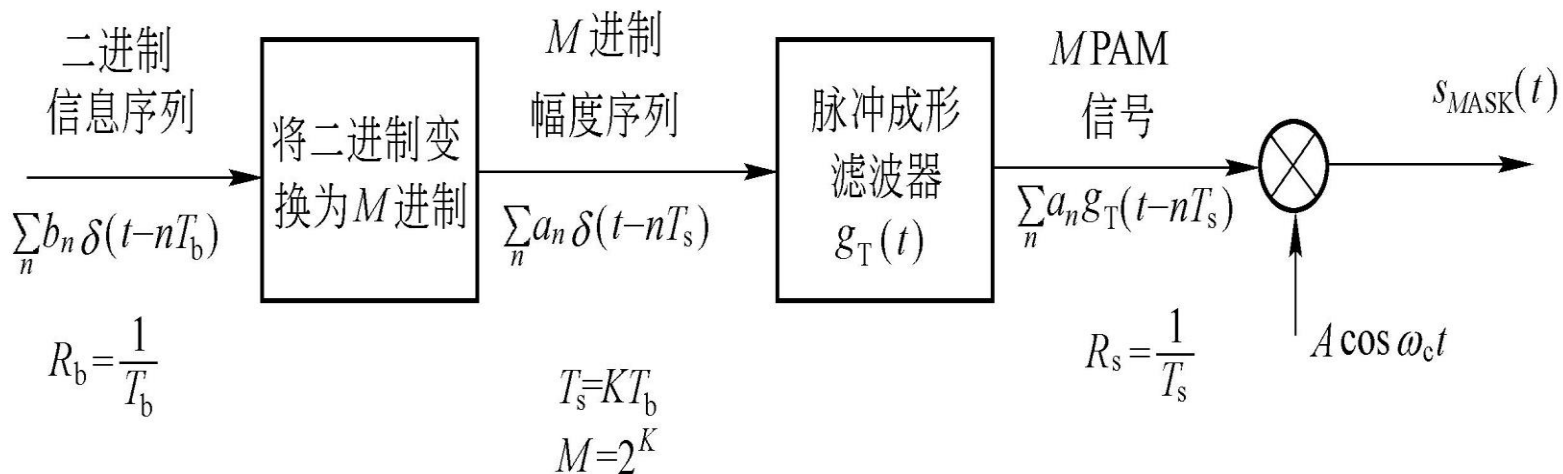


(a) MPAM 双边功率谱密度



(b) MASK 双边功率谱密度

M进制振幅键控(MASK)



MASK信号的产生框图

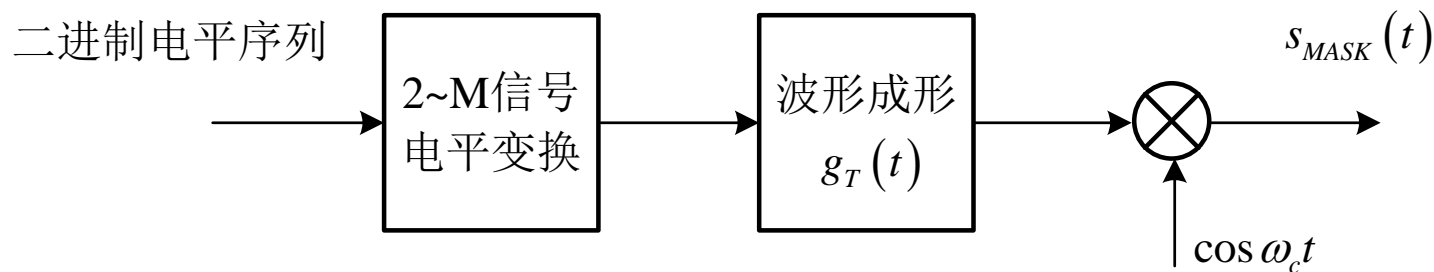
MASK调制解调系统(续)



MASK信号的功率谱谱： MASK信号可看作M个OOK信号的简单组合，因此功率谱特性与OOK信号的相同。

MASK信号的调制方法：

M进制电平序列



其中电平变换完成二进制码组与调制电平间的映射

$$\text{二进制码组} \leftrightarrow a_i = 2i - 1 - M, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

最后得到调制输出

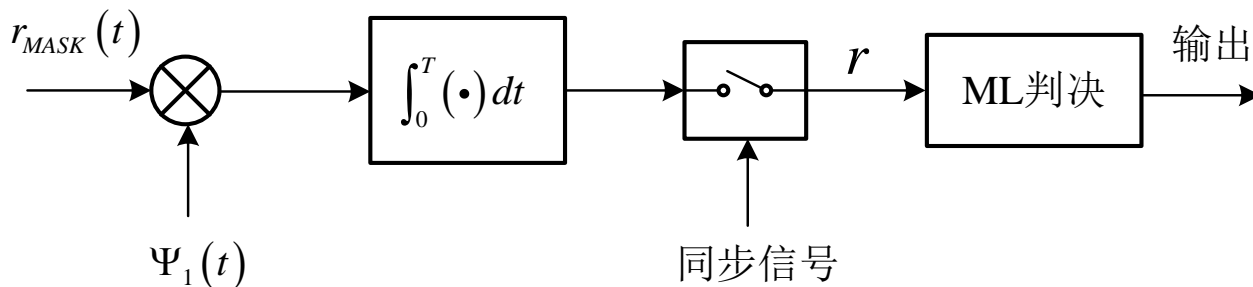
$$s_i(t) = a_i g_T(t) \cos \omega_c t$$

MASK调制解调系统(续)



MASK信号的最佳接收

因为MASK是一个一维的信号，其最佳的接收机结构为



相应地，其最大似然判决准则可简单地表示为

$$\hat{s} = \arg \max_{s_i \in \{S\}} p(r | s_i) = \arg \min_{s_i \in \{S\}} (r - s_i)^2$$

即通过解调得到的 r 与

$$s_i = \sqrt{\frac{E_g}{2}} a_i, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

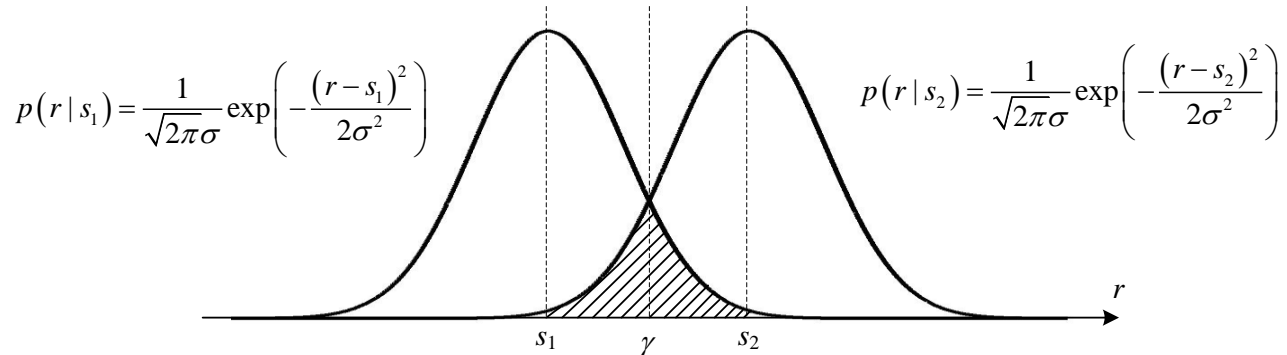
进行比较，以其差值平方的最小者作为判决输出。

MASK调制解调系统(续)

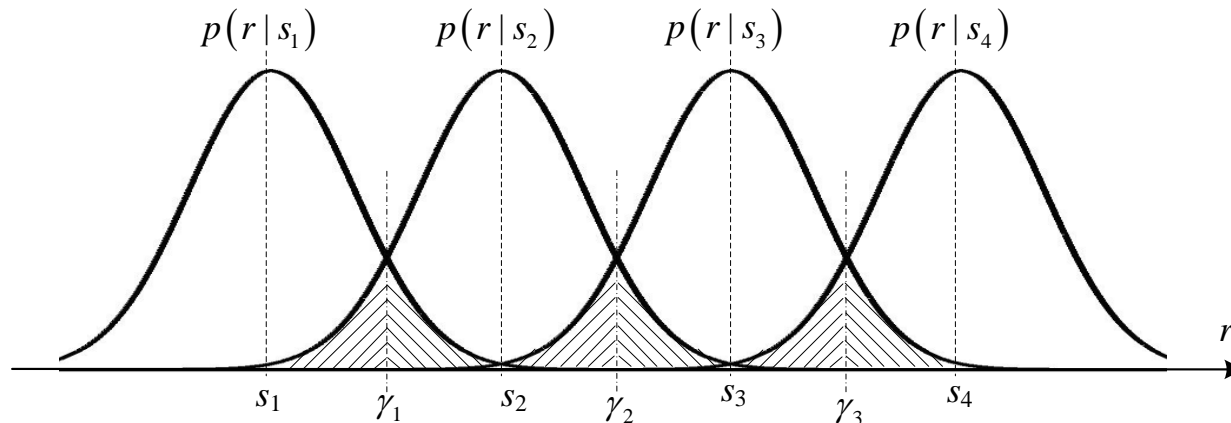


MASK信号的最佳接收机的误码性能分析

当M=2时，2个信号的似然函数为



当M=4时，相应的4个信号的似然函数为



MASK调制解调系统(续)



MASK信号的最佳接收机的误码性能分析

回顾 $M=2$ 时的MASK系统，当先验等概时，最佳接收机的判决门限应取 $\gamma = 0$

由上图，发 s_1 的错误概率为

$$P_{e1} = \int_0^{\infty} p(r | s_1) dr = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left[-\frac{(r - s_1)^2}{N_0}\right] dr = Q\left(\sqrt{\frac{E_g}{N_0}}\right)$$

为图中 $\gamma = 0$ 右侧阴影对应的面积。

同理，发 s_2 的错误概率为

$$P_{e2} = \int_{-\infty}^0 p(r | s_2) dr = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left[-\frac{(r - s_2)^2}{N_0}\right] dr = Q\left(\sqrt{\frac{E_g}{N_0}}\right)$$

为图中 $\gamma = 0$ 左侧阴影对应的面积。

MASK调制解调系统(续)



因此当 $M=2$ 时，总的阴影面积为

$$2Q\left(\sqrt{\frac{E_g}{N_0}}\right)$$

阴影面积表示错误概率的大小，在先验等概 $P(s_1)=P(s_2)=1/2$ 的情况下，误码率为总阴影面积的 $1/2$ ，即有

$$P_E = \frac{1}{2} 2Q\left(\sqrt{\frac{E_g}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_g}{N_0}}\right)$$

由上图可见，当 $M=4$ 时，总的阴影面积为

$$(4-1)2Q\left(\sqrt{\frac{E_g}{N_0}}\right) = 3 \times 2Q\left(\sqrt{\frac{E_g}{N_0}}\right)$$

MASK调制解调系统(续)



由此不难推测，对于M进制时的情形，共有M-1块阴影面积积，总的面积为

$$(M-1)2Q\left(\sqrt{\frac{E_g}{N_0}}\right)$$

若M种符号先验等概，此时每块面积出现的概率为1/M
因此总的误码率为

$$P_E = \frac{1}{M}(M-1)2Q\left(\sqrt{\frac{E_g}{N_0}}\right) = \frac{2(M-1)}{M}Q\left(\sqrt{\frac{E_g}{N_0}}\right)$$

MASK调制解调系统(续)



由

$$s_i(t) = a_i g_T(t) \cos \omega_c t = s_i \Psi_1(t), \quad i = 1, 2, \dots, M$$

可知码元 $s_i(t)$ 的能量为

$$\begin{aligned} E_i &= \int_0^{T_s} s_i^2(t) dt = \int_0^{T_s} s_i^2 \cdot \Psi_1^2(t) dt \\ &= s_i^2 = \left(\sqrt{\frac{E_g}{2}} a_i \right)^2 = \frac{E_g}{2} (2i - 1 - M)^2, \quad i = 1, 2, \dots, M \end{aligned}$$

符号集中码元的平均能量为

$$\begin{aligned} E_{av} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M E_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{E_g}{2} (2i - 1 - M)^2 \\ &= \frac{E_g}{2} \frac{M^2 - 1}{3}, \quad i = 1, 2, \dots, M \end{aligned}$$

MASK调制解调系统(续)



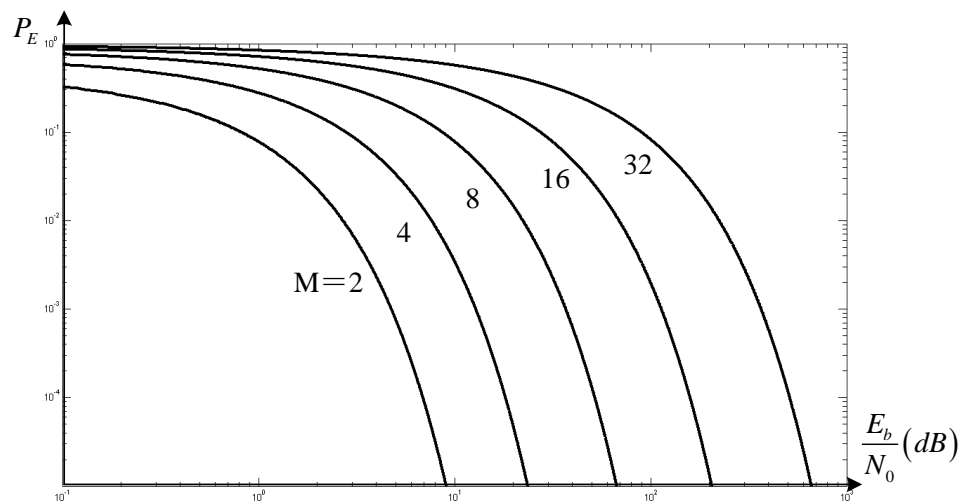
由此可得比特的平均能量为

$$E_b = \frac{E_{av}}{k} = \frac{E_{av}}{\log_2 M} = \frac{M^2 - 1}{6 \log_2 M} E_g \rightarrow E_g = \frac{6 \log_2 M}{M^2 - 1} E_b$$

进而有

$$P_E = \frac{2(M-1)}{M} Q \left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M}{M^2 - 1} \cdot \frac{E_b}{N_0}} \right)$$

不同M取值的系统误码特性

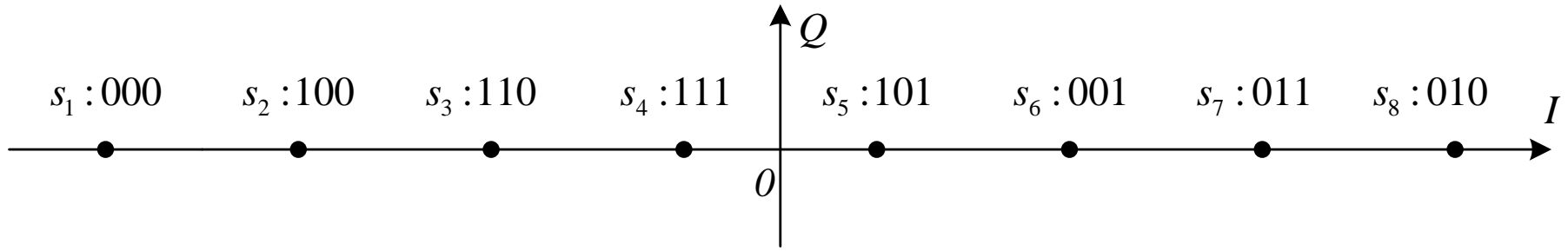


可见随着M的增大，误码性能将劣化。

MASK调制解调系统(续)



如下图，若MASK信号的星座图采用格雷码编码



同时假定误码只会发生在相邻的符号间，每个码元包含k比特数据，每个码元出错只会导致k比特数据中的1比特错误。

因此在误码率 P_E 与误比特率 P_b 间有如下的关系：

$$P_b = \frac{1}{k} P_E = \frac{1}{\log_2 M} P_E = \frac{1}{\log_2 M} \frac{2(M-1)}{M} Q \left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M}{M^2 - 1} \cdot \frac{E_b}{N_0}} \right)$$

MPSK调制解调系统



MPSK载波调制一个码元信号可表示为

$$s_i(t) = g_T(t) \cos \left[\omega_c t + \frac{2\pi(i-1)}{M} \right], \quad i = 1, 2, \dots, M$$

其中 $g_T(t)$ 是符号的脉冲波形信号。展开上式可得

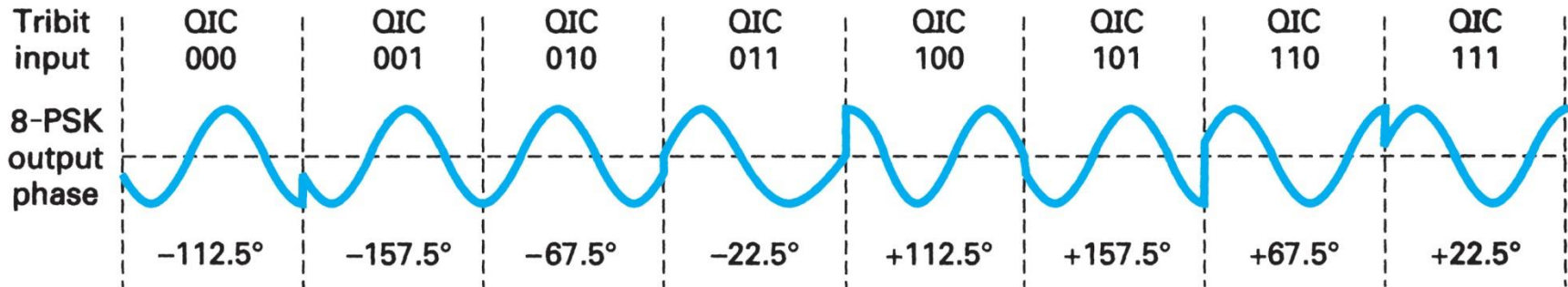
$$s_i(t) = a_{ic} g_T(t) \cos \omega_c t - a_{is} g_T(t) \sin \omega_c t$$

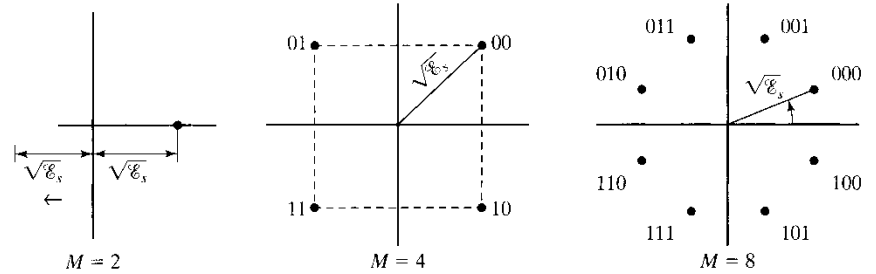
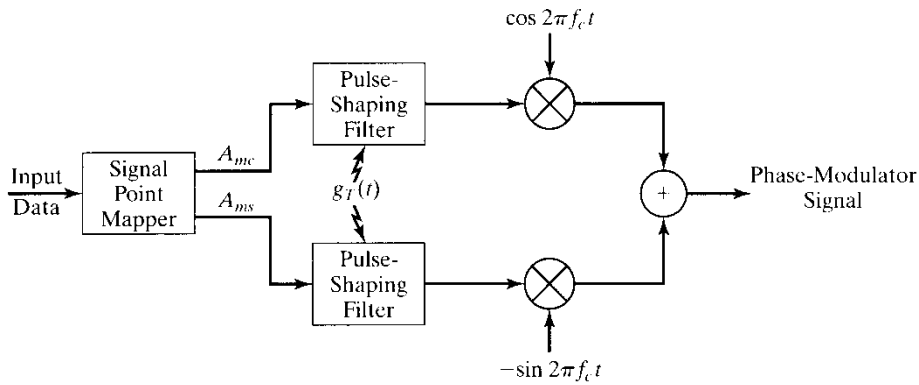
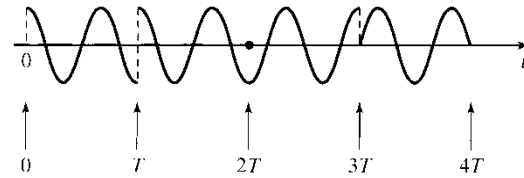
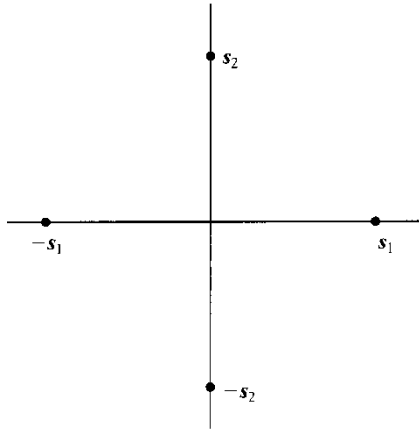
其中 $a_{ic} = \cos \frac{2\pi}{M}(i-1)$, $a_{is} = \sin \frac{2\pi}{M}(i-1)$, $i = 1, 2, \dots, M$

MPSK信号的码元能量是常数

$$\begin{aligned} E_S &= \int_0^{T_s} s_i^2(t) dt = \int_0^{T_s} g_T^2(t) \cos^2 \left[\omega_c t + \frac{2\pi(i-1)}{M} \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{T_s} g_T^2(t) dt = \frac{1}{2} E_g, \quad i = 1, 2, \dots, M \end{aligned}$$

Output phase-versus-time relationship for an 8-PSK modulator





MPSK调制解调系统(续)



若定义归一化的二维基函数

$$\Psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g_T(t) \cos \omega_c t, \quad \Psi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_g}} g_T(t) \sin \omega_c t$$

则MPSK信号可以表示为

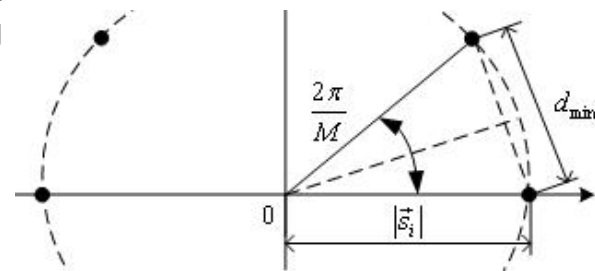
$$s_i(t) = s_{i1} \Psi_1(t) + s_{i2} \Psi_2(t)$$

式中

$$s_{i1} = \sqrt{\frac{E_g}{2}} a_{ic} = \sqrt{E_S} a_{ic}, \quad s_{i2} = \sqrt{\frac{E_g}{2}} a_{is} = \sqrt{E_S} a_{is}, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

容易导出, MPSK信号两符号间的最小距离

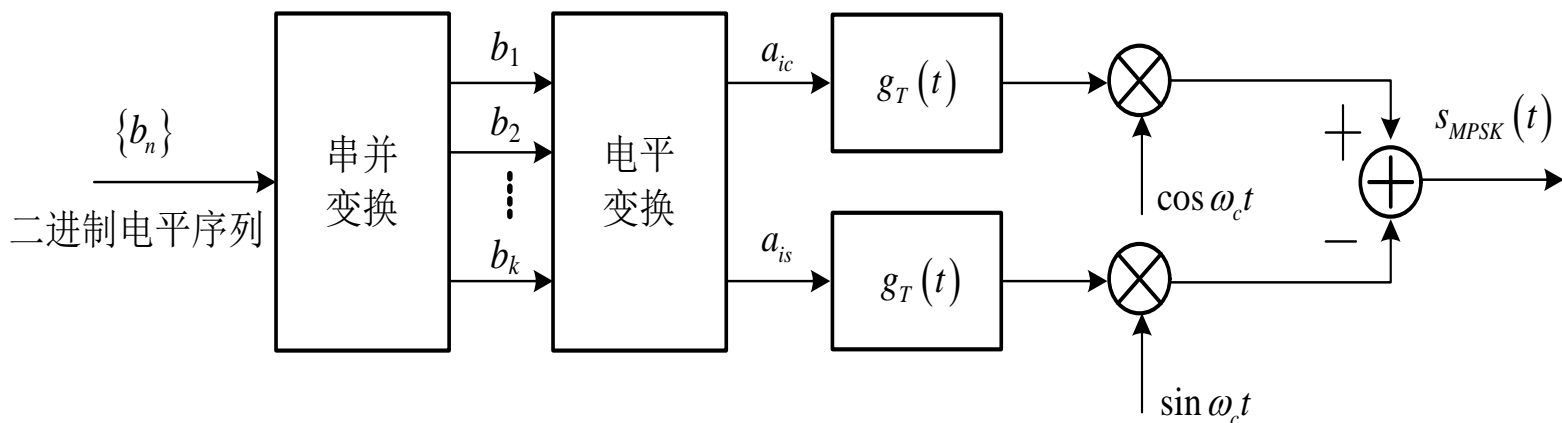
$$d_{\min} = 2 \cdot |\vec{s}_i| \sin \frac{2\pi/M}{2} = 2\sqrt{E_S} \sin \frac{\pi}{M}$$



MPSK调制解调系统(续)

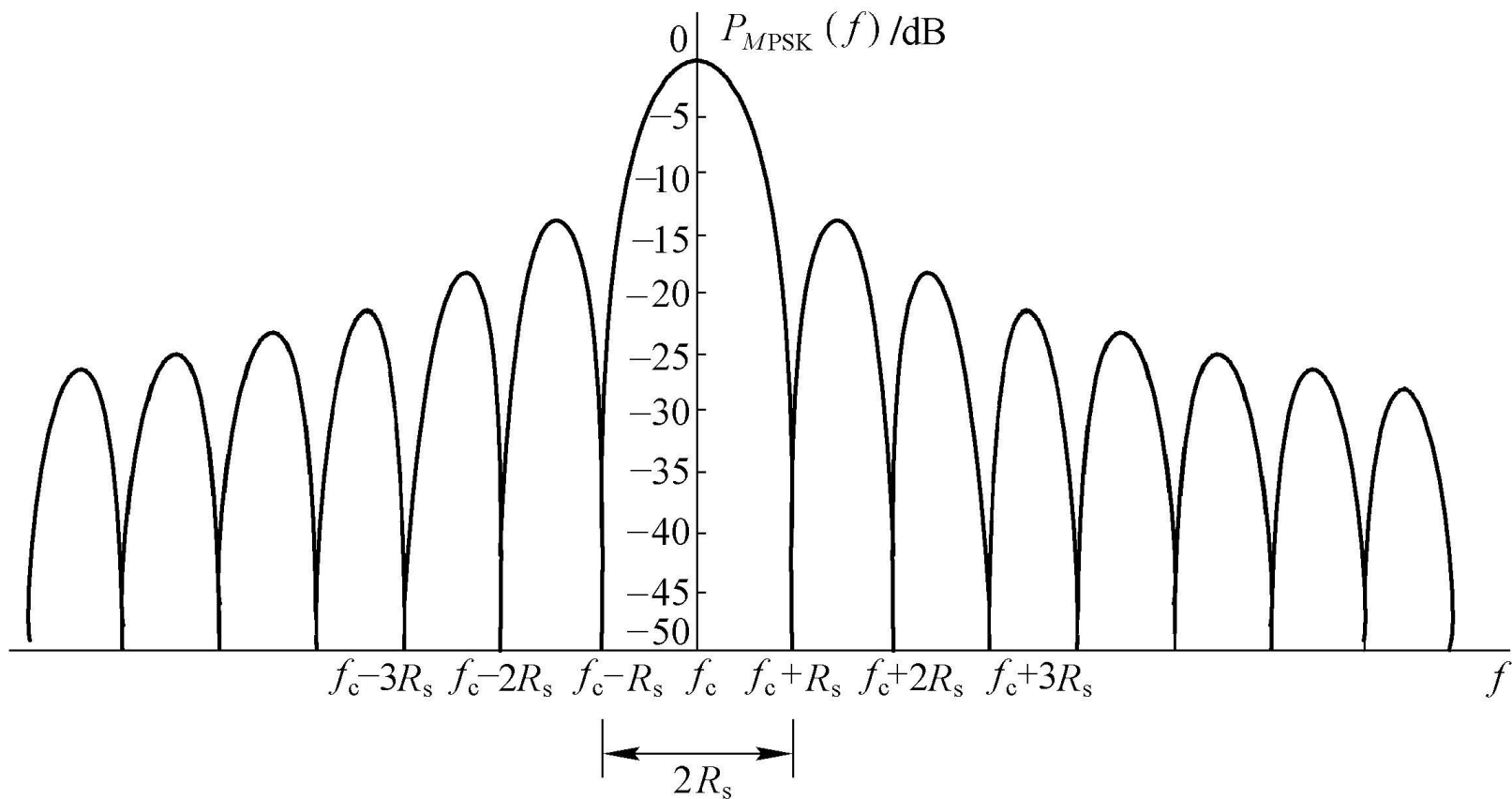


MPSK信号的调制方法



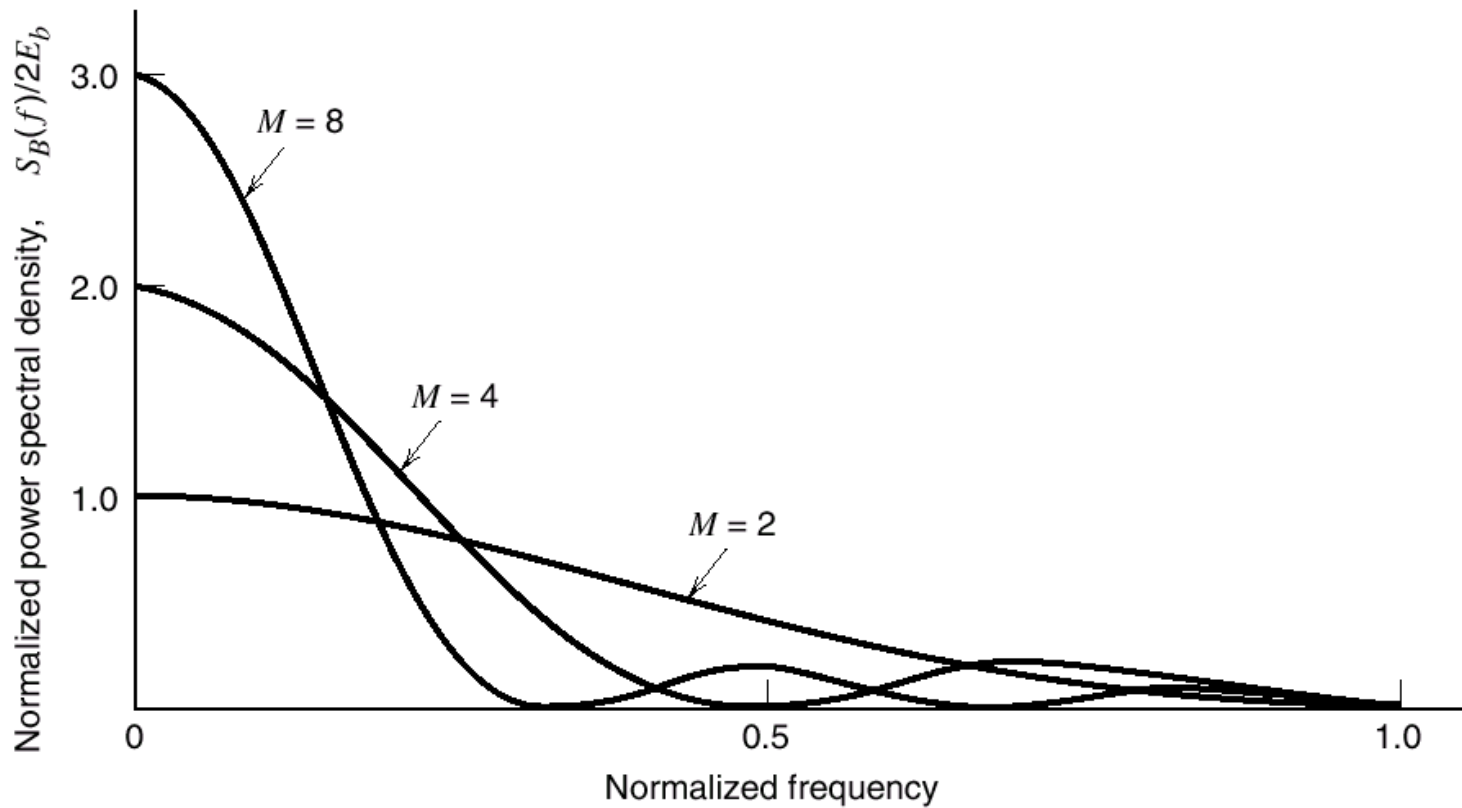
MPSK信号的功率谱特性

MPSK信号形式上的可看作是由两个MASK信号组合而成的，因此MPSK信号与2ASK信号有相同的功率谱特性。

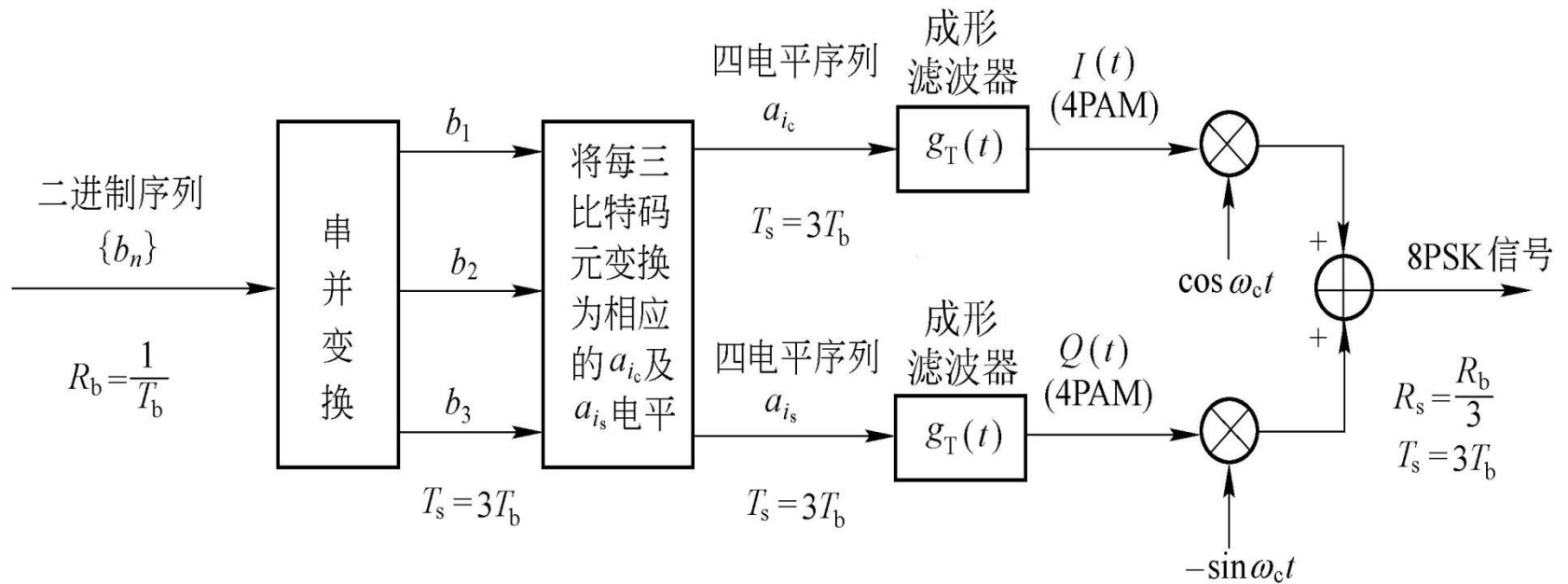


MPSK功率谱密度

Power spectra of M -ary PSK signals for $M = 2, 4, 8$.



MPSK信号的产生



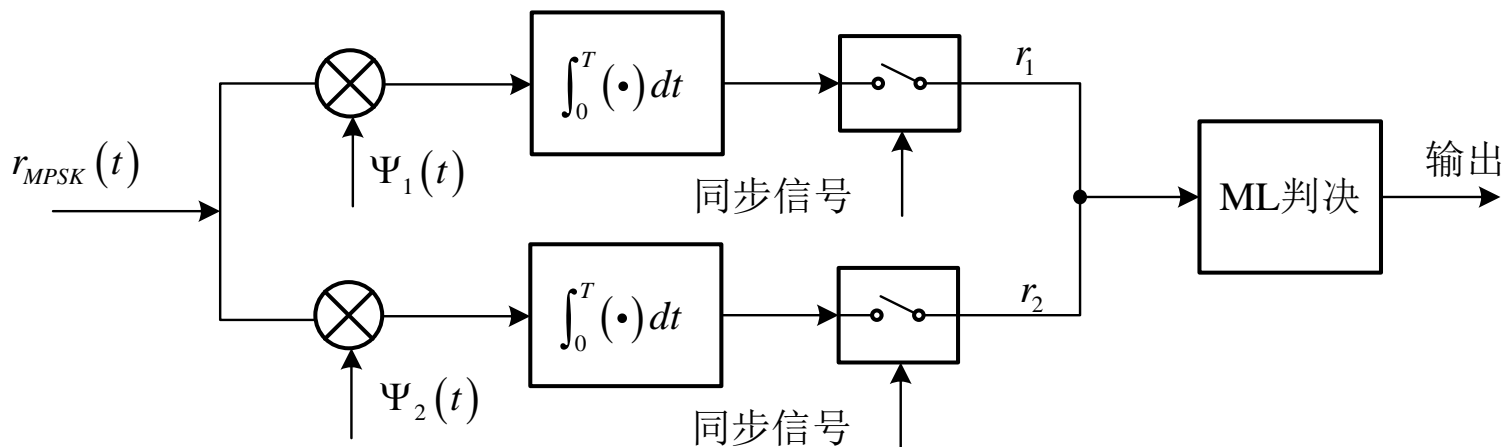
产生8PSK信号的原理框图

MPSK调制解调系统(续)



MPSK信号的解调

MPSK信号的相关接收机具有如下的结构



输入的接收信号

$$r(t) = s_i(t) + n_w(t), \quad i = 1, 2, \dots, M$$

MPSK调制解调系统(续)



经相关接收机解调后的输出

$$\begin{aligned}r_1 &= \int_0^{T_s} r(t) \Psi_1(t) dt = \int_0^{T_s} (s_i(t) + n_w(t)) \Psi_1(t) dt \\&= \int_0^{T_s} (s_{i1} \Psi_1(t) + s_{i2} \Psi_2(t) + n_w(t)) \Psi_1(t) dt \\&= s_{i1} + \int_0^{T_s} n_w(t) \Psi_1(t) dt = s_{i1} + n_1\end{aligned}$$

同理可得

$$r_2 = s_{i2} + \int_0^{T_s} n_w(t) \Psi_2(t) dt = s_{i2} + n_2$$

其中 n_1, n_2 为高斯噪声

均值为 0

方差为 $\sigma^2 = N_0/2$

MPSK调制解调系统(续)



MPSK信号的最大似然判决

接收信号的相位

$$\theta_r = \arctan \frac{r_2}{r_1}$$

最大似然判决准则

$$\hat{s}_i = \arg \min_{\theta_i \in \{\theta\}} |\theta_i - \theta_r|$$

其中 $\left\{ \theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{M}, i = 1, 2, \dots, M \right\}$ 是MPSK信号的相位取值集合。

即选择与接收信号相位相差最小的信号作为判决输出。

多相相移键控 (MPSK) 及相干检测



受AWGN干扰的MPSK信号:

$$r(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} (\cos \phi_i \cos \omega_0 t + \sin \phi_i \sin \omega_0 t) + n(t) \quad \begin{array}{l} 0 \leq t \leq T \\ i = 1, \dots, M \end{array}$$

MPSK信号的检测:

由:
$$X = \int_0^T r(t) \psi_1(t) dt$$

$$Y = \int_0^T r(t) \psi_2(t) dt$$

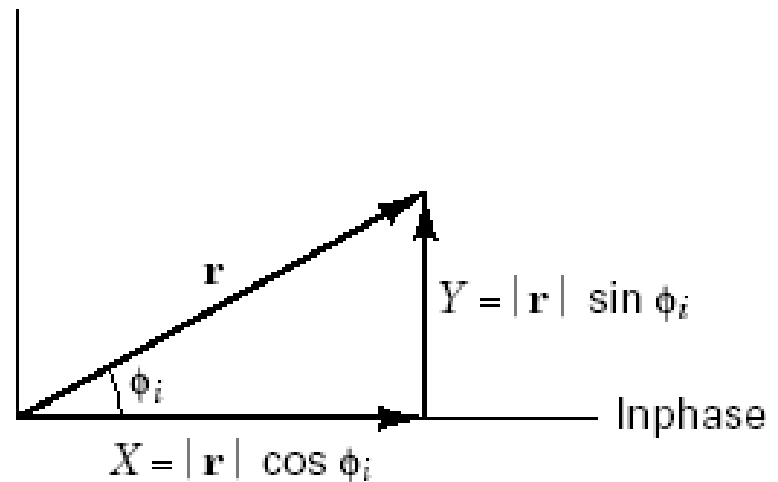
得:

$$\hat{\phi} = \arctan \frac{Y}{X}$$

根据 $|\phi_i - \hat{\phi}|$, $i=1,2,\dots,M$

最小作出判决。

Quadrature

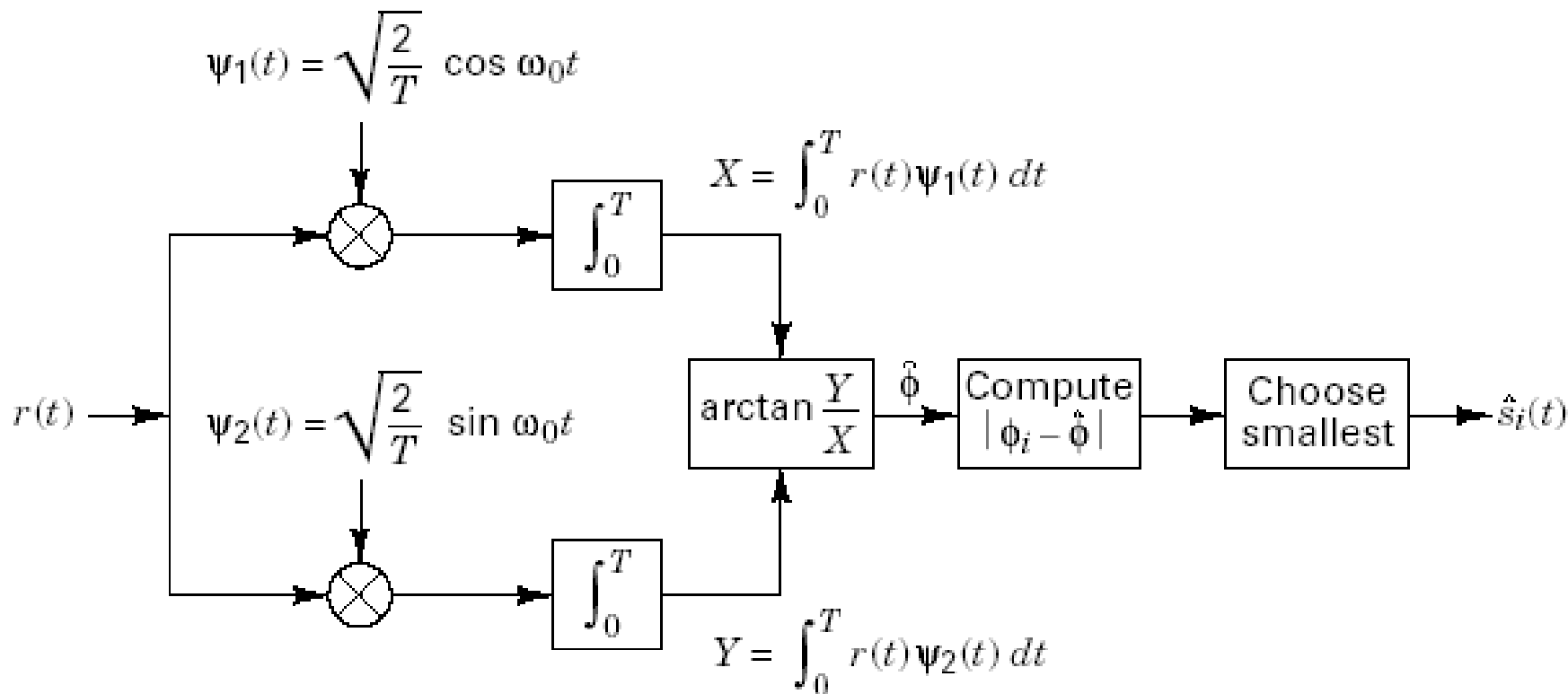


$$\hat{\phi} = \arctan (Y/X) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Noisy estimate} \\ \text{of transmitted } \phi_i \end{array} \right.$$

多相相移键控 (MPSK) 及相干检测



MPSK信号解调器结构

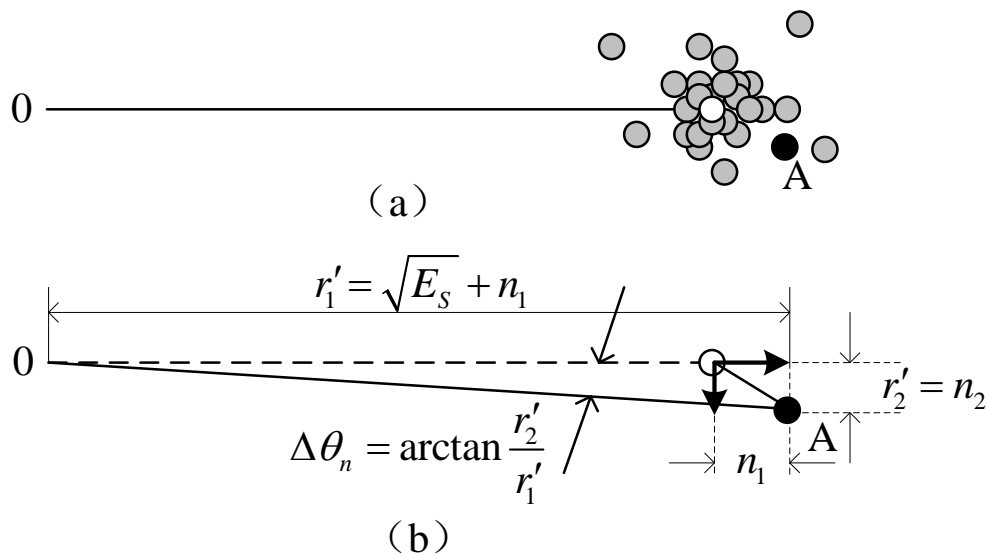


MPSK调制解调系统(续)



MPSK信号最佳接收机的误码性能分析

噪声导致的MPSK信号的相位偏差 $\Delta\theta_n$ 可用如下的图描述



二维的高斯噪声干扰可分为径向和径向的垂直方向两部分

$$\Delta\theta_n = \arctan \frac{r'_2}{r'_1}$$

其中 $r'_1 = \sqrt{E_s + n_1}$, $r'_2 = n_2$

MPSK调制解调系统(续)



因为 r'_1, r'_2 相互独立, 且有

$$r'_1 \quad \text{均值: } \sqrt{E_s} \quad \text{方差: } \sigma^2 = N_0/2$$

$$r'_2 \quad \text{均值: } 0 \quad \text{方差: } \sigma^2 = N_0/2$$

由此可得上述二维高斯随机变量的分布特性

$$\begin{aligned} p(r'_1, r'_2) &= p(r'_1) p(r'_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{(r'_1 - \sqrt{E_s})^2}{2\sigma^2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{r_2'^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{(r'_1 - \sqrt{E_s})^2 + r_2'^2}{2\sigma^2}\right\} \end{aligned}$$

MPSK调制解调系统(续)



因为

$$V = \sqrt{r_1'^2 + r_2'^2} \quad \Delta\theta_n = \arctan \frac{r_2'}{r_1'}$$

可得分布特性的极坐标表达形式为

$$p(V, \Delta\theta_n) = \frac{V}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{V^2 + E_s - 2V\sqrt{E_s} \cos \Delta\theta_n}{2\sigma^2}\right)$$

对应MPSK信号, 主要关心 $\Delta\theta_n$ 的分布特性, 由上式可得

$$p(\Delta\theta_n) = \int_0^\infty p(\Delta\theta_n, V) dV$$

当满足条件 $E_s/N_0 \gg 1$ 时

可得

$$p(\Delta\theta_n) \approx \sqrt{\frac{E_s}{\pi N_0}} \cos \Delta\theta_n \exp\left\{-\frac{E_s}{N_0} \sin^2 \Delta\theta_n\right\}$$

MPSK调制解调系统(续)



对应MPSK信号，无误码的条件

$$-\frac{2\pi/M}{2} < \Delta\theta_n < \frac{2\pi/M}{2} \longrightarrow -\frac{\pi}{M} < \Delta\theta_n < \frac{\pi}{M}$$

由此可得正确判决的概率

$$P_c = \int_{-\pi/M}^{\pi/M} p(\Delta\theta_n) d(\Delta\theta_n)$$

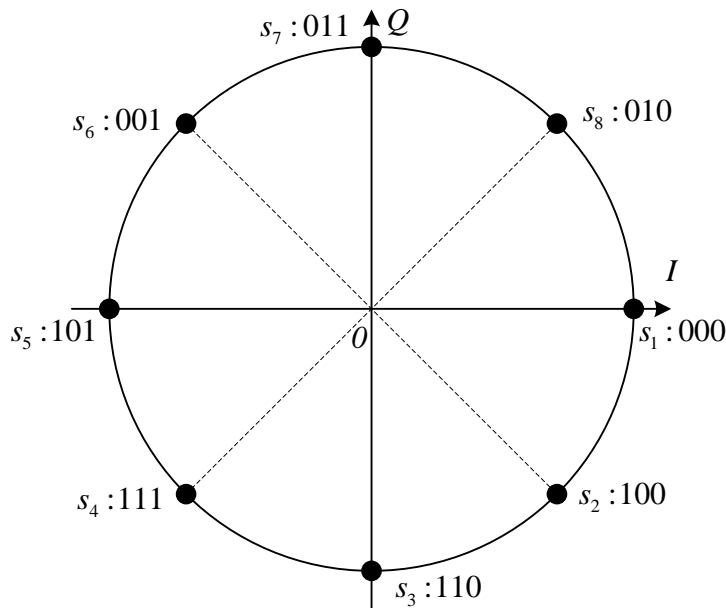
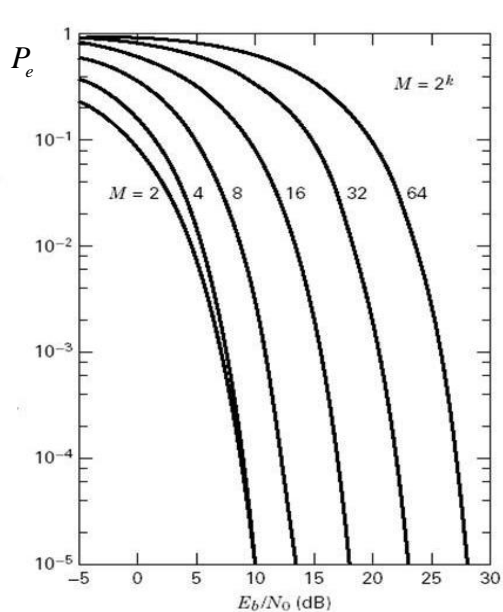
误码率相应地为

$$\begin{aligned} P_E &= 1 - P_c = 1 - \int_{-\pi/M}^{\pi/M} p(\Delta\theta_n) d(\Delta\theta_n) \\ &\approx 1 - \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \sqrt{\frac{E_s}{\pi N_0}} \cos \Delta\theta_n \exp\left\{-\frac{E_s}{N_0} \sin^2 \Delta\theta_n\right\} d(\Delta\theta_n) \\ &= 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right) = 2Q\left(\sqrt{2k \frac{E_b}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right) \end{aligned}$$

MPSK调制解调系统(续)



调制阶数M取值不同时的误码特性如左图所示



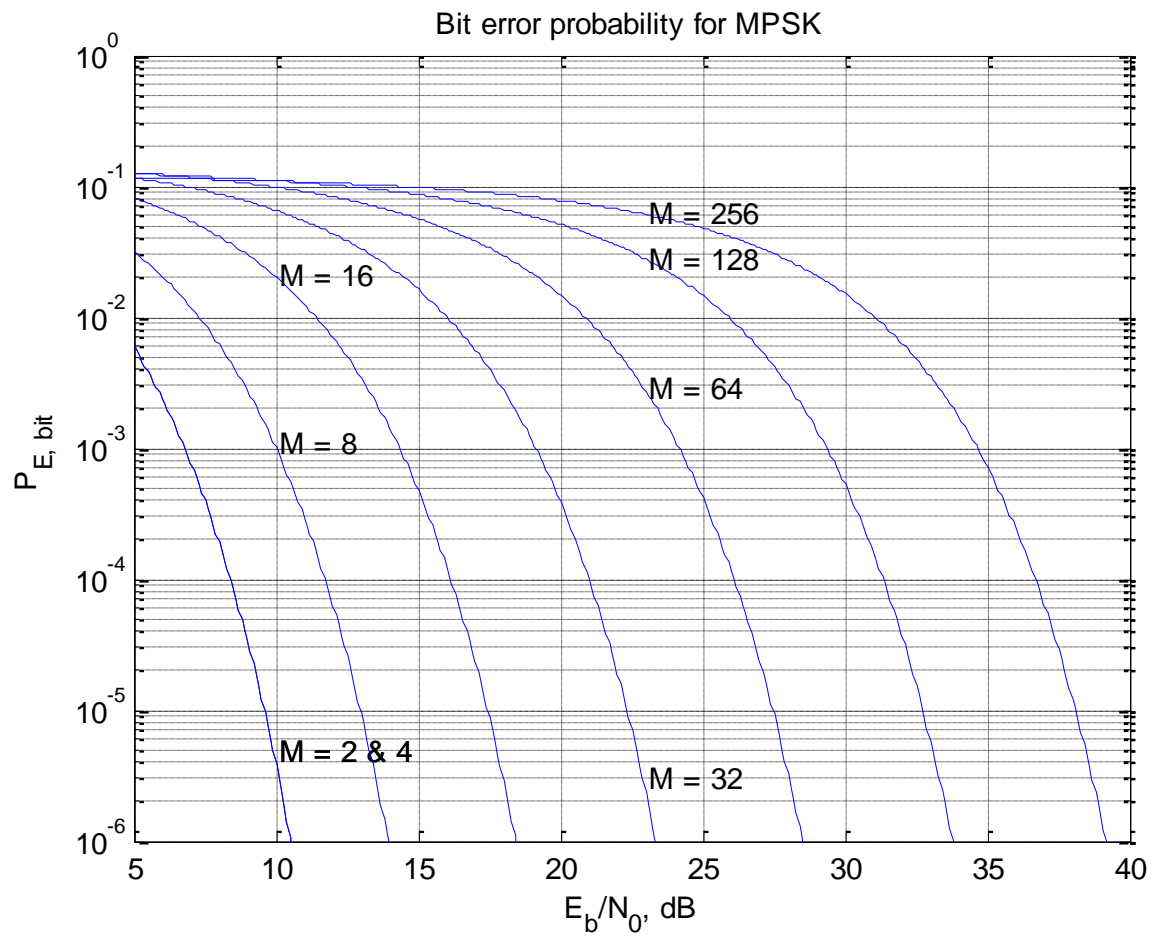
MPSK信号符号间的距离有差异，可以采用格雷码改善其误比特率性能。若可控制误码使错误仅出现在相邻的码元之间，则可得误比特率

$$P_b = \frac{P_E}{k} = \frac{P_E}{\log_2 M} = \frac{2}{\log_2 M} Q \left(\sqrt{2k \frac{E_b}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M} \right)$$

MPSK误码率的Matlab代码



```
% Bit error probabilities - M-ary PSK
%
clf
z_dB = 5:.1:40;
z = 10.^(z_dB/10);
for j = 1:8
    M=2^j;
    A=2/log2(M);
    k=(sin(pi/M))^2*log2(M);
    if j == 1 | j == 2
        Pb = qfn(sqrt(2*z));
    elseif j >= 3
        Pb = A*qfn(sqrt(k*2*z));
    end
    semilogy(z_dB,Pb),axis([5 40 10^(-6) 1]),xlabel('E_b/N_0, dB'),ylabel('P_E_, _b_i_t'),...
    if j == 1 | j == 2
        text(z_dB(50)+.2, Pb(50), 'M = 2 & 4')
    elseif j == 3 | j == 4
        text(z_dB(50)+.2, Pb(50), ['M = ', num2str(M)])
    elseif j > 4
        text(z_dB(180)+.2, Pb(180), ['M = ', num2str(M)])
    end
    if j==1
        hold on
        grid
    end
end
title('Bit error probability for MPSK')
```



MPSK系统仿真



◆北邮版课本配套Matlab书 P111



◆ 综上所述, MASK的信号空间是一维空间, 信号矢量的端点分布在一条直线轴上; MPSK的信号空间是二维, 信号矢量的端点分布在一个圆上; 在发送信号平均比特能量给定时, 随着M的增大, 信号矢量端点之间的欧氏距离也随之减小。

四相移相键控(QPSK)



1. QPSK信号的产生

- ◆ **四相移相键控(QPSK)信号的正弦载波有4个可能的离散相位状态，每个载波相位携带2个二进制符号**

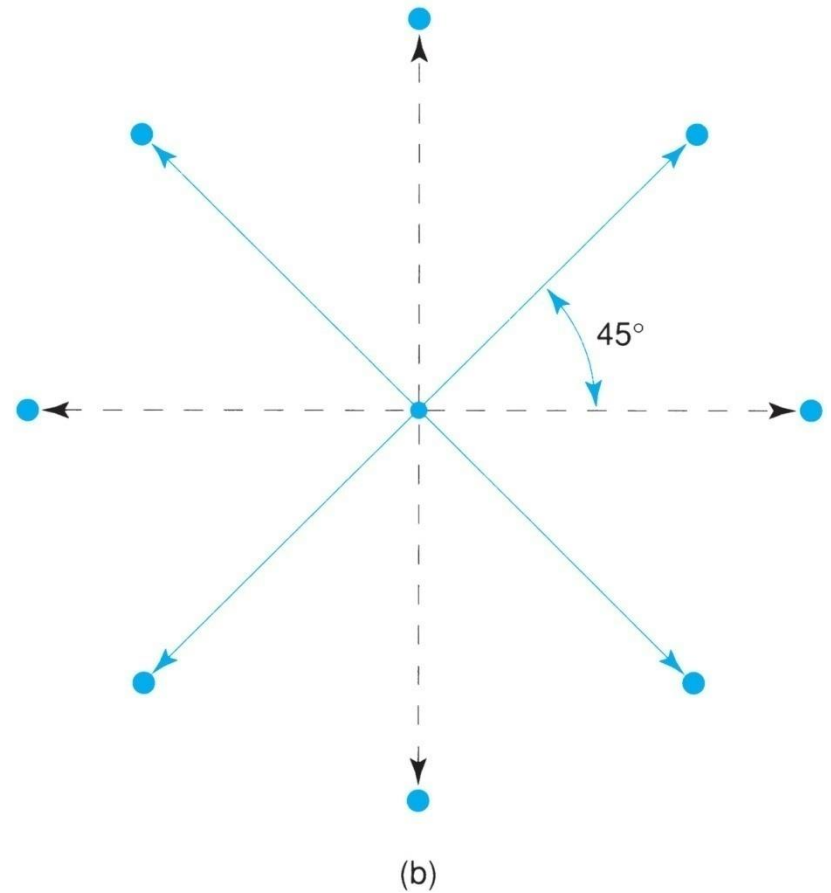
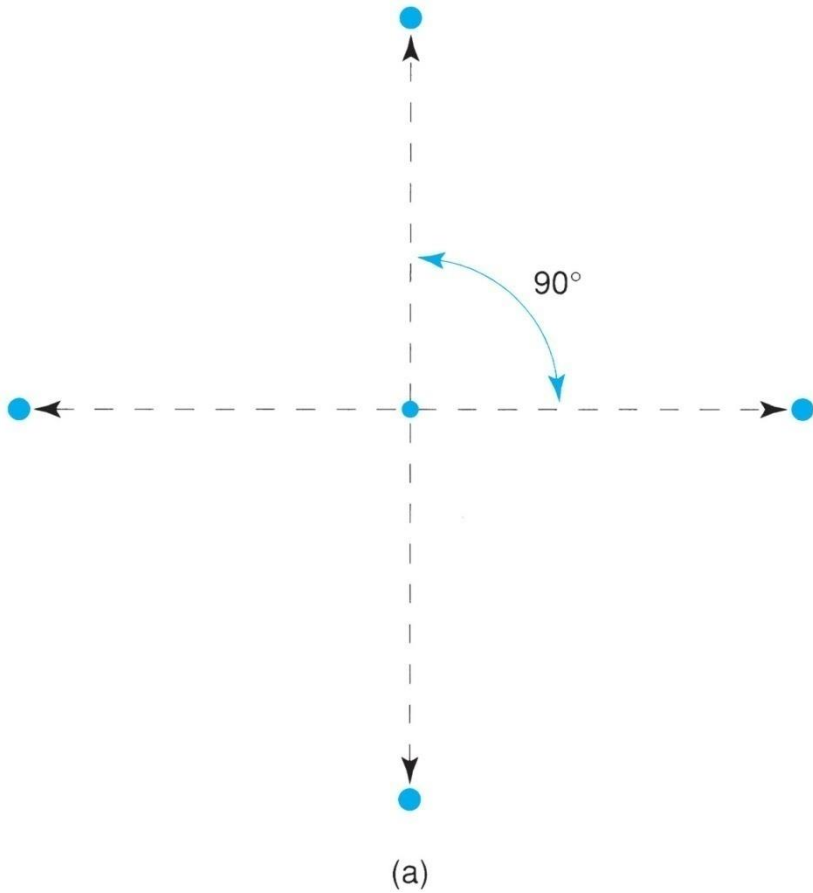


◆ Four-level PSK (QPSK)

➤ Each element represents more than one bit

$$s(t) = \begin{cases} A \cos\left(2\pi f_c t + \frac{\pi}{4}\right) & 11 \\ A \cos\left(2\pi f_c t + \frac{3\pi}{4}\right) & 01 \\ A \cos\left(2\pi f_c t - \frac{3\pi}{4}\right) & 00 \\ A \cos\left(2\pi f_c t - \frac{\pi}{4}\right) & 10 \end{cases}$$

QPSK constellations: (a) standard encoding format; (b) trellis encoding format



高效带宽调制

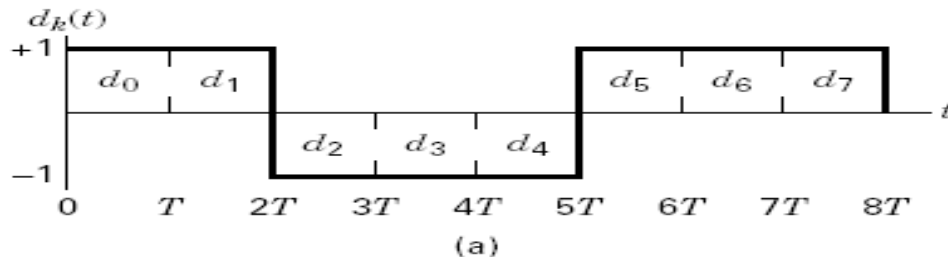


高效带宽调制技术的主要目的是获得最大的带宽效率

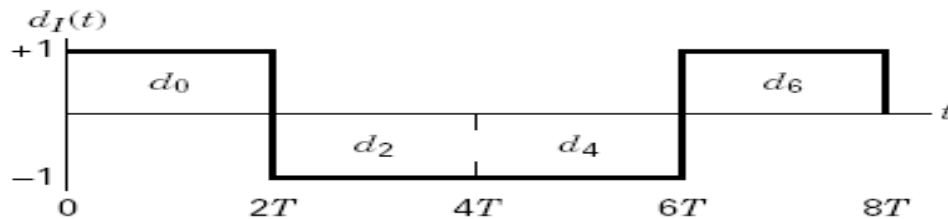
(1) QPSK(Quaternary PSK / 四进制PSK)

QPSK工作原理:将 $d_k(t)$ 分成 $d_I(t)$ $d_Q(t)$, 分别调制两正交信号

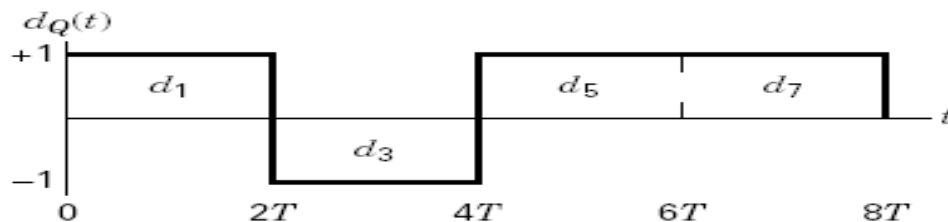
数据源 $d_k(t)$:

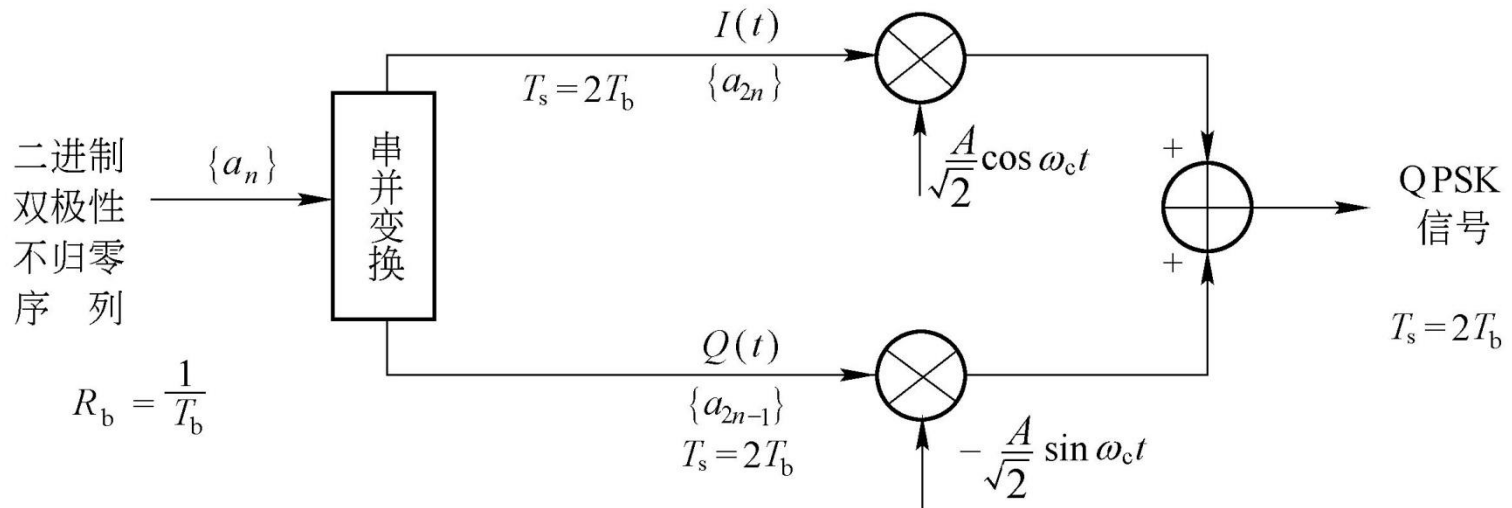


同步流 $d_I(t)$:



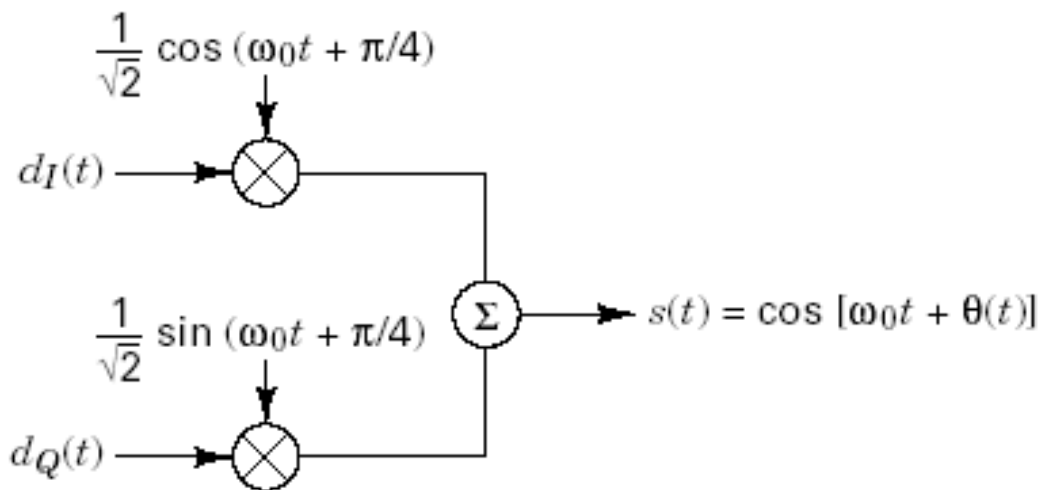
正交流 $d_Q(t)$:





产生QPSK信号的正交调制原理图

(1) QPSK(续)



信号可表示为:

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} d_I(t) \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} d_Q(t) \sin\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

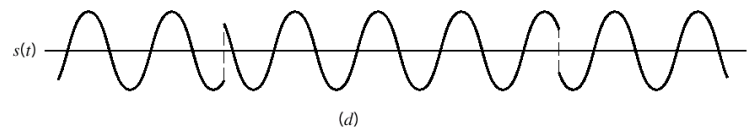
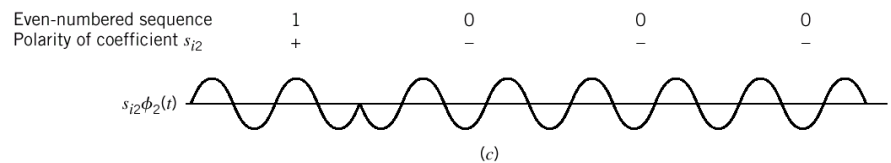
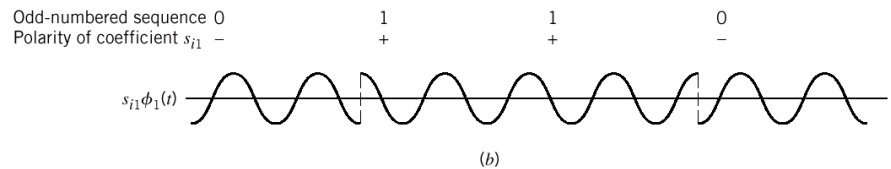
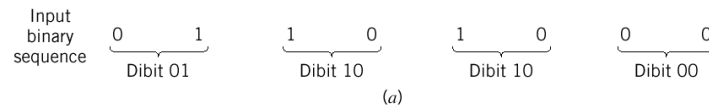
或:

$$s(t) = \cos[2\pi f_0 t + \theta(t)]$$

QPSK信号可看成两正交BPSK信号,可分别进行检测。



(a) Input binary sequence. (b) Odd-numbered bits of input sequence and associated binary PSK wave. (c) Even-numbered bits of input sequence and associated binary PSK wave. (d) QPSK waveform defined as $s(t) = s_{i1}\phi_1(t) + s_{i2}\phi_2(t)$.



Output phase-versus-time relationship for a QPSK modulator

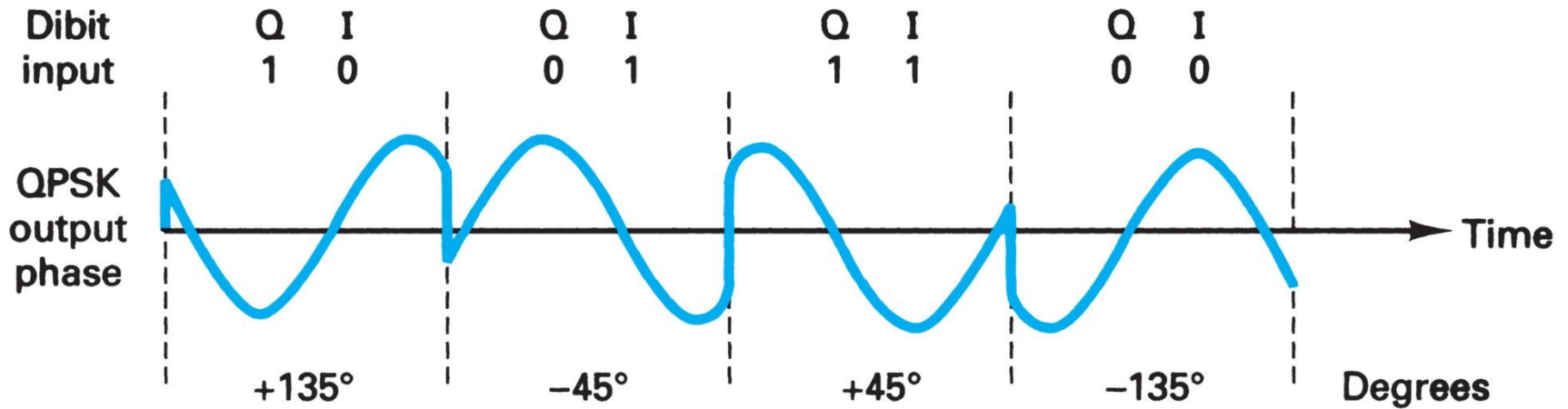




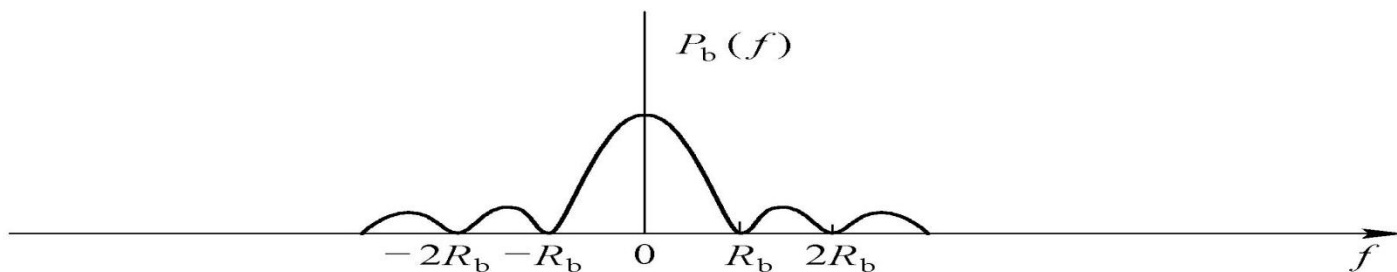
TABLE 6.1 *Signal-space characterization of QPSK*

<i>Gray-encoded Input Dibit</i>	<i>Phase of QPSK Signal (radians)</i>	<i>Coordinates of Message Points</i>	
		s_{i1}	s_{i2}
10	$\pi/4$	$+\sqrt{E}/2$	$-\sqrt{E}/2$
00	$3\pi/4$	$-\sqrt{E}/2$	$-\sqrt{E}/2$
01	$5\pi/4$	$-\sqrt{E}/2$	$+\sqrt{E}/2$
11	$7\pi/4$	$+\sqrt{E}/2$	$+\sqrt{E}/2$

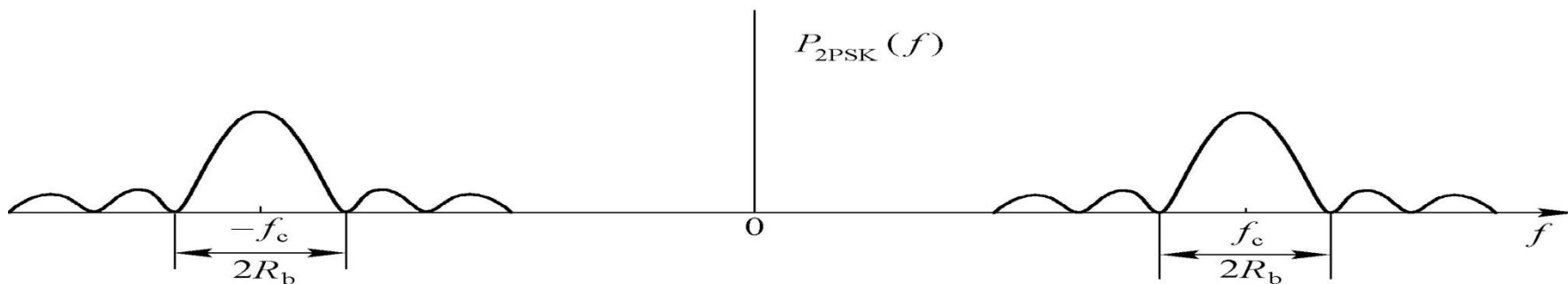
QPSK信号的平均功率谱密度



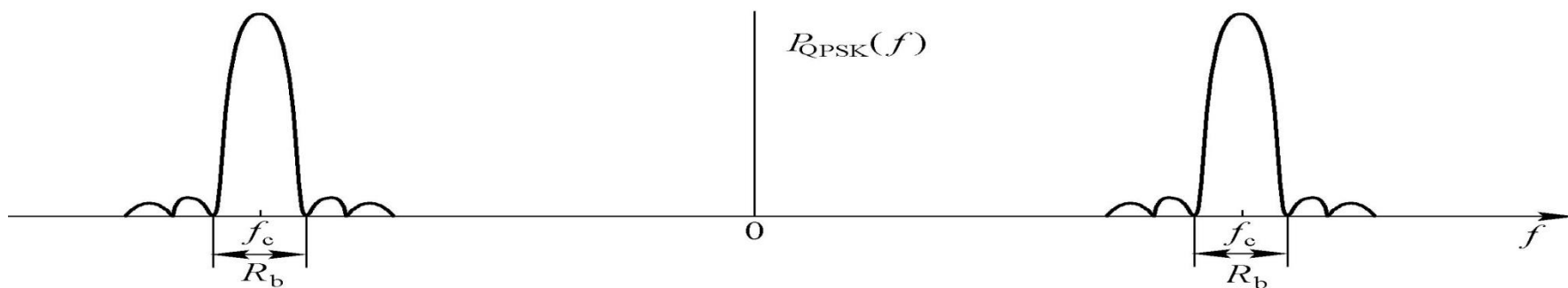
- ◆ 由于QPSK信号是由两正交载波的2PSK线性叠加而成，所以QPSK信号的平均功率谱密度是同相支路及正交支路2PSK信号平均功率谱密度的线性叠加。



(a) 双极性矩形不归零脉冲序列双边功率谱密度



(b) 2PSK 双边功率谱密度



(c) QPSK 双边功率谱密度

在给定信息速率为 R_b 条件下，2PSK及QPSK双边功率谱密度

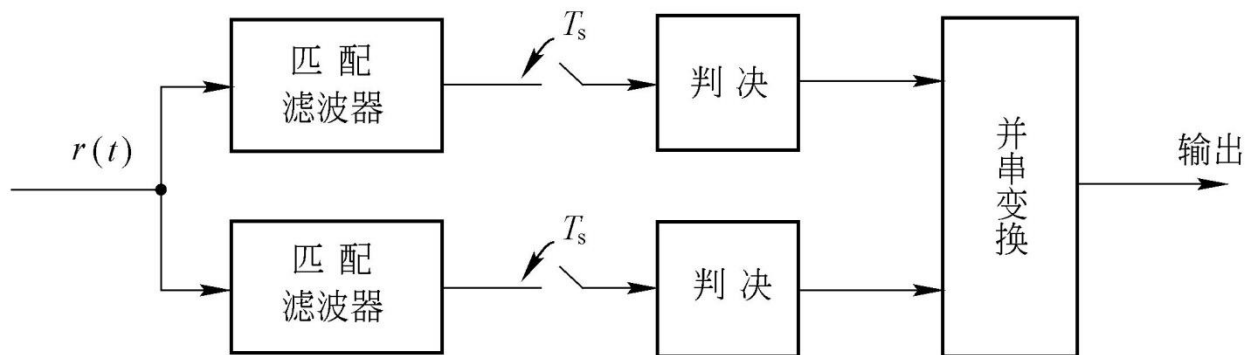
QPSK信号的解调及其平均误比特率



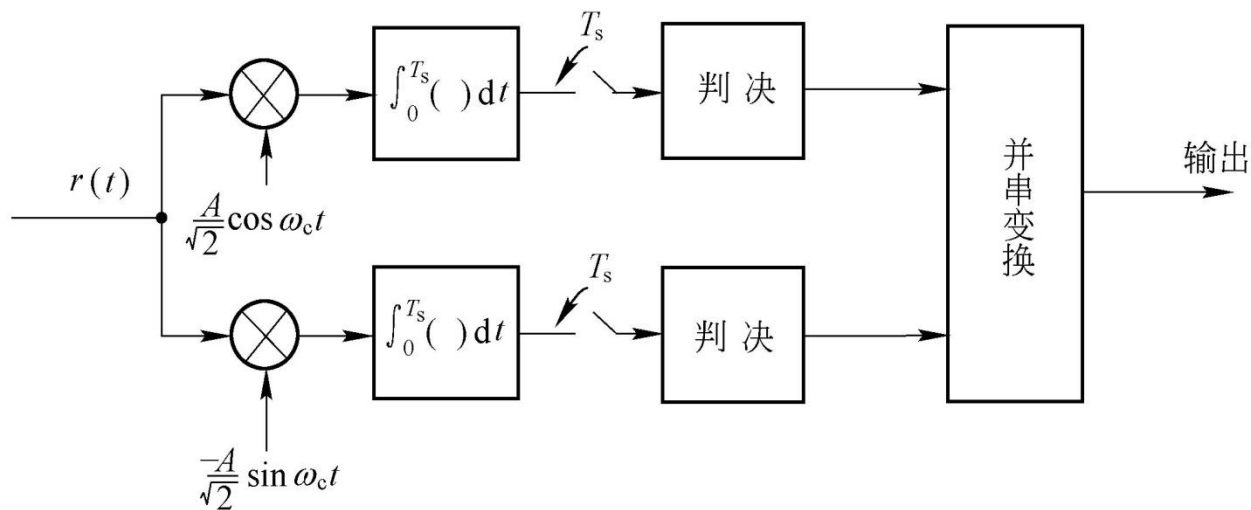
在加性白高斯噪声信道条件下QPSK最佳接收

◆平均误比特率计算公式

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$



(a) QPSK 匹配滤波器最佳接收



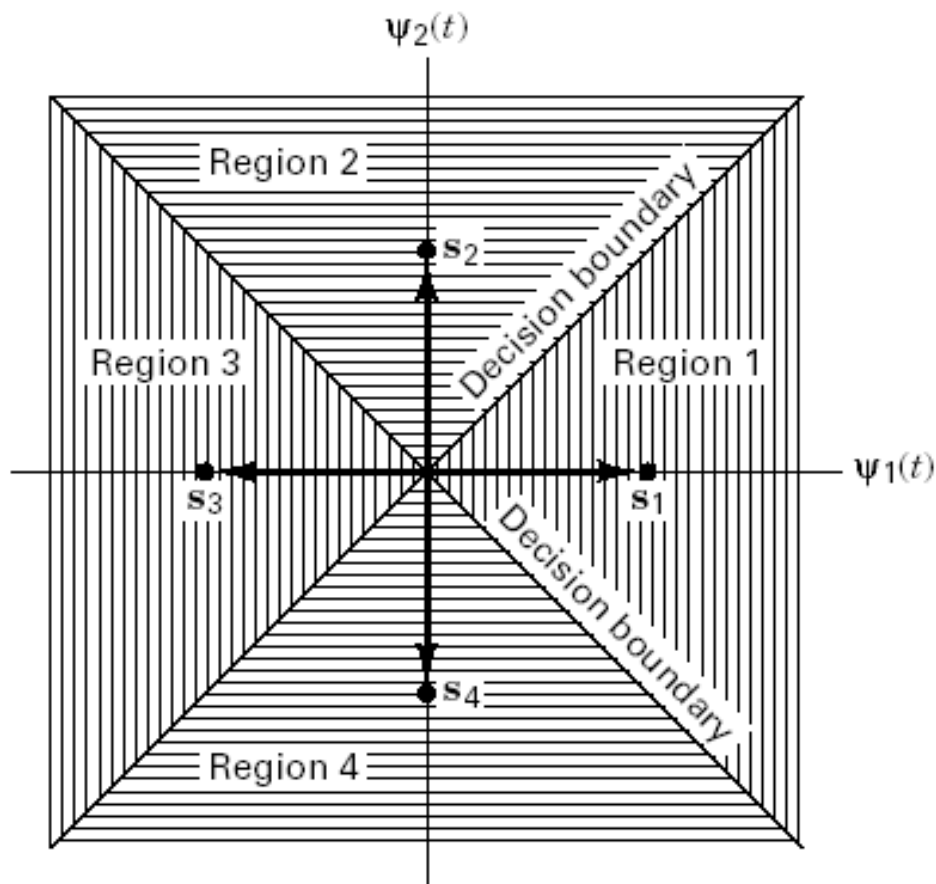
(b) QPSK 相关型解调器最佳接收

QPSK信号的最佳接收框图

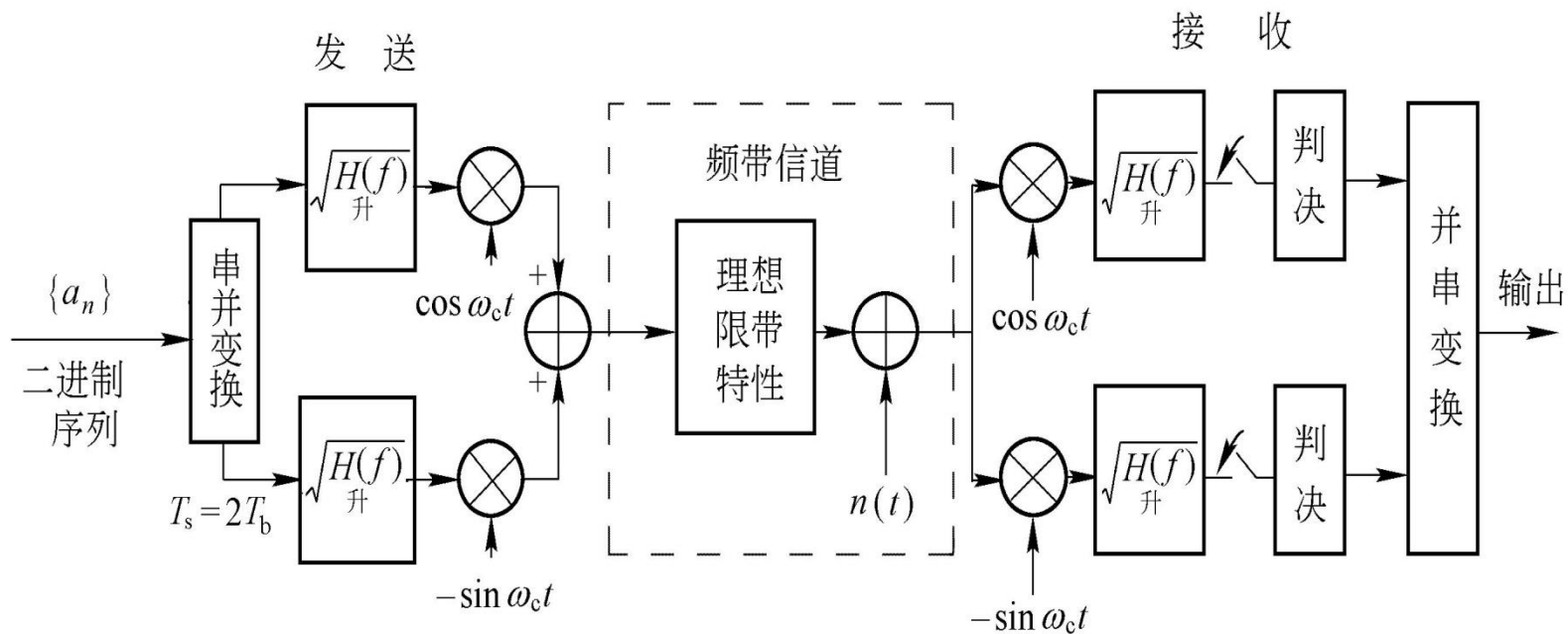
多相相移键控 (MPSK) 及相干检测



例: $M=4$, 4PSK/QPSK信号信号分布及判决区域



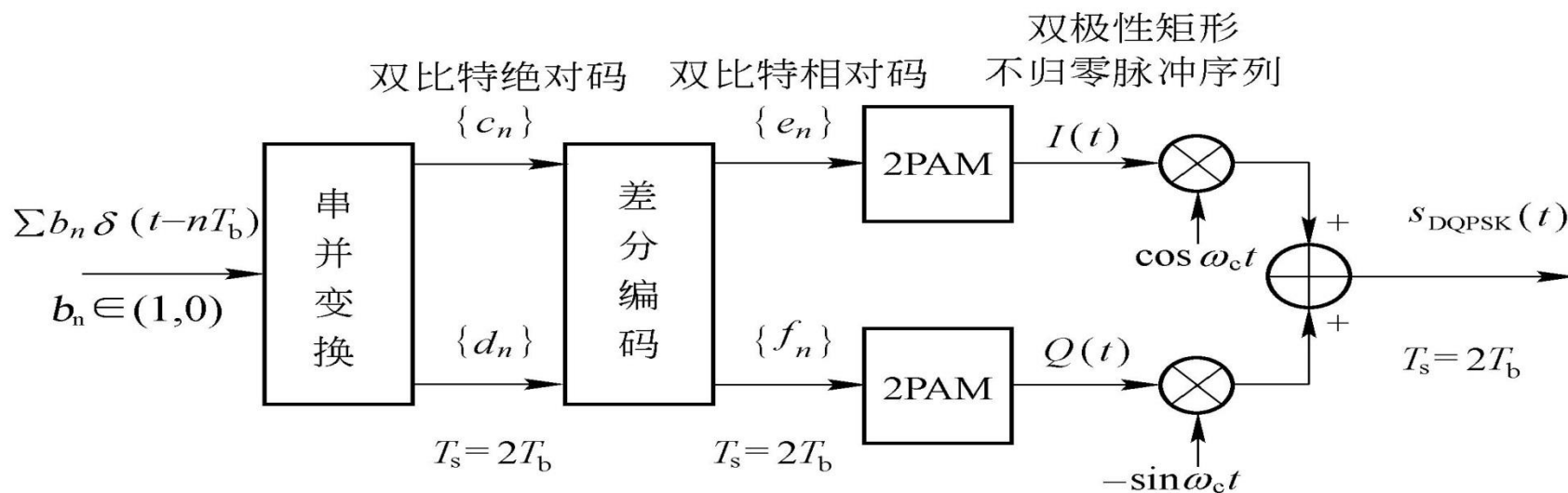
在理想限带及加性白高斯噪声干扰的信道条件下QPSK最佳接收



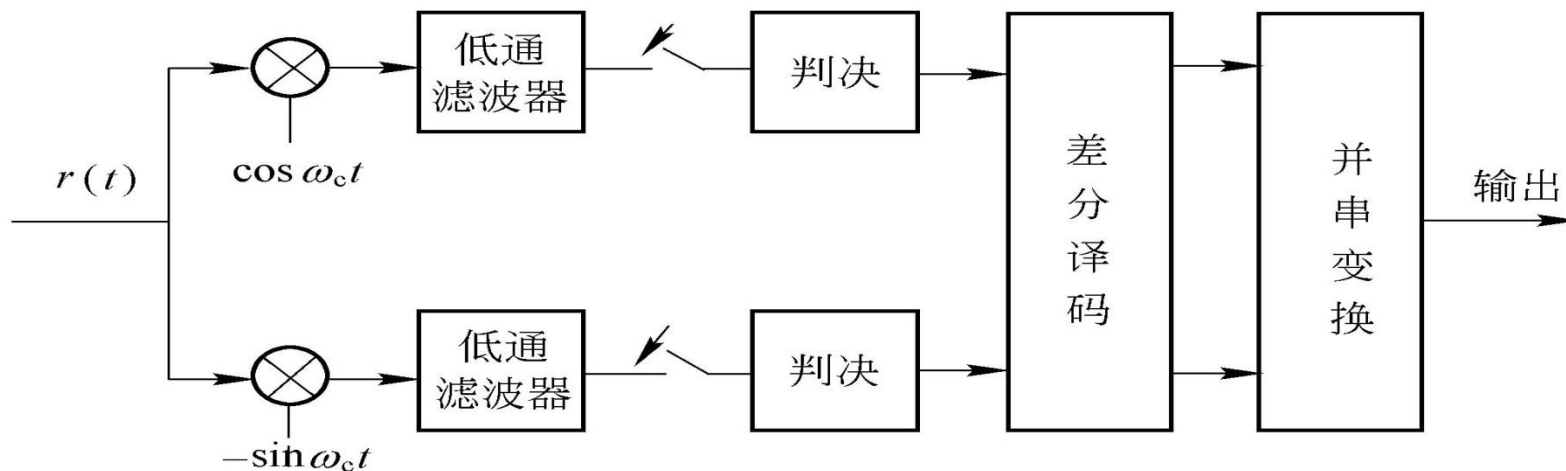
差分四相移相键控(DQPSK)



- ◆采用差分四相移相键控(DQPSK)方案来解决恢复载波的四重相位模糊对相干解调输出有影响的问题，下图为DQPSK信号的产生及其相干解调框图



(a) 产生 DQPSK 信号的原理框图

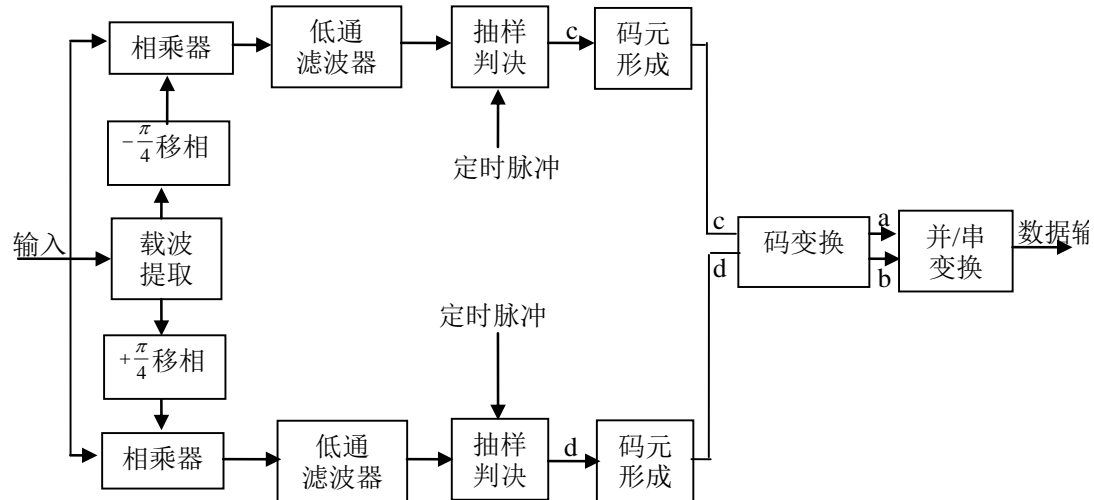


(b) DQPSK 相干解调框图

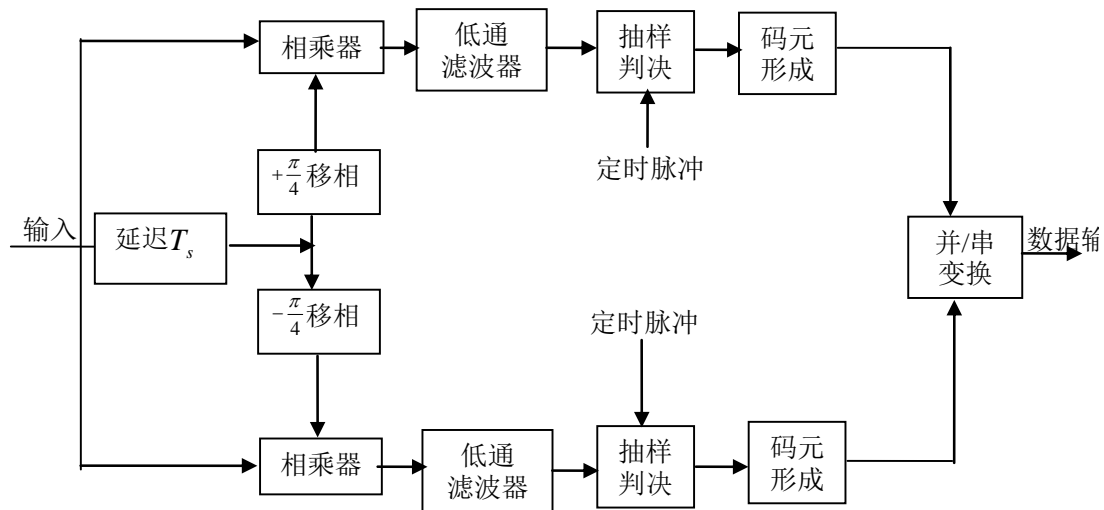


QDPSK码变换的逻辑功能

本时刻到达的ab及所要求的相对相位变化		前一码元的状态			本时刻应出现的码元状态			
a_n	b_n	c_{n-1}	d_{n-1}	θ_{n-1}	c_n	d_n	θ_n	
0	0	0°	0	0	0°	0	0	0°
			1	0	90°	1	0	90°
			1	1	180°	1	1	180°
			0	1	270°	0	1	270°
1	0	90°	0	0	0°	1	0	90°
			1	0	90°	1	1	180°
			1	1	180°	0	1	270°
			0	1	270°	0	0	0°
1	1	180°	0	0	0°	1	1	180°
			1	0	90°	0	1	270°
			1	1	180°	0	0	0°
			0	1	270°	1	0	90°
0	1	270°	0	0	0°	0	1	270°
			1	0	90°	0	0	0°
			1	1	180°	1	0	90°
			0	1	270°	1	1	180°



(a) 极性比较法

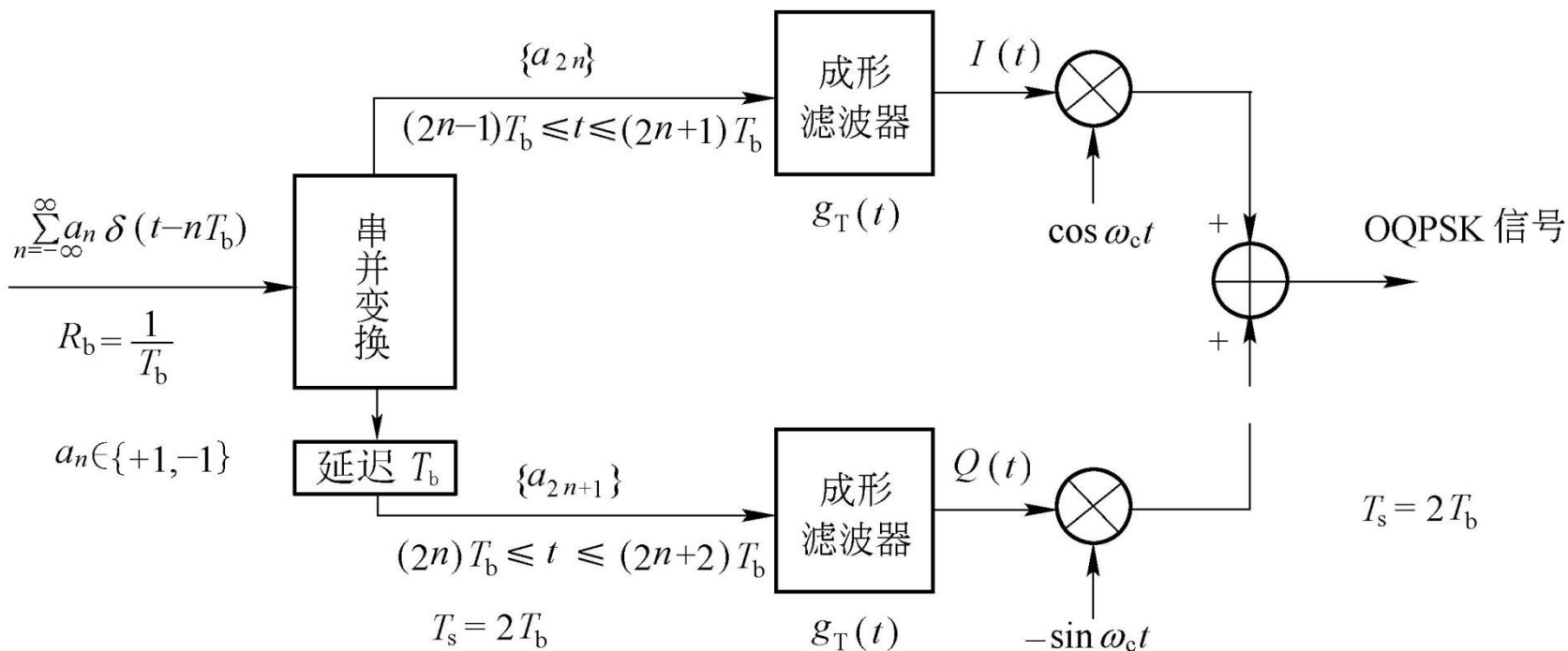


(b) 相位比较法

偏移四相移相键控(OQPSK)



1.OQPSK调制



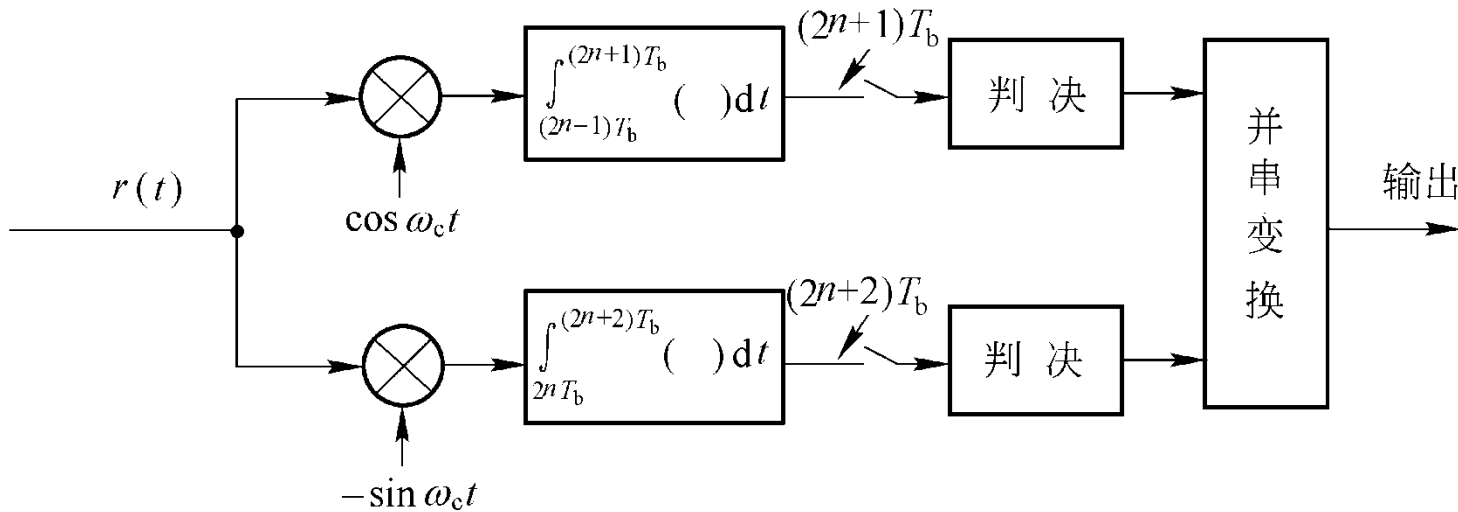
产生OQPSK信号的框图

2.OQPSK信号的平均功率谱密度



◆ OQPSK的功率谱与QPSK的相同。

OQPSK的最佳解调及其误比特率



OQPSK最佳接收框图

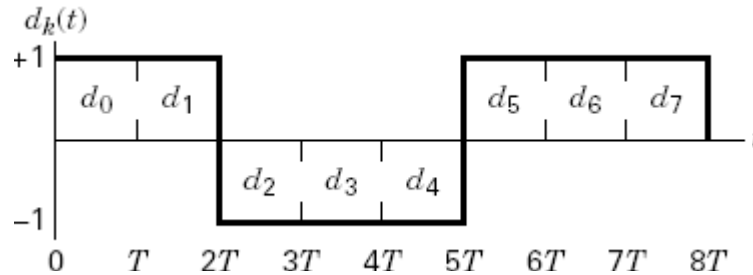
OQPSK最佳接收的平均误比特率与QPSK的相同

偏移QPSK/OQPSK (Offset QPSK)

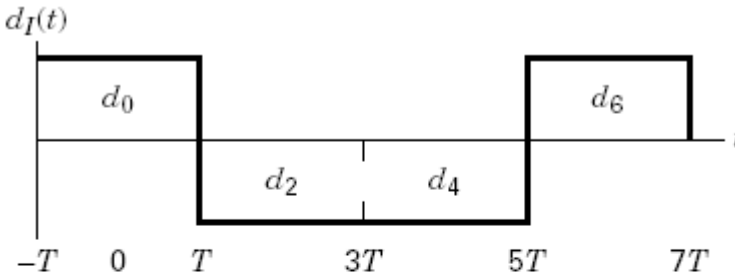


OQPSK与QPSK信号的区别在于两分割后的基带波形对齐方式不同

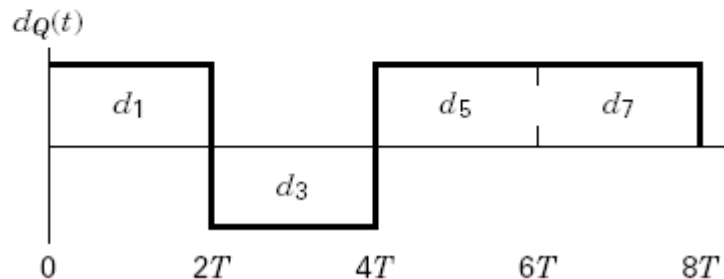
数据源 $d_k(t)$:



同步流 $d_I(t)$:



正交流 $d_Q(t)$:

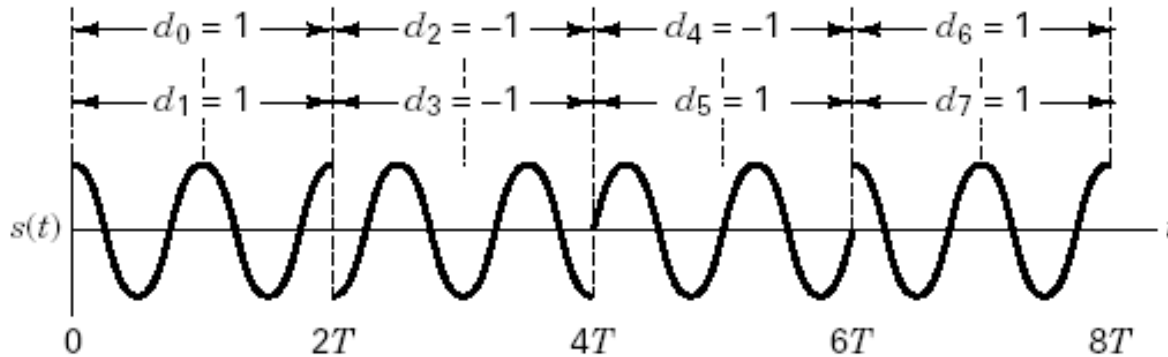


(2) 偏移QPSK/OQPSK

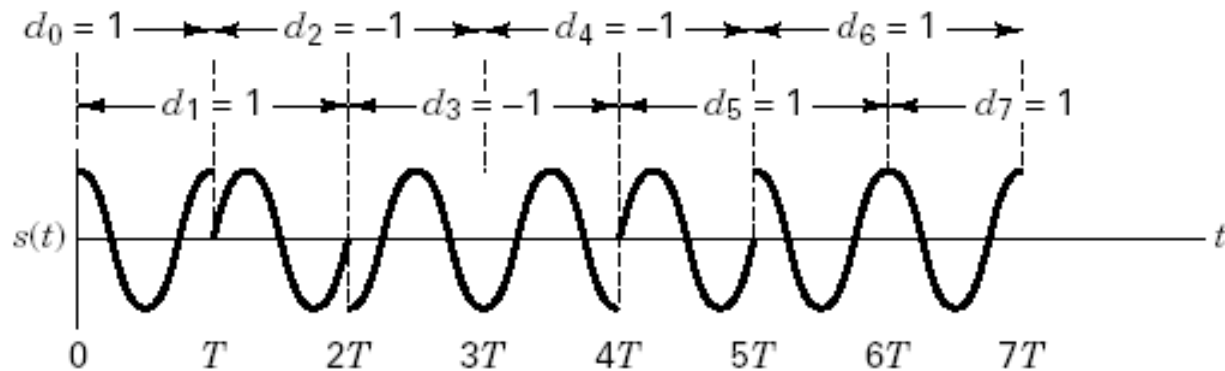


OQPSK与QPSK信号的信号波形

QPSK:



OQPSK:



OQPSK信号的相位变化限于 0° 、 $+90^\circ$ 和 -90° ,相对幅度跳变为QPSK的 $1/2$, 有利于减少包络凹陷和带外高频分量。

QPSK/OQPSK的Matlab代码



```
for PL=1:100 %输入100段N_num个码字的波形，为了使功率谱密度看起来更加平滑，  
            %可以取这100段信号功率谱密度的平均
```

```
    d1 = sign(randn(1,N_num));  
    d2 = sign(randn(1,N_num));  
    gt = ones(1,fc*N_sample);
```

```
    %QPSK调制
```

```
    s1 = sigexpand(d1,fc*N_sample);  
    s2 = sigexpand(d2,fc*N_sample);  
    b1 = conv(s1,gt);  
    b2 = conv(s2,gt);  
    s1 = b1(1:length(s1));  
    s2 = b2(1:length(s2));
```

```
    st_qpsk = s1.*cos(2*pi*fc*t) - s2.*sin(2*pi*fc*t);
```

```
    s2_delay= [-ones(1,N_sample*fc/2) s2(1:end-N_sample*fc/2)];  
    st_oqpsk= s1.*cos(2*pi*fc*t) - s2_delay.*sin(2*pi*fc*t);
```

```
    %经过带通后，再经过非线性电路
```

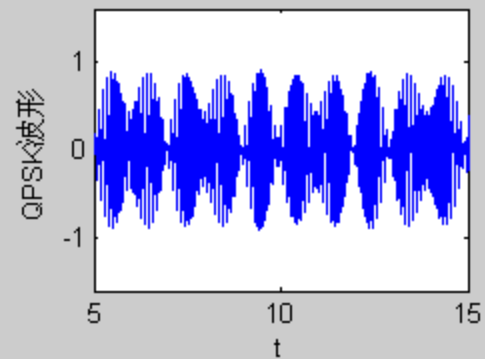
```
    [f y1f] = T2F(t,st_qpsk);  
    [f y2f] = T2F(t,st_oqpsk);  
    [t y1] = bpf(f,y1f,fc-1/Ts,fc+1/Ts);  
    [t y2] = bpf(f,y2f,fc-1/Ts,fc+1/Ts);
```

```
    %经过非线性电路
```

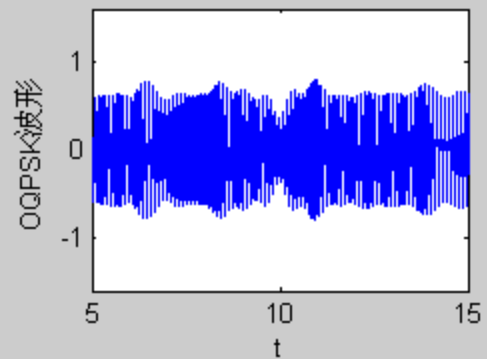
```
    y1 = 1.5*tanh(2*y1);  
    y2 = 1.5*tanh(2*y2);  
    [f y1f] = T2F(t,y1);  
    [f y2f] = T2F(t,y2);  
    py1f = py1f + abs(y1f).^2/T; %QPSK不同段信号功率谱密度相加  
    py2f = py2f + abs(y2f).^2/T; %OQPSK不同段信号功率谱密度相加
```

```
end
```

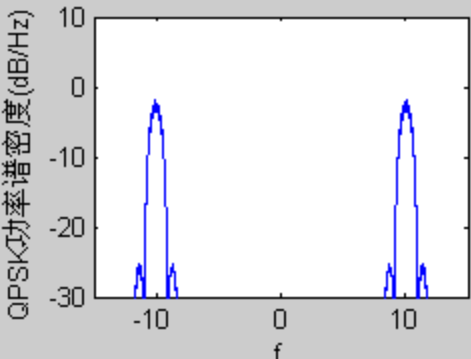
经过带通后的波形



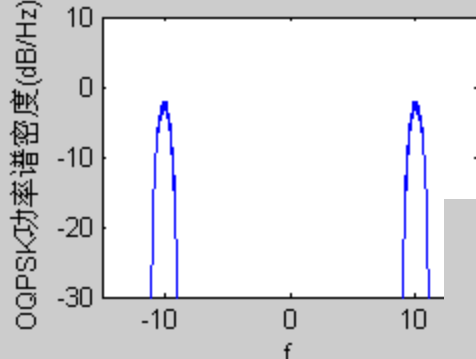
经过带通后的波形



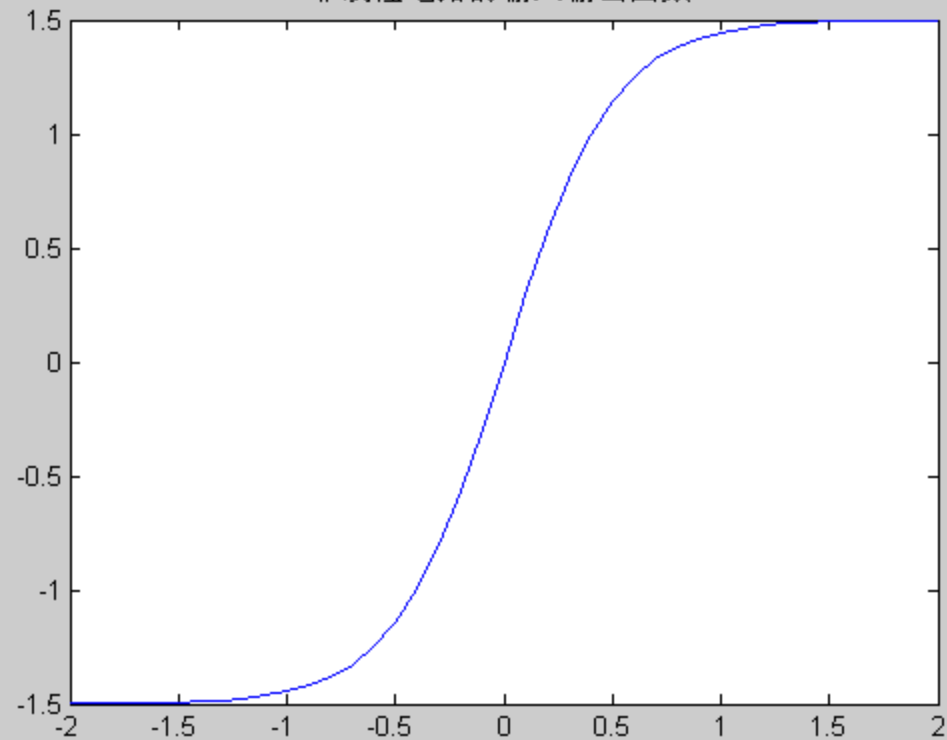
经过非线性电路后的功率谱密度



经过非线性电路后的功率谱密度



非线性电路的输入输出函数

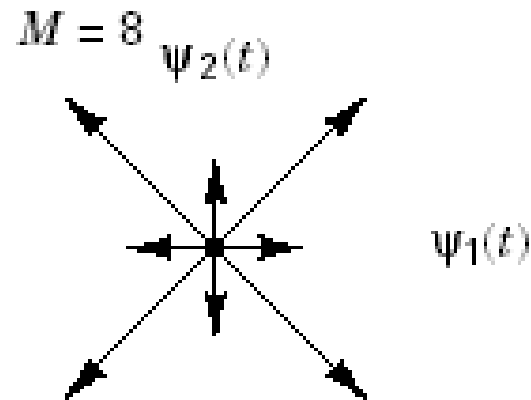
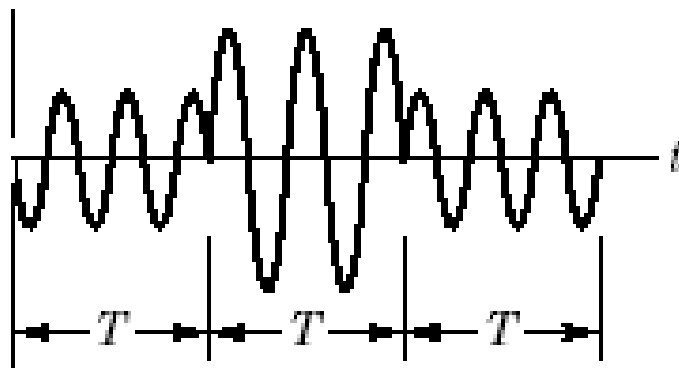


幅度相位联合键控(APK)



$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_i(t)}{T}} \cos [\omega_0 t + \phi_i(t)] \quad \begin{array}{l} 0 \leq t \leq T \\ i = 1, \dots, M \end{array}$$

例:



正交幅度调制



1. MQAM信号的矢量表示及功率谱密度

◆ MQAM信号波形的二维矢量表示

$$s_i = [s_{i1}, s_{i2}] = [\sqrt{E_g / 2} a_{i_c}, \sqrt{E_g / 2} a_{i_s}] \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Quadrature Amplitude Modulation



◆ **QAM is a combination of ASK and PSK**

➤ **Two different signals sent simultaneously on the same carrier frequency**

$$s(t) = d_1(t)\cos 2\pi f_c t + d_2(t)\sin 2\pi f_c t$$

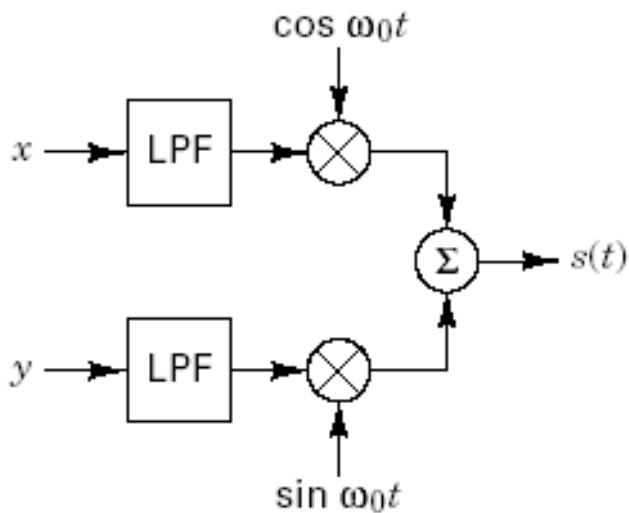
高效带宽调制



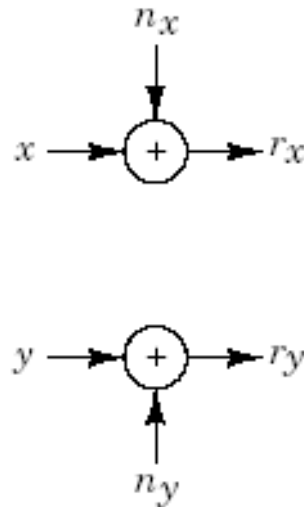
QAM(Quadrature Amplitude Modulation)

MQAM: M进制正交振幅调制

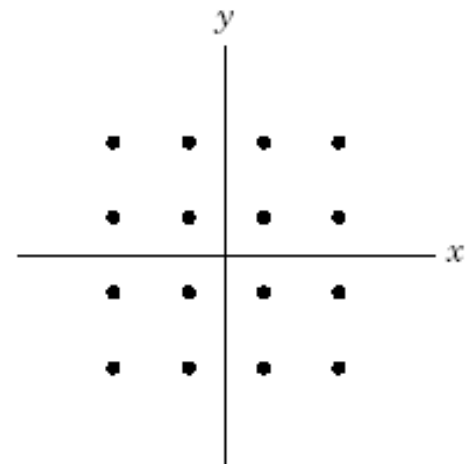
调制器结构

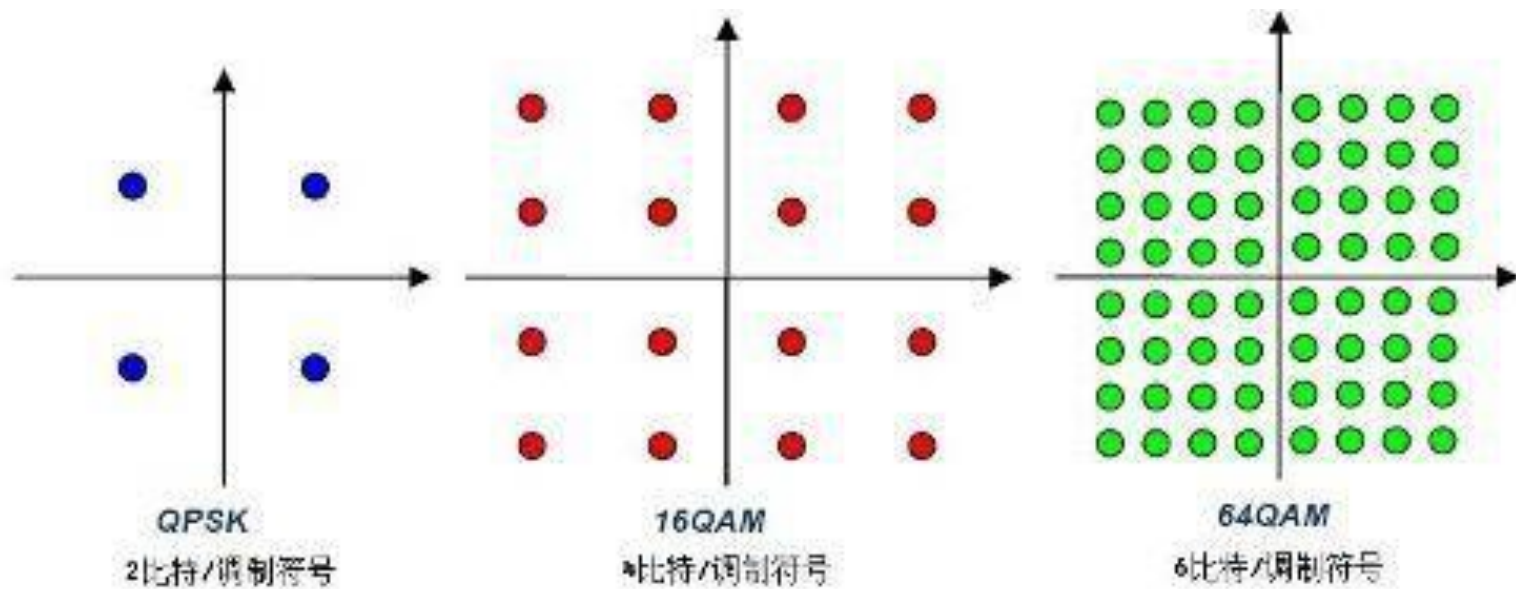


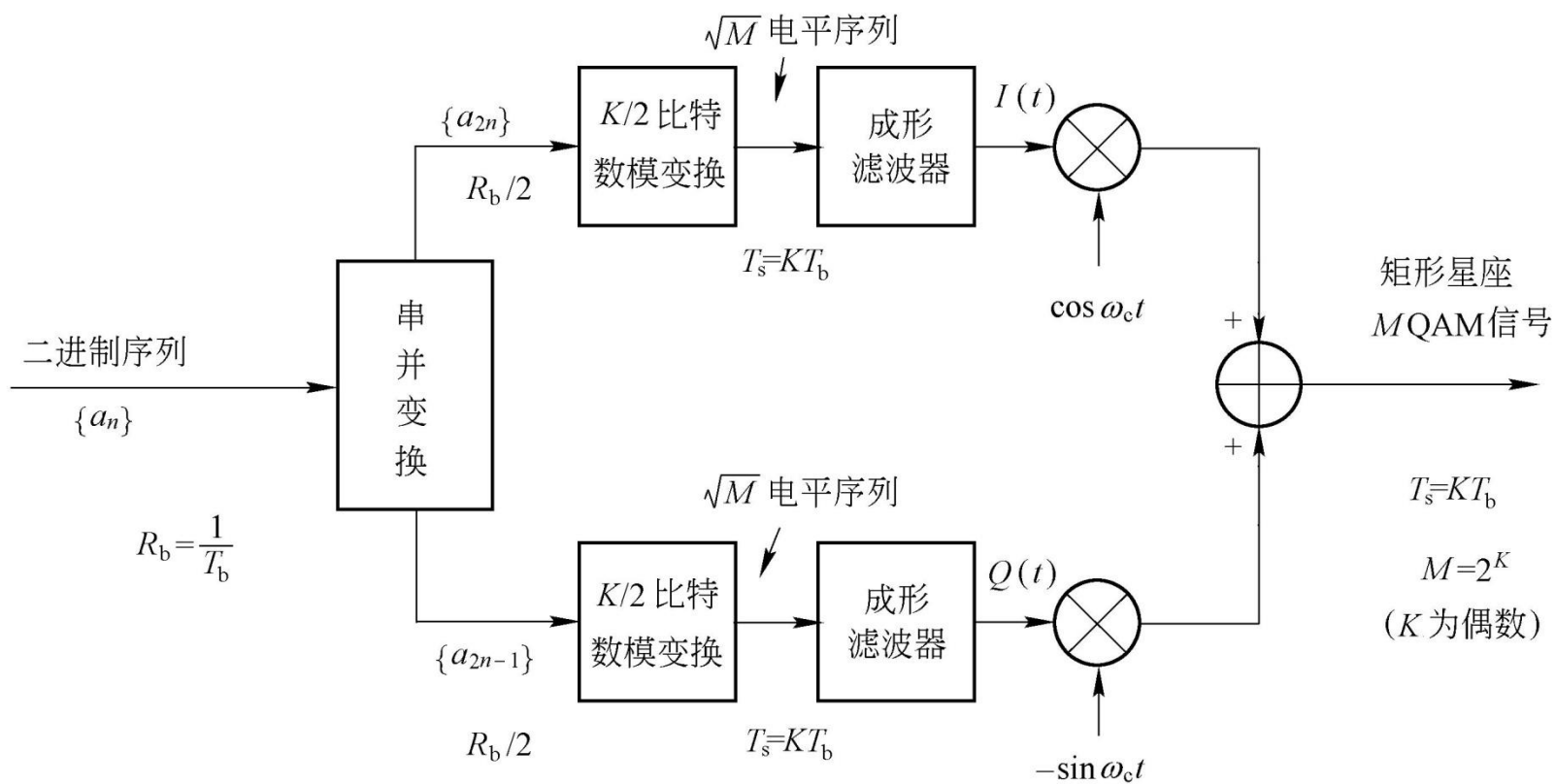
信道模型



16QAM







矩形星座MQAM信号的产生

多进制正交幅度调制(MQAM)解调系统



(MQAM调制解调系统)

与MASK方式类似，MQAM是对基函数进行幅度调制；但MQAM同时调制两个正交的基函数，有更高的效率。

与MPSK方式类似，MQAM是一种利用两个正交的基函数的调制解调系统；但MQAM可更有效利用IQ平面信号空间。

MQAM信号的表达式

$$s_i(t) = a_{jc} g_T(t) \cos \omega_c t - a_{ks} g_T(t) \sin \omega_c t$$

$$j = 1, 2, \dots, \sqrt{M}; k = 1, 2, \dots, \sqrt{M}; i = j \cdot k; i = 1, 2, \dots, M$$

式中， $g_T(t)$ 是基带信号的脉冲波形函数；幅度加权值

$$a_{jc} \in 2j-1-\sqrt{M}, j = 1, 2, \dots, \sqrt{M}; a_{ks} \in 2k-1-\sqrt{M}, k = 1, 2, \dots, \sqrt{M}$$

MQAM调制解调系统(续)



若定义两个正交的基函数

$$\Psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g_T(t) \cos \omega_c t \quad \Psi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_g}} g_T(t) \sin \omega_c t$$

则MQAM信号可表示为

$$s_i(t) = s_{ij} \Psi_1(t) + s_{ik} \Psi_2(t), \quad i = 1, 2, \dots, M$$

式中

$$s_{ij} = \int_0^{T_s} s_i(t) \Psi_1(t) dt = a_{jc} \sqrt{\frac{E_g}{2}}, \quad j = 1, 2, \dots, \sqrt{M}$$

$$s_{ik} = \int_0^{T_s} s_i(t) \Psi_2(t) dt = a_{ks} \sqrt{\frac{E_g}{2}}, \quad k = 1, 2, \dots, \sqrt{M}$$

每个符号与二维向量的对应关系

$$s_i(t) \leftrightarrow \vec{s}_i = (s_{ij}, s_{ik}) = \left(a_{jc} \sqrt{\frac{E_g}{2}}, a_{ks} \sqrt{\frac{E_g}{2}} \right) \quad i = 1, 2, \dots, M$$

MQAM调制解调系统(续)



MQAM中任两符号在信号空间中的欧氏距离

$$d_{im} = \left((s_{ij} - s_{mj'})^2 + (s_{ik} - s_{mk'})^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{E_g}{2}} \left((a_{jc} - a_{j'c})^2 + (a_{ks} - a_{k's})^2 \right)^{1/2}$$

$$j, j' = 1, 2, \dots, \sqrt{M}; \quad k, k' = 1, 2, \dots, \sqrt{M}; \quad i = j \cdot k, m = j' \cdot k'; \quad i, m = 1, 2, \dots, M$$

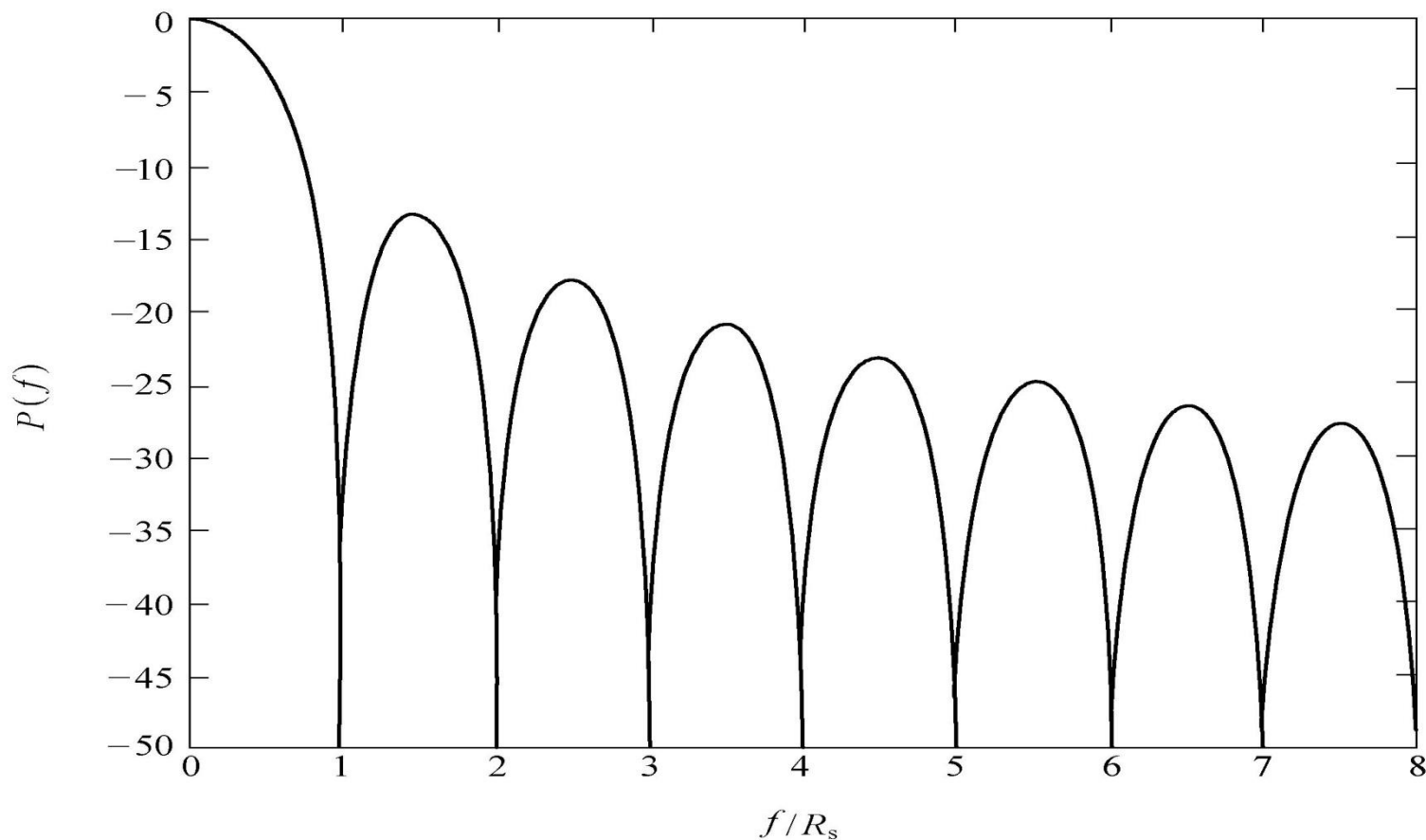
由此可导出两符号间的最小距离

$$\begin{aligned} d_{\min} &= \min d_{im} = \sqrt{\frac{E_g}{2}} \left((a_{jc} - a_{j'c})^2 + (a_{ks} - a_{k's})^2 \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{E_g}{2}} \left(\left((2j-1-\sqrt{M}) - (2j-1-\sqrt{M}) \right)^2 + \left((2j-1-\sqrt{M}) - (2(j+1)-1-\sqrt{M}) \right)^2 \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{2E_g} \end{aligned}$$

式中 E_g 是符号脉冲波形信号 $g_T(t)$ 的能量。

MQAM信号的功率谱

MQAM信号可看作两个MASK信号的组合，因此其功率谱与MASK有相同的特性。



MQAM信号的复包络的平均功率谱密度（单边功率谱）



◆MQAM功率谱主瓣宽度为 $2R_s$ ， $R_s=R_b/K$ 。

在给定信息速率 R_b 时，随着 M 的增加，

MQAM的功率谱主瓣宽度变窄，使得频带

信道的频带利用率提高。



◆ 数字调制信号的频带利用率：所传输的信

息速率与已调信号频带宽度 B 之比。

$$\frac{R_b}{B} = \frac{R_b}{2R_s} = \frac{R_b}{2 \frac{R_b}{\log_2 M}} = \frac{\log_2 M}{2} \text{ bit} \cdot \text{s}^{-1} / \text{Hz}$$

QAM(续)



MQAM信号的频带利用率R/W

(1) 当调制信号为理想基带频谱对应的信号时

$$\frac{R}{W} = \log_2 M \quad (b/s/Hz)$$

(2) 当调制信号为 γ 滚降频谱特性对应的信号时

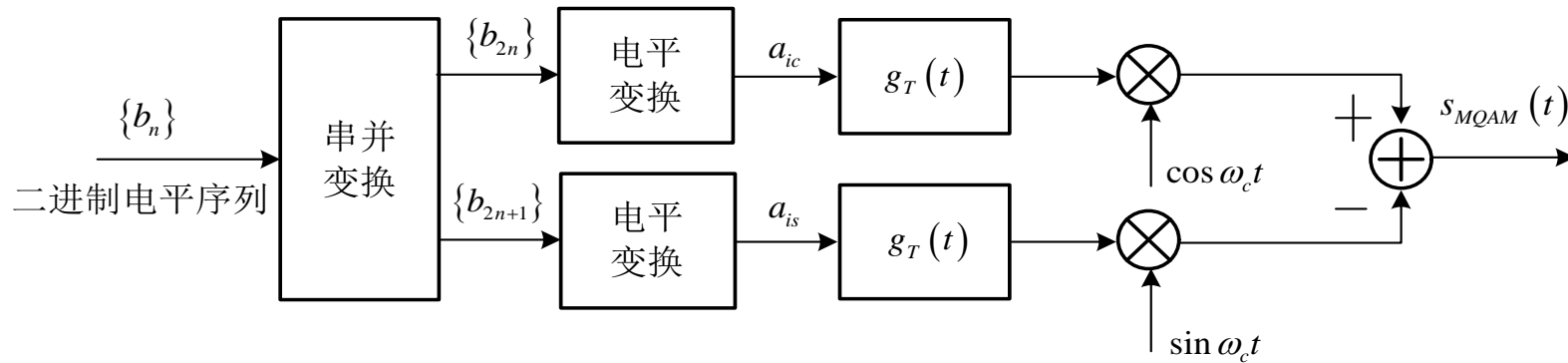
$$\frac{R}{W} = \frac{1}{1+\gamma} \log_2 M \quad (b/s/Hz)$$

一般地，已调信号的频带利用率为基带信号时的1/2。

MQAM调制解调系统(续)



MQAM信号的调制



- (1) 将二进制序列分为两路序列；
- (2) 建立二进制数组与 \sqrt{M} 个不同电平间的映射关系；
- (3) 生成相应电平幅度加权的符号脉冲波形信号；
- (4) 分别对两个正交的载波(基函数)进行幅度调制；

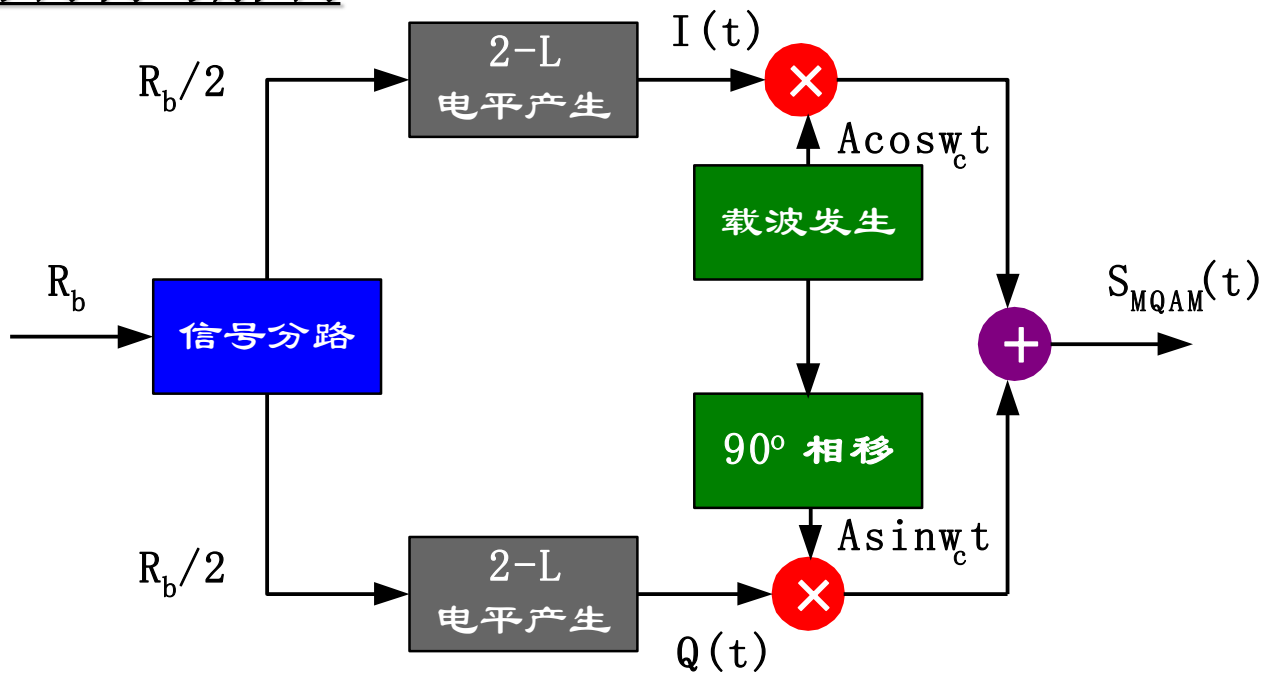
QAM(续)



若MQAM信MPSK信号有相同的平均功率，则信号间的最小距离 $d_{MQAM,min}$ 可提高为两信号峰值功率相同时的 $k^{1/2}$ 倍。

MQAM信号的调制与解调

调制：

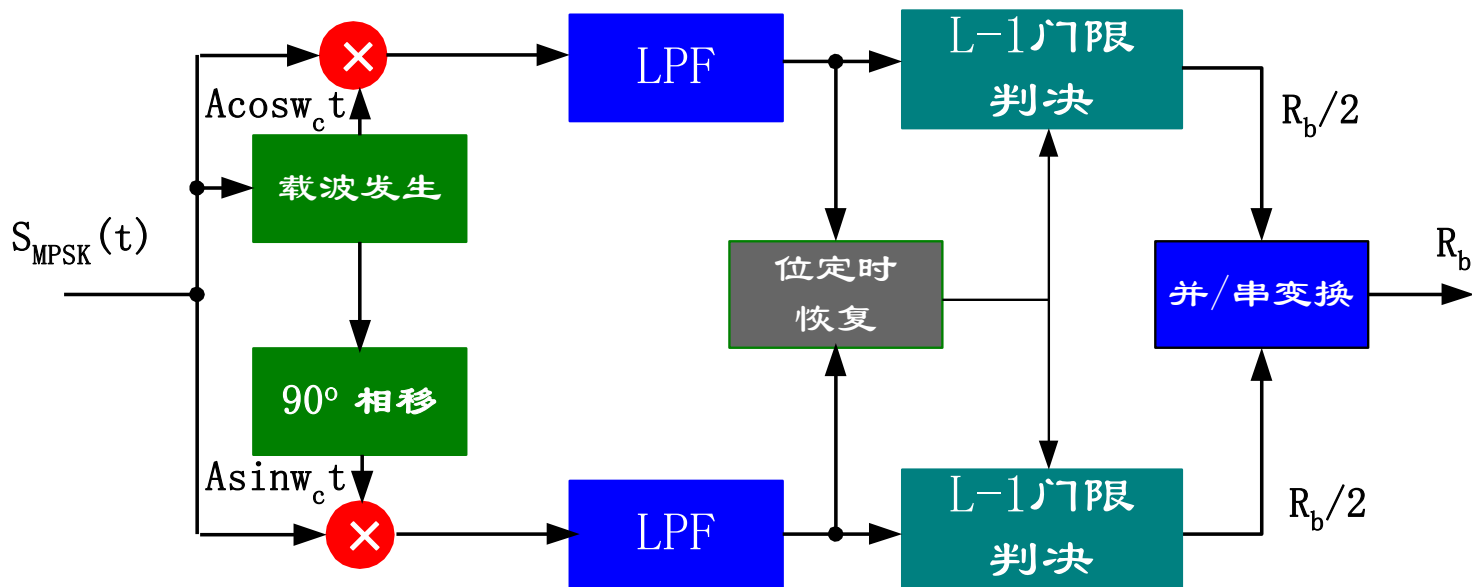


QAM(续)



MQAM信号的调制与解调

解调:

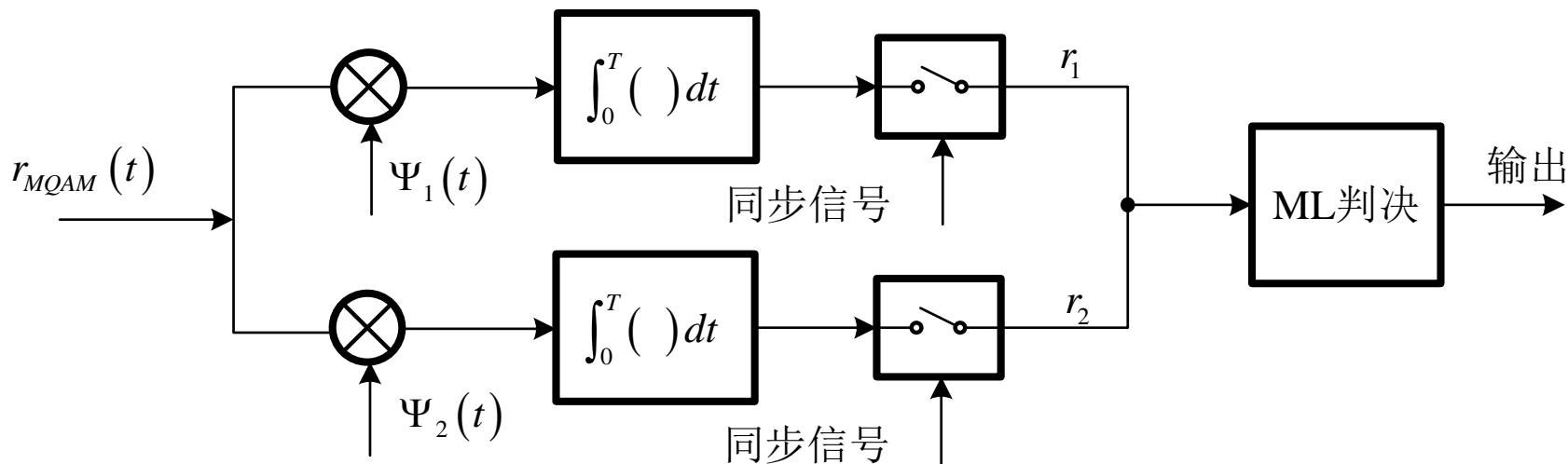


MQAM调制解调系统(续)



MQAM信号的最佳接收

接收机的系统结构



解调得到的两路信号分别为

$$r_1 = s_{i1} + n_1$$

$$r_2 = s_{i2} + n_2$$

其中 n_1, n_2 均为均值为0, 方差为 $\sigma^2 = N_0/2$ 高斯噪声。

MQAM调制解调系统(续)



MQAM信号的最大似然判决准则

$$\hat{s} = \arg \max_{s_i \in \{S\}} p(r | s_i) = \arg \min_{s_i \in \{S\}} \left((r_1 - s_{i1})^2 + (r_2 - s_{i2})^2 \right)$$

即在符号集中取满足上述系数取值条件的符号作为判决输出。

QAM(续)



MQAM峰值功率与平均功率之比

记： $L = \sqrt{M}$

MQAM信号的峰值功率（利用勾股定理求斜边）：

$$\left(\frac{L-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{L-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(L-1)^2$$

同理，MQAM信号的平均功率：

$$\frac{1}{L/2} \sum_{i=1}^{L/2} \left[\left(\frac{2i-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2i-1}{2}\right)^2 \right] = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L/2} (2i-1)^2$$

MQAM峰值功率与平均功率之比

$$k = \frac{\frac{1}{2}(L-1)^2}{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L/2} (2i-1)^2} = \frac{L(L-1)^2}{2 \sum_{i=1}^{L/2} (2i-1)^2}$$

QAM(续)



MQAM信号的误符号率 P_E

- ◆ MQAM解调系统仍是一种线性系统，解调后的叠加的噪声仍然为高斯白噪声
- ◆ 同相和正交路信号电平数为： $L = \sqrt{M}$
- ◆ 利用多电平基带信号性能分析方法，参见《现代通信原理》，对理想频带利用率的基带系统（ $R_s = 2B$ ），误符号率为：

$$\begin{aligned}
 P_{E, MQAM} &= \frac{2(L-1)}{L} Q\left(\sqrt{\frac{3}{L^2-1} \frac{S}{N}}\right) = \frac{2(L-1)}{L} Q\left(\sqrt{\frac{3}{L^2-1} \frac{E_b R_b}{n_0 B}}\right) = \\
 &= \frac{2(L-1)}{L} Q\left(\sqrt{\frac{3}{L^2-1} \frac{E_b R_s \log_2 L}{n_0 B}}\right) = \frac{2(L-1)}{L} Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 L}{L^2-1} \frac{E_b}{n_0}}\right)
 \end{aligned}$$

MQAM调制解调系统(续)



MQAM信号的误码性能分析

因MQAM的正交信号中的单独一路信号是一 \sqrt{M} 进制的MPSK信号，其的误码率为

$$P_{\sqrt{M},e} = \frac{2(\sqrt{M}-1)}{\sqrt{M}} Q \left(\sqrt{\frac{6E_b \log_2 \sqrt{M}}{((\sqrt{M})^2 - 1)N_0}} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left(\sqrt{\frac{3E_b \log_2 M}{(M-1)N_0}} \right)$$

因此MQAM信号可正确接收的概率

$$P_c = \left(1 - P_{\sqrt{M},e} \right)^2$$

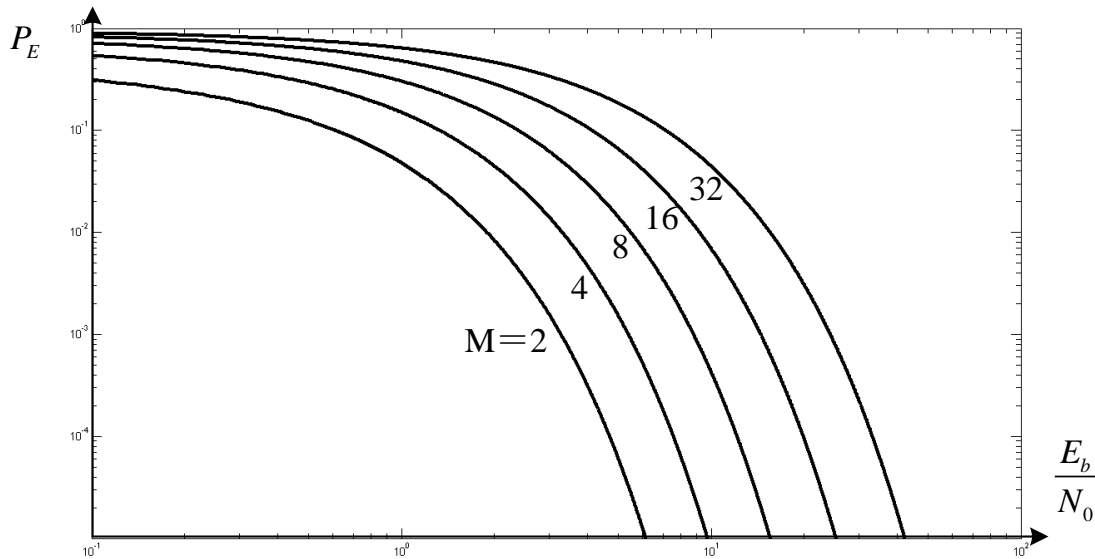
MQAM信号的误码率

$$P_E = 1 - P_c = 1 - \left(1 - P_{\sqrt{M},e} \right)^2$$

MQAM调制解调系统(续)



MQAM信号的误码特性曲线



对同样的 $\frac{E_b}{N_0}$ ，其MQAM系统的误码性能随着M的增大而劣化。

在MQAM符号空间中符号间的距离不是常数，因此可通过格雷码编码来提高系统的误比特率性能。此时有

$$P_b = \frac{P_E}{k} = \frac{P_E}{\log_2 M}$$

QAM(续)



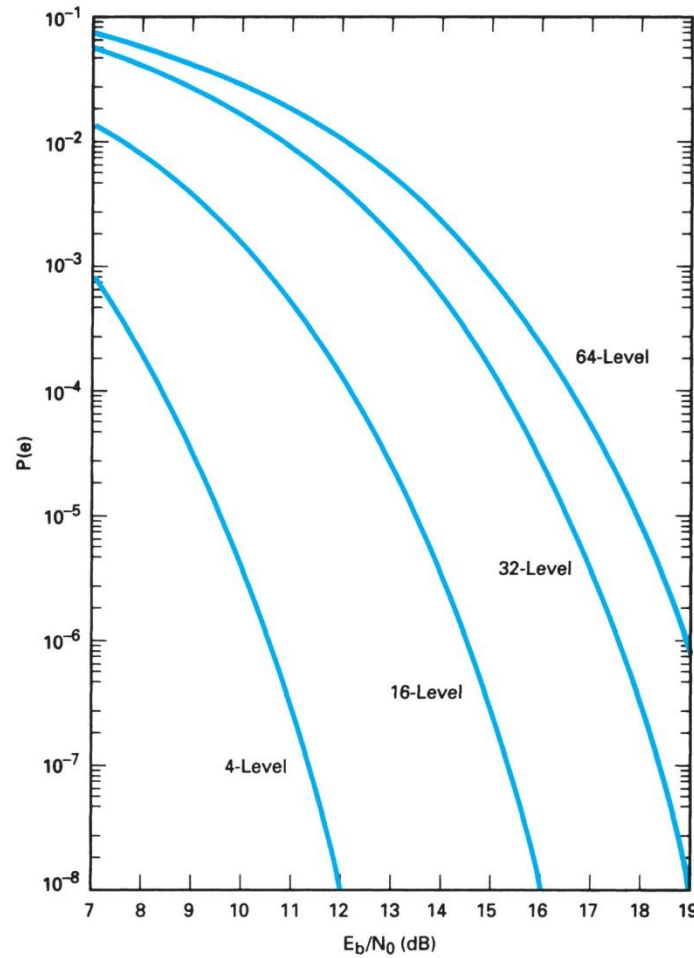
MQAM信号的误比特率 P_B

- ◆ 设采用格雷码编码使相邻信号对应的码组点间只有1比特的变化，则误比特率为：

$$P_B = \frac{1}{\log_2 L} P_{E, MQAM} = \frac{2(1-L^{-1})}{\log_2 L} Q \left(\sqrt{\left(\frac{3 \log_2 L}{L^2 - 1} \right) \frac{2E_b}{N_0}} \right)$$

- ◆ 由带宽效率面可见，在多种调制解调系统中，MQAM系统的性能最接近香农信道容量的极限。

Error rates of QAM modulation systems

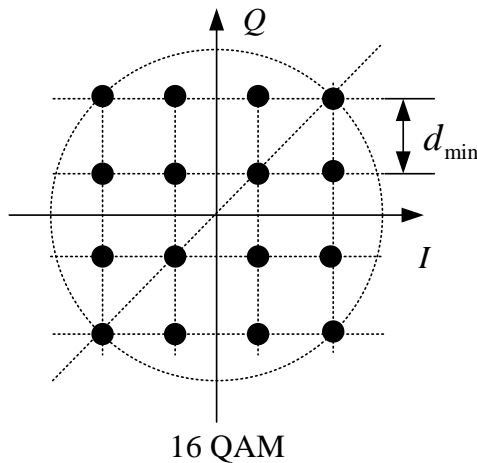
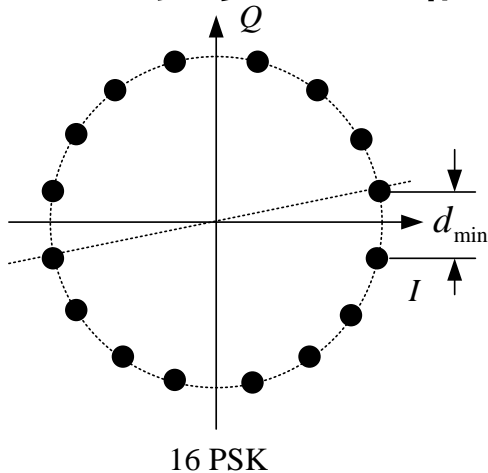


MQAM调制解调系统(续)



MQAM与MPSK系统的抗噪声干扰性能比较

M=16时的MPSK信号与MQAM信号的星座图



$$d_{16PSK, \min} < d_{16QAM, \min}$$

MPSK信号星座点间的最小距离

$$d_{16PSK, \min} = 2 \sin\left(\frac{2\pi}{2 \times 16}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{16}\right) = 0.39$$

MQAM信号星座点间的最小距离

$$d_{16QAM, \min} = \frac{1}{3} \times 2 \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0.47$$

MQAM调制解调系统(续)



一般情况下的MPSK信号星座点距离

$$d_{MPSK, \min} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)$$

一般情况下矩形星座点分布结构的MQAM信号星座点距离

$$d_{MQAM, \min} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{M} - 1}$$

一般地有

$$d_{MPSK, \min} < d_{MQAM, \min}$$

即通常MQAM比MPSK有更好的抗噪声干扰的性能。

QAM(续)



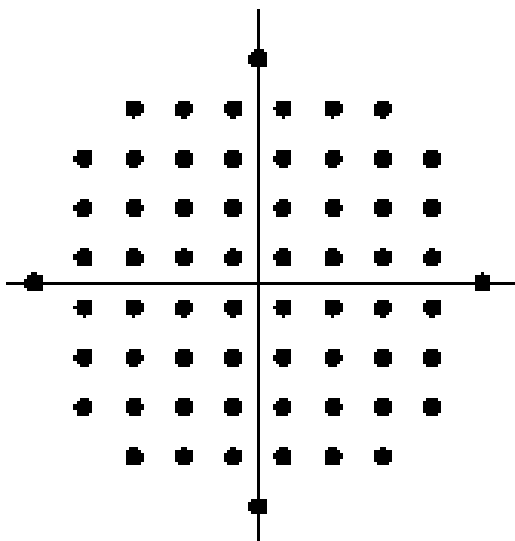
星座图的形状

通常取： $M=2^k$ ，当

k 为偶数时

星座图为“矩形”

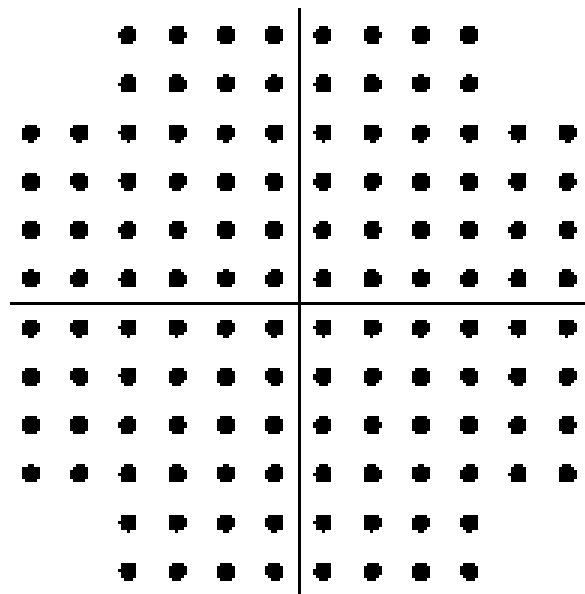
$k = 6$



k 为奇数时

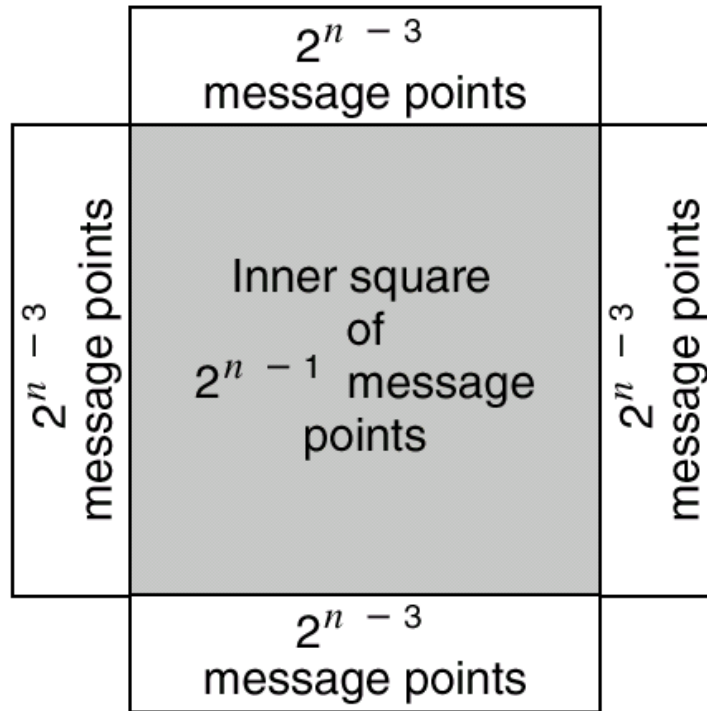
星座图为“十字形”

$k = 7$

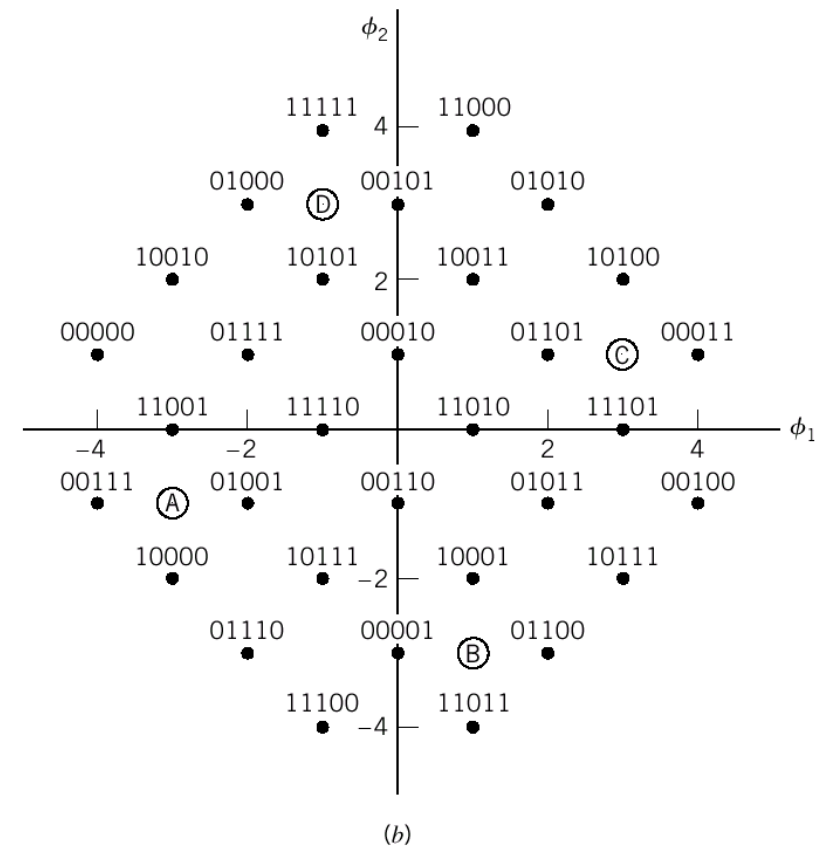
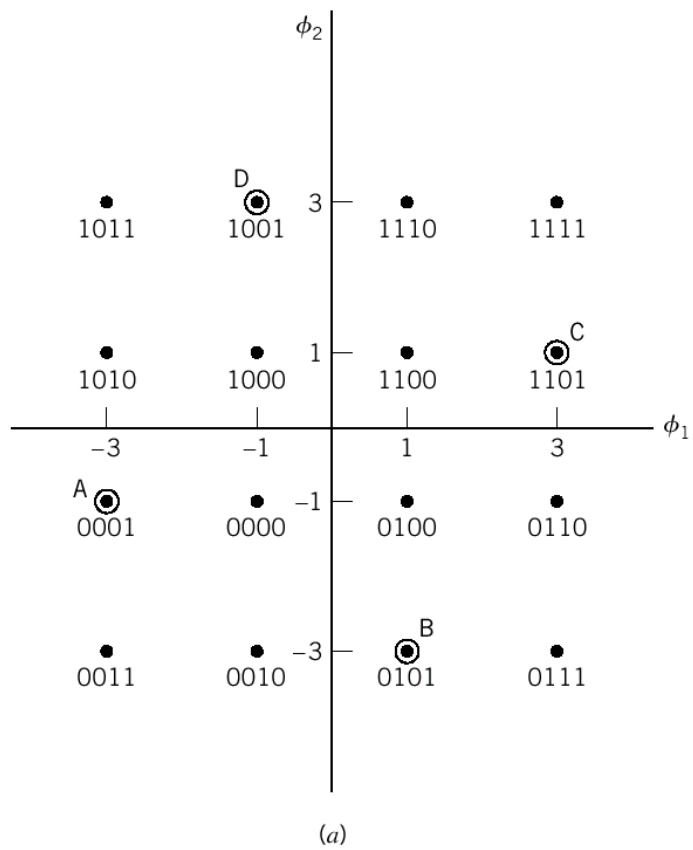




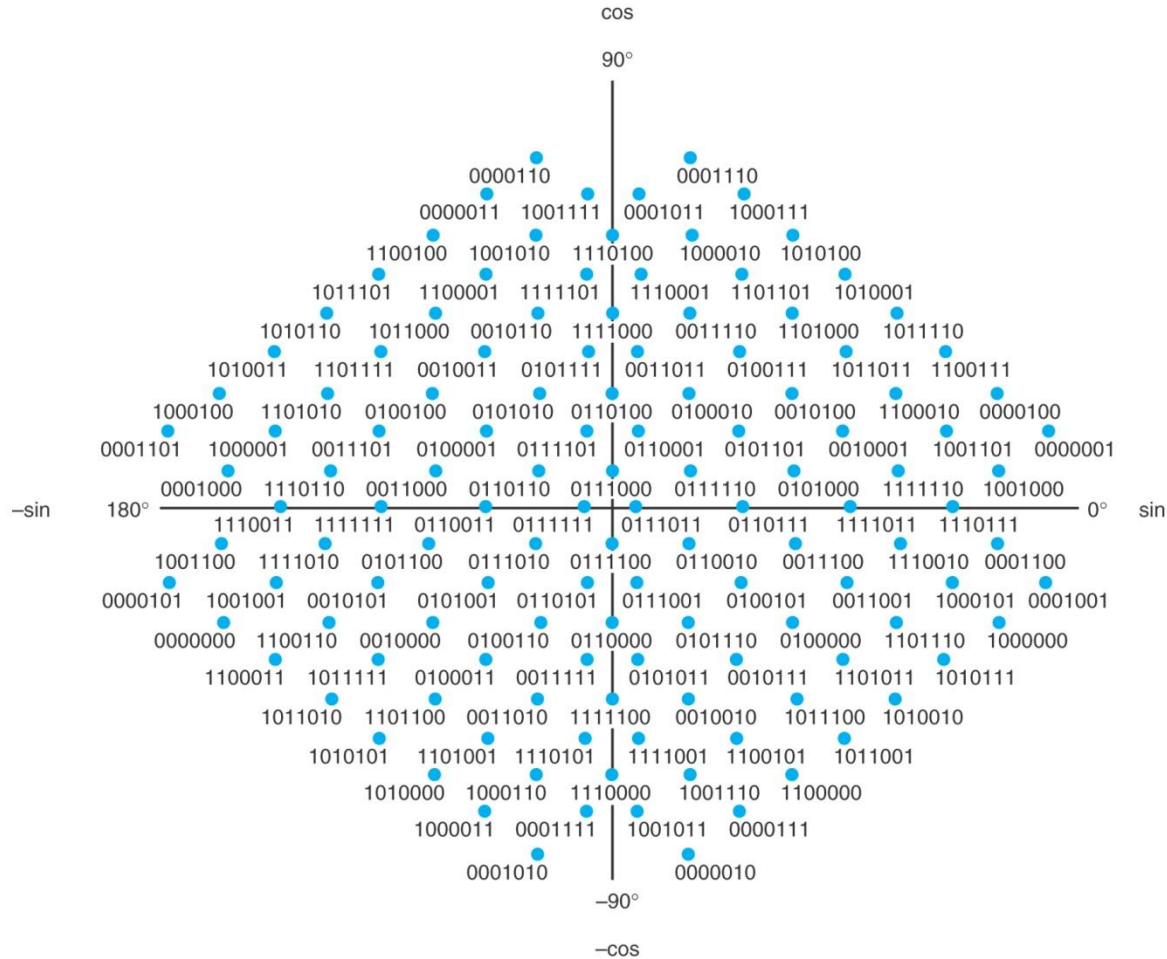
Illustrating how a square QAM constellation can be expanded to form a QAM cross-constellation.

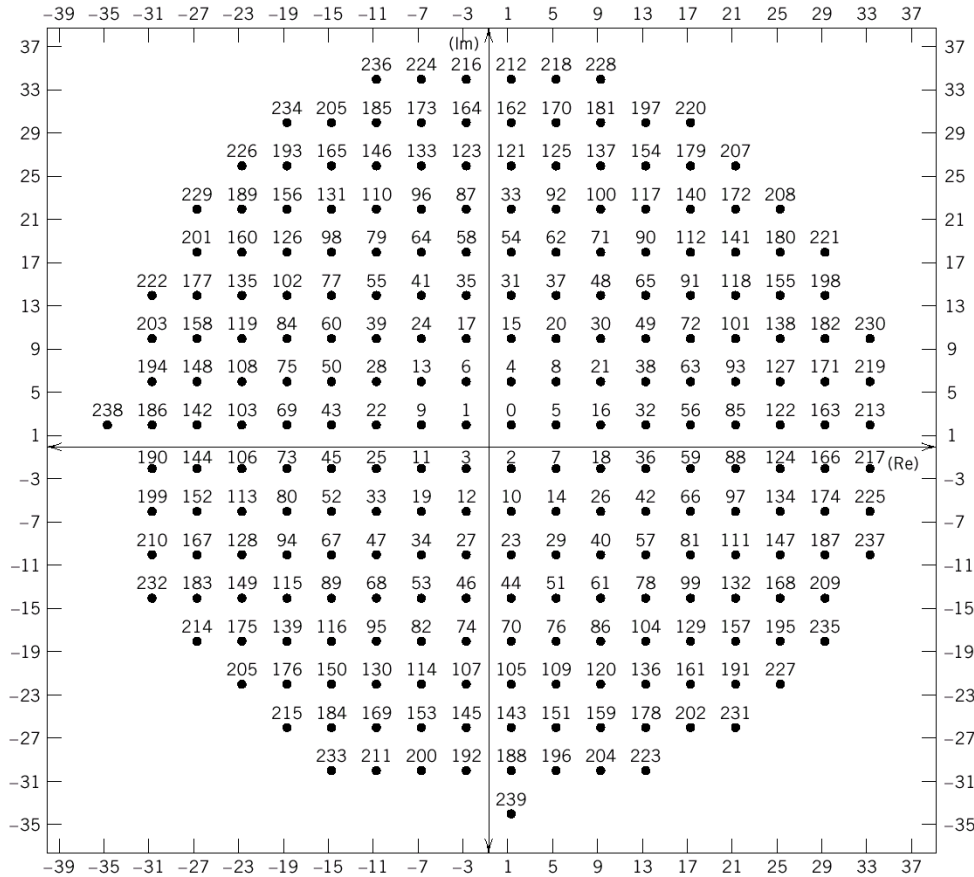


(a) Signal constellation of V.32 modem using nonredundant coding. (b) Signal constellation of V.32 modem using trellis coding.



V.33 signal constellation diagram using Trellis encoding





Quarter-superconstellation of V.34 modem with 240 signal points. The full superconstellation is obtained by combining the rotated versions of these points by 0, 90, 180, and 270 degrees. (Taken from Forney et al., 1996, with permission of the IEEE.)

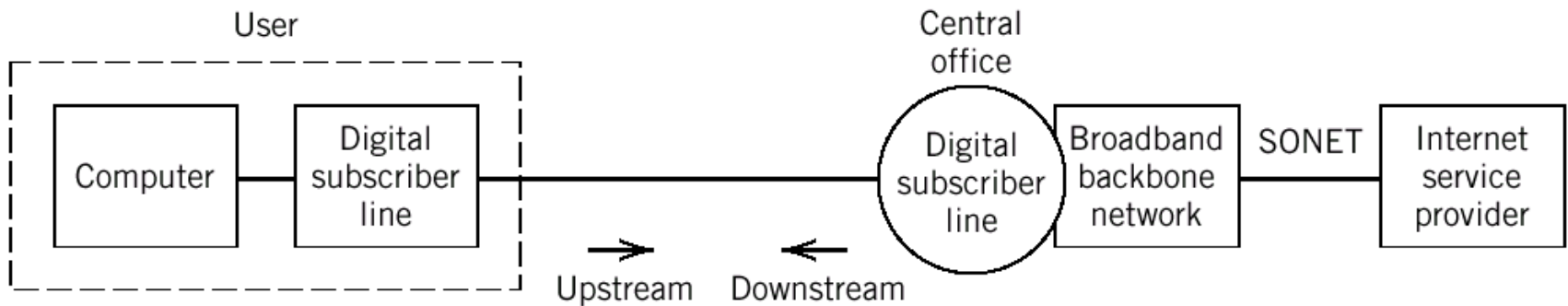
QAM的应用



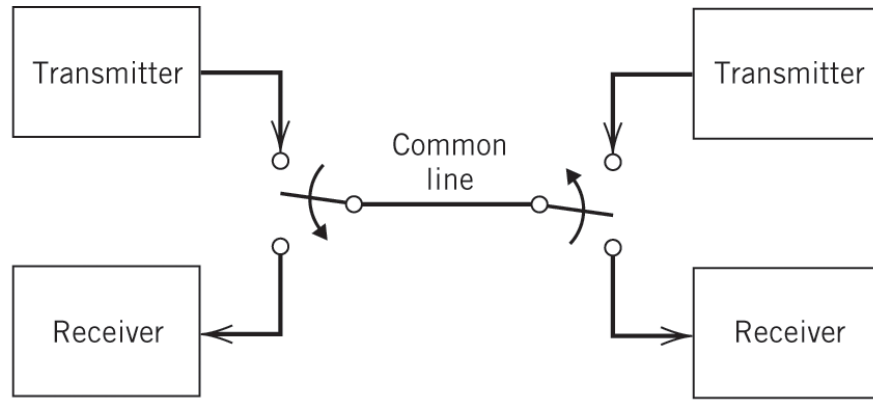
目前，国际上广泛采用的ADSL调制技术有3种：

- ① 正交幅度调制QAM，相当数量的ADSL产品采用；
- ② 无载波幅度/相位调制CAP：CAP调制技术由于处理简单，发展较快，相当数量的ADSL产品用；
- ③ 离散多音DMT。DMT调制技术被ANSI标准化小组T1E1.4制定的国家标准所采用。

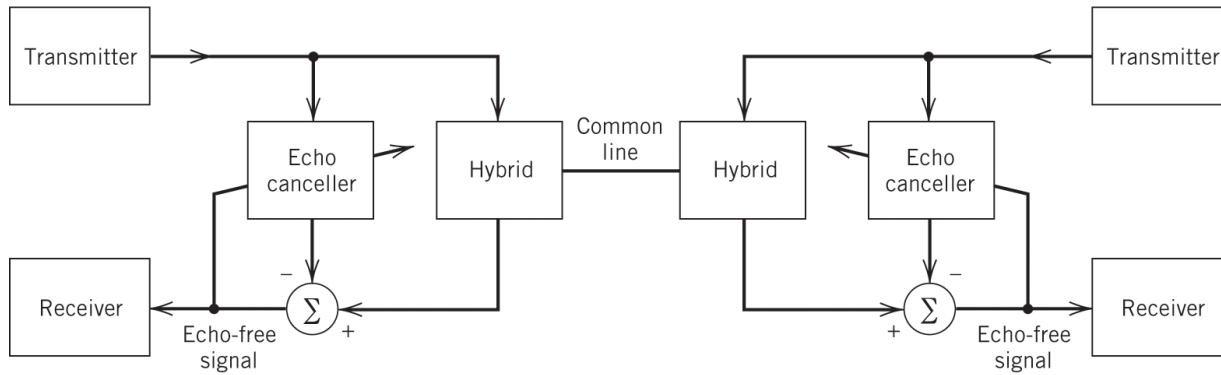
Block diagram depicting the operational environment of digital subscriber lines.



Full-duplex operation using (a) time compression multiplexing, and (b) echo-cancellation.

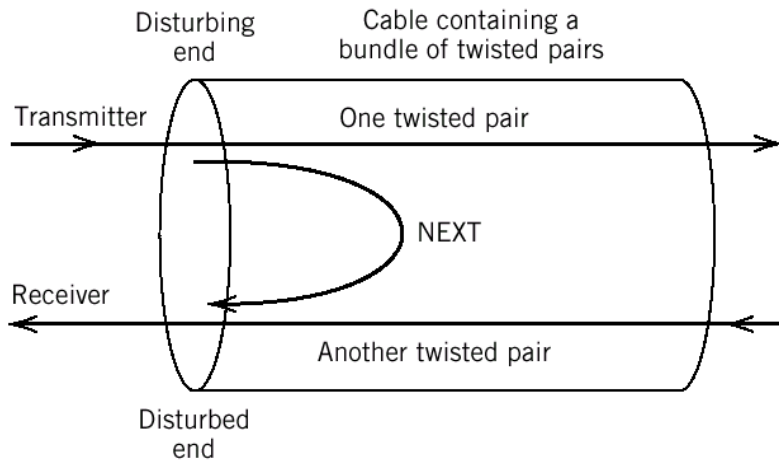


(a)

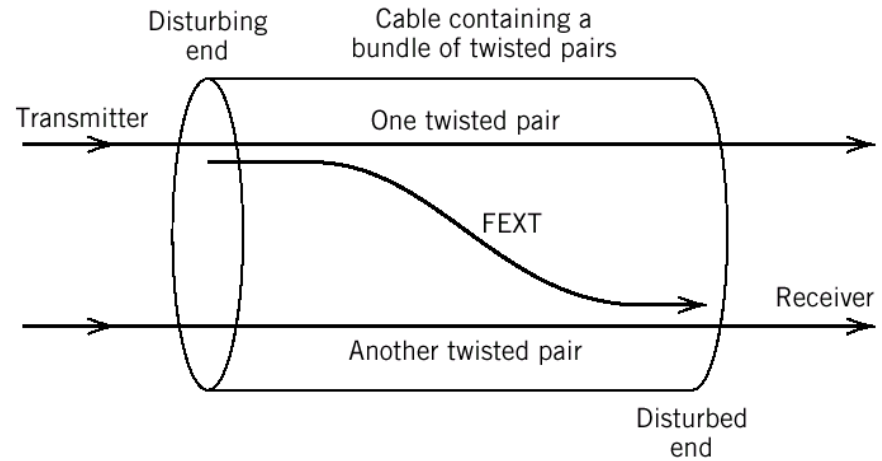


(b)

(a) Near-end crosstalk (NEXT). (b) Far-end crosstalk (FEXT).

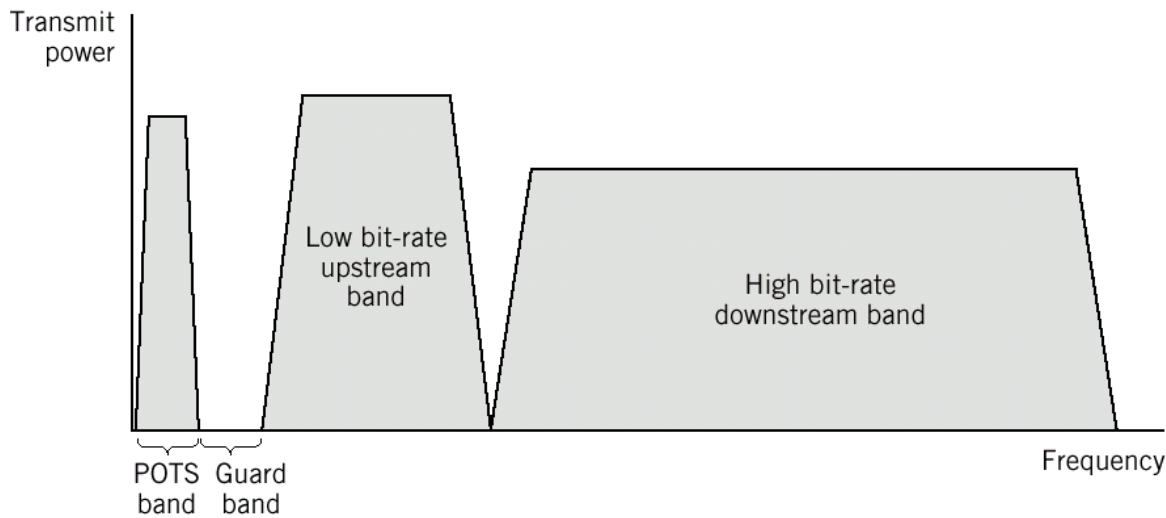


(a)

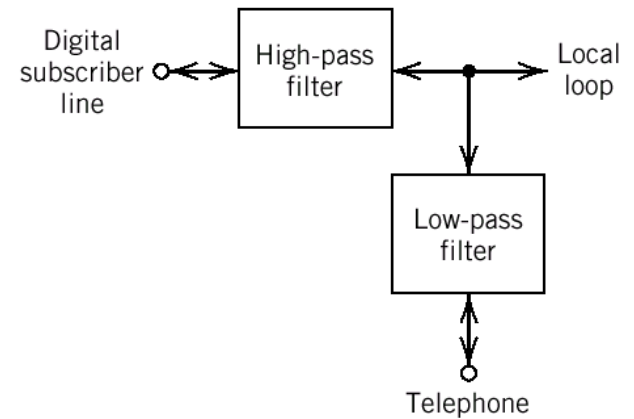


(b)

(a) Illustrating the different band allocations for an FDM-based ADSL system. (b) Block diagram of splitter performing the function of multiplexer or demultiplexer. Note: both filters in the splitter are bidirectional filters.



(a)



(b)



◆ **QAM是一种非专用的并被广泛使用的调制格式。现在市场上已将QAM技术以高效的ASIC(专用集成电路)实现。QAM的普遍性和强壮性使之对大部分设备制造商来说已成为合理的选择。**



◆ **QAM是一种对无线、有线或光纤传输链路上的数字信息进行编码的方式，此方法结合了振幅和相位两种调制技术。QAM是多相位移相键控的一种扩展，二者之间最基本的区别是在QAM中不出现固定包络，而在相移键控技术中则出现固定的包络。QAM频谱利用率高。QAM可具有任意数量的离散数字等级：QAM-4，QAM-16，QAM-64，QAM-256。**



◆ QAM用于ADSL的主要问题是**如何适应不同电话线路之间性能较大的差异性**。要取得较为理想的工作特性，QAM接收器需要一个和发送端具有相同的频谱和相位特性的输入信号用于解码，QAM接收器利用自适应均衡器来补偿传输过程中信号产生的失真，因此采用QAM的ADSL系统的复杂性主要来自于它的自适应均衡器。

Multiple Frequency-Shift Keying (MFSK)

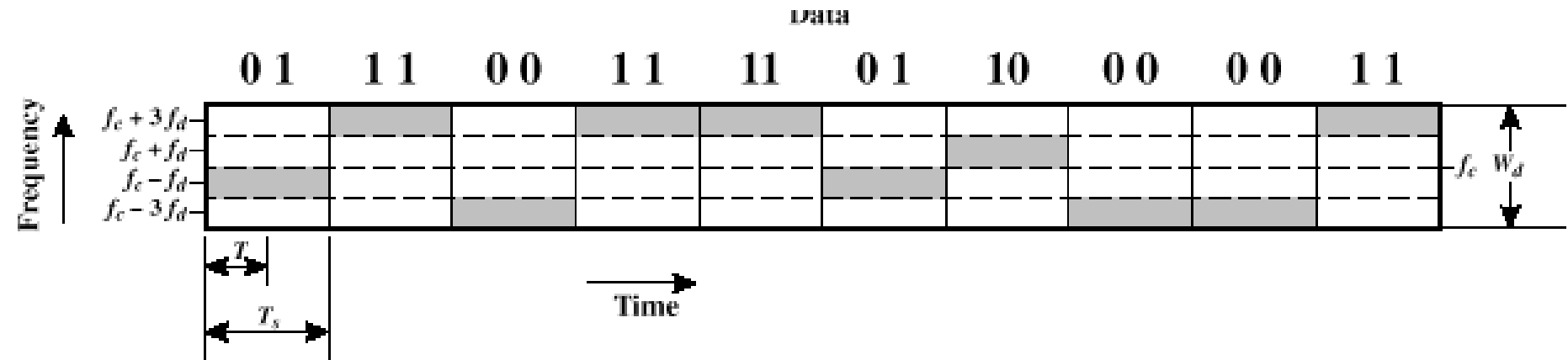


Figure 6.4 MFSK Frequency Use ($M = 4$)

多进制频率键控(MFSK)调制解调系统



频率键控系统通过调制载波的变化来携带不同的信息。

MFSK信号的一般形式

$$s_i(t) = g_T(t) \cos(\omega_c + i\Delta\omega + \theta_i)t, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

式中 $g_T(t)$ 是信号的脉冲波形函数。

MFSK信号的码元能量

$$\begin{aligned} E_s &= \int_0^{T_s} s_i^2(t) dt = \int_0^{T_s} g_T^2(t) \cos^2(\omega_c t + i\Delta\omega t + \theta_i) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{T_s} g_T^2(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^{T_s} \cos(2\omega_c t + 2i\Delta\omega t + \theta_i) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{T_s} g_T^2(t) dt = \frac{1}{2} E_g, \quad i = 1, 2, \dots, M \end{aligned}$$

码元能量是一个常数。

MFSK调制解调系统(续)



MFSK符号对应信号间的相关性

$$\begin{aligned}\rho_{ij} &= \frac{1}{E_S} \int_0^{T_S} s_i(t) s_j(t) dt \\ &= \frac{1}{E_S} \int_0^{T_S} g_T^2(t) \cos(\omega_c t + i\Delta\omega t + \theta_i) \cos(\omega_c t + j\Delta\omega t + \theta_j) dt \\ &= \frac{1}{2E_S} \int_0^{T_S} g_T^2(t) \left[\cos((i-j)\Delta\omega t + (\theta_i - \theta_j)) + \cos(2\omega_c t + (i+j)\Delta\omega t + (\theta_i + \theta_j)) \right] dt\end{aligned}$$

(1)若各个符号间信号的初始相位相同: $\theta_i = \theta_j, \forall i, j \in (1, 2, \dots, M)$

符号间正交($\rho_{ij} = 0$)的条件为 $\Delta\omega = k \frac{\pi}{T}$

此时最小的频率间隔 $\min \Delta\omega = \frac{\pi}{T}$

相应的MFSK信号的带宽为

$$W \approx (M-1) \frac{1}{2T_S} + 2 \frac{1}{T_S} = \frac{M+3}{2T_S} \xrightarrow{M \gg 1} \approx \frac{M}{2T_S}$$

MFSK调制解调系统(续)



MFSK符号对应信号间的相关性

(2)若各个符号间信号有任意的初始相位

符号间正交($\rho_{ij} = 0$)的条件为 $\Delta\omega = k \frac{2\pi}{T}$

此时最小的频率间隔 $\min \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$

相应的MFSK信号的带宽为

$$W \approx (M-1) \frac{1}{T_s} + 2 \frac{1}{T_s} = \frac{M+1}{T_s} \xrightarrow{M \gg 1} \approx \frac{M}{T_s}$$

MFSK调制解调系统(续)



若定义一组标准的正交基函数为

$$\Psi_i(t) = \sqrt{\frac{2}{E_s}} g_T(t) \cos(\omega_c t + i\Delta\omega t + \theta_i), \quad i = 1, 2, \dots, M$$

式中通常取 $\Delta\omega = 2\pi/T$ ，由此MFSK信号可表示为

$$\begin{aligned} s_i(t) &= s_{i1}\Psi_1(t) + s_{i2}\Psi_2(t) + \dots + s_{ii}\Psi_i(t) + \dots + s_{iM}\Psi_M(t) \\ &= s_{ii}\Psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, M \end{aligned}$$

即有 $s_{ij} = 0, i \neq j, i, j \in \{1, 2, \dots, M\}$

MFSK信号的能量

$$\begin{aligned} E_s &= \int_0^{T_s} s_i^2(t) dt = \int_0^{T_s} [s_{ii}\Psi_i(t)]^2 dt \\ &= s_{ii}^2 \int_0^{T_s} \Psi_i^2(t) dt = s_{ii}^2, \quad i = 1, 2, \dots, M \end{aligned}$$

因此有

$$s_{ii} = \sqrt{E_s}, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

MFSK调制解调系统(续)



MFSK信号所对应的系数矢量集

$$s_i(t) \leftrightarrow \vec{s}_i = (s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{iM}) \leftrightarrow \begin{cases} \vec{s}_1 = (\sqrt{E_s}, 0, \dots, 0) \\ \vec{s}_2 = (0, \sqrt{E_s}, \dots, 0) \\ \dots \\ \vec{s}_M = (0, 0, \dots, \sqrt{E_s}) \end{cases}$$

$i = 1, 2, \dots, M$

任意两MFSK信号间的欧氏距离

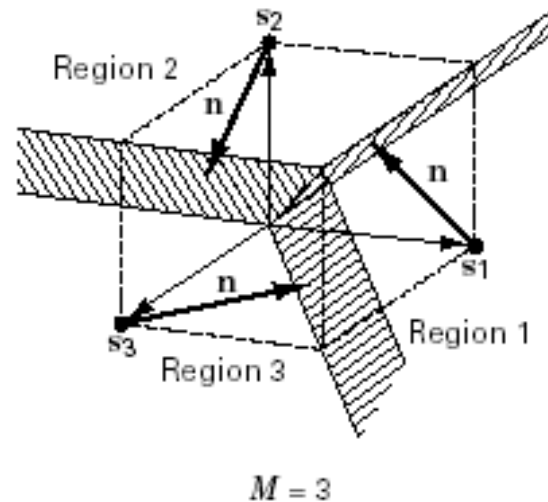
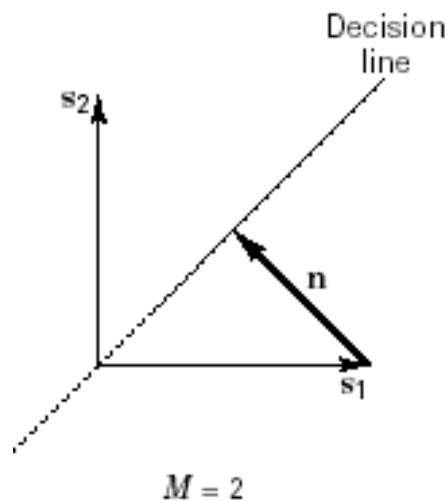
$$d_{ij} = \left(\sum_{k=1}^M (s_{ik} - s_{jk})^2 \right)^{1/2} = \sqrt{(s_{ii} - 0)^2 + (0 - s_{jj})^2}$$
$$= \sqrt{E_s + E_s} = \sqrt{2E_s}$$

即各个符号所对应各信号间的距离相同。

M进制信号及其性能



正交MFSK信号



任意两个不同信号矢量直接的距离为常数

$$d(s_i, s_j) = \|s_i - s_j\| = \left[\int_0^T \left(\sqrt{\frac{2E}{T}} \cos \omega_i t - \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos \omega_j t \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2E}$$

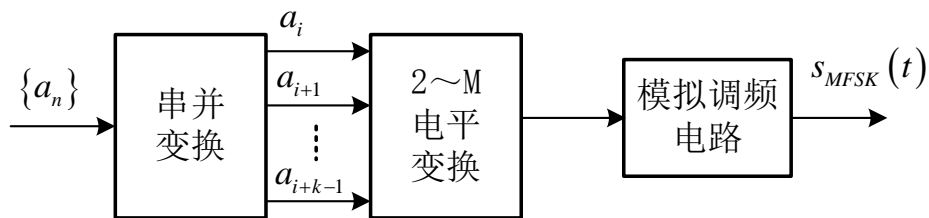
且信号间的距离不会因为M的增加而变小。

MFSK调制解调系统(续)



MFSK信号的调制

MFSK信号可以采用如下的两种不同的方法产生



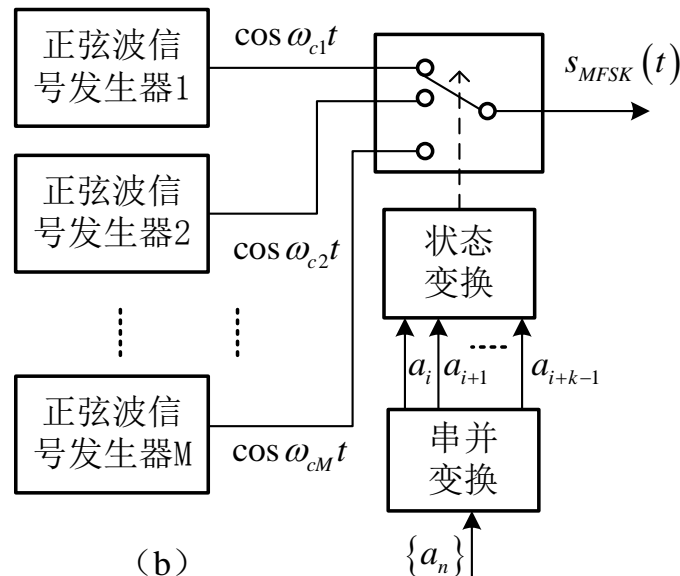
(a)

方法(a)

易于产生相位连续

带外泄漏小的信号

高的频率稳定性不易保证



(b)

方法(b)

易于产生频率准确MFSK信号

如不能保证切换过程相位连续

相位突变容易产生频谱扩展。

MFSK调制解调系统(续)



MFSK信号的频谱特性

MFSK信号可以看作是由M个不同载波频率的OOK组合而成的信号，每个不同频率的信号的功率谱特性与一个OOK信号的功率谱特性完全相同。

功率谱的带宽大致为

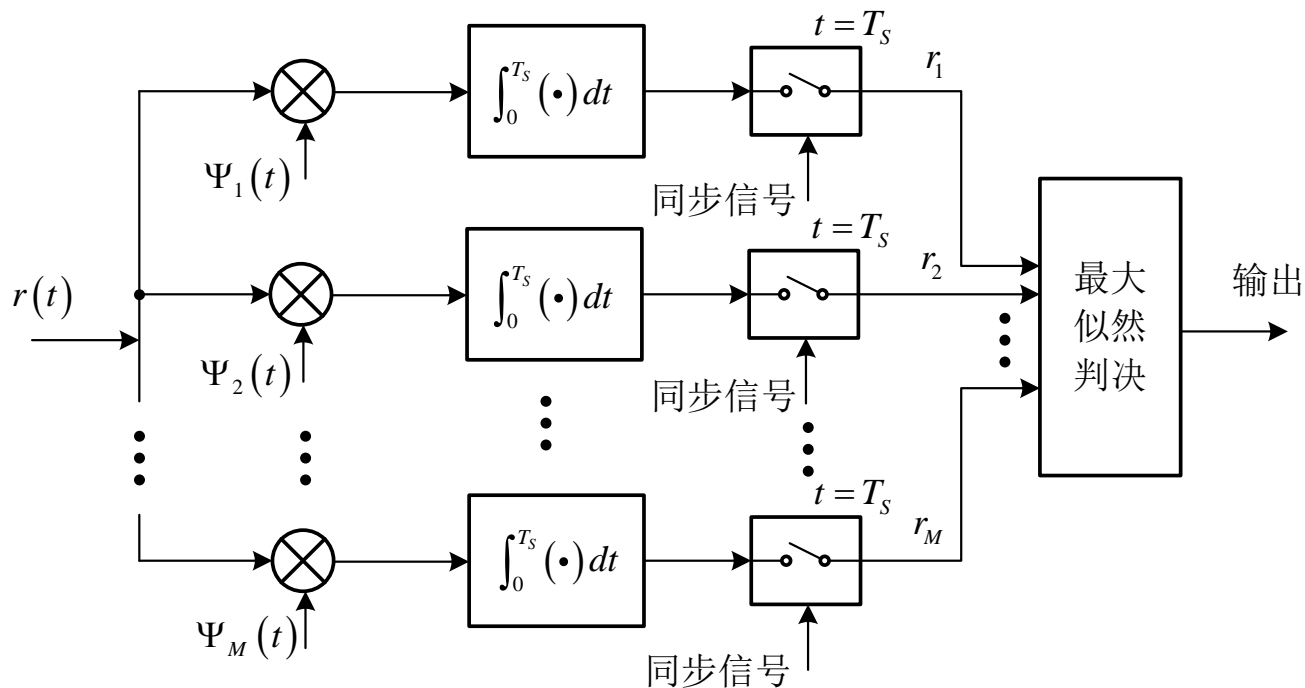
$$W \approx (M - 1) \frac{1}{T_s} + 2 \frac{1}{T_s} \approx \frac{M}{T_s}$$

MFSK调制解调系统(续)



MFSK信号的最佳接收

MFSK信号的最佳接收机的结构如下图所示



解调结果

$$\vec{r} = (r_1, r_2, \dots, r_M), \quad r_i = s_i + n_i, i = 1, 2, \dots, M$$

MFSK调制解调系统(续)



MFSK信号的最佳接收

利于各分量的统计独立性，可得关于符号 \vec{s}_i 的似然函数为

$$p(\vec{r} | \vec{s}_i) = \prod_{k=1}^M \frac{1}{\sqrt{2\pi(N_0/2)}} \exp\left[-\frac{(r_k - s_{ik})^2}{2(N_0/2)}\right]$$

相应的最大似然判决准则

$$\hat{s} = \arg \max_{\vec{s}_i \in \{S\}} p(\vec{r} | \vec{s}_i) \leftrightarrow \arg \max_{\vec{s}_i \in \{S\}} \ln p(\vec{r} | \vec{s}_i) \leftrightarrow \arg \min_{\vec{s}_i \in \{S\}} \sum_{i=1}^M (r_k - s_{ik})^2$$

即在符号集中取满足上述系数取值条件的符号作为判决输出。

简单地说，就是以 $\vec{r} \sim \vec{s}_i, i = 1, 2, \dots, M$ 距离最小者作为判决输出。

MFSK调制解调系统(续)



MFSK信号最佳接收的判决准则可做进一步简化

因为

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^M (r_k - s_{ik})^2 &= \sum_{k=1}^M r_k^2 - 2 \sum_{k=1}^M r_k s_{ik} + \sum_{k=1}^M s_{ik}^2 \\ &= |\vec{r}|^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{s}_i + |\vec{s}_i|^2, \quad i = 1, 2, \dots, M\end{aligned}$$

因为对应MFSK信号, 有

$$|\vec{s}_i| = |\vec{s}_j|, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, M\}$$

因此判决准则等效为

$$\hat{s} = \arg \min_{\vec{s}_i \in \{S\}} \sum_{k=1}^M (r_k - s_{ik})^2 \leftrightarrow \arg \max_{\vec{s}_i \in \{S\}} \vec{r} \cdot \vec{s}_i = \max \int_0^{T_s} r(t) s_i(t) dt$$

即可根据系数矢量的点积(或信号的相关运算)结果作出判决。

MFSK调制解调系统(续)



MFSK接收机的性能分析

若发送符号 $s_i(t)$ 的先验概率为 $P(s_i)$

接收该符号时出错的概率为 $P(e|s_i)$

则总的误码率为

$$P_E = \sum_{i=1}^M P(s_i) P(e|s_i)$$

先验等概时的上式变为

$$P_E = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P(e|s_i)$$

考虑到对于MFSK信号，各符号间等距，对于高斯噪声干扰信道，没有频率选择性的影响，应有

$$P(e|s_i) = P(e|s_j), \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, M\}$$

MFSK调制解调系统(续)



在先验等概的情况下，总的误码率为

$$P_E = P(e | s_i), \quad i=1,2,\dots,M$$

若发送信号为 $s_i(t)$ ，则接收矢量可以表示为

$$\vec{r} = (n_1, n_2, \dots, \sqrt{E_S} + n_i, \dots, n_M)$$

正确判决的概率

$$P_c = \int_{-\infty}^{\infty} P(n_1 < r_i, n_2 < r_i, \dots, n_M < r_i | s_i) p(r_i | s_i) dr_i$$

因为 $n_1, n_2, \dots, \sqrt{E_S} + n_i, \dots, n_M$ 均服从高斯分布且相互独立，固有

$$\begin{aligned} P_c &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1, k \neq i}^M P(n_k < r_i | s_i) p(r_i | s_i) dr_i \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{r_i} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{n_k^2}{N_0}\right) dn_k \right]^{M-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(N_0/2)}} \exp\left[-\frac{(r_i - s_{ii})^2}{2(N_0/2)}\right] dr_i \end{aligned}$$

MFSK调制解调系统(续)



由此可得MFSK信号的误码率为 P_E

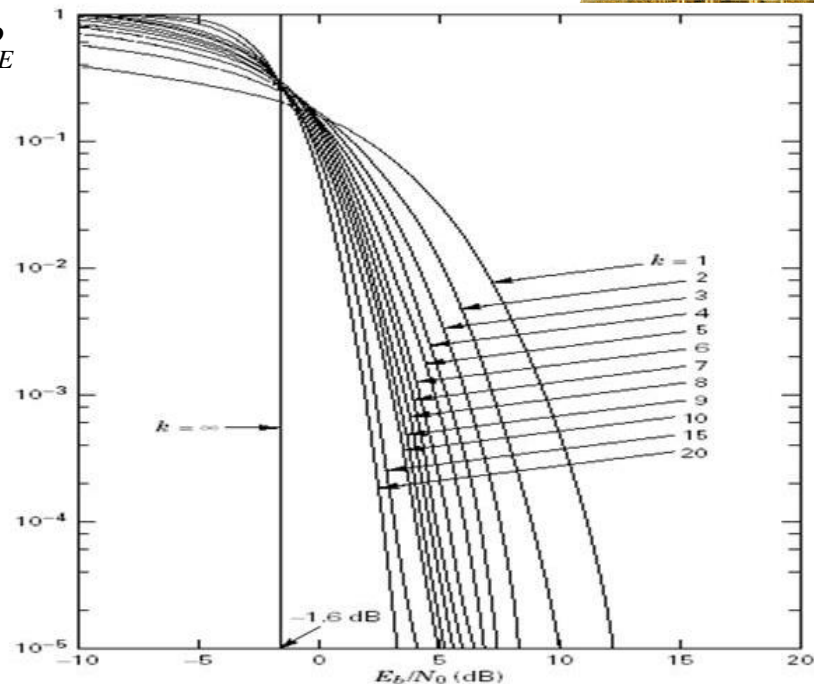
$$P_E = 1 - P_c$$

MFSK信号的误码特性曲线

注意到随着 k 的增加

($M=2^k$ 相应增加)

误码性能得到改善。



另外，注意到MFSK信号的频谱利用率

$$\eta = \frac{R_b}{W} \approx \frac{R_b}{M/2T_s} = \frac{2T_s R_b}{M} = \frac{2 \log_2 M}{M} (b/s \cdot Hz)$$

η 随着 M 的增加而下降，是一种频谱效率较低的系统。

综上：通过MFSK调制方式，实现频率与信噪比之间的互换。

M进制系统的误码性能



正交MFSK信号的误码率

等概正交MFSK信号相干

检测时的误码率可导出

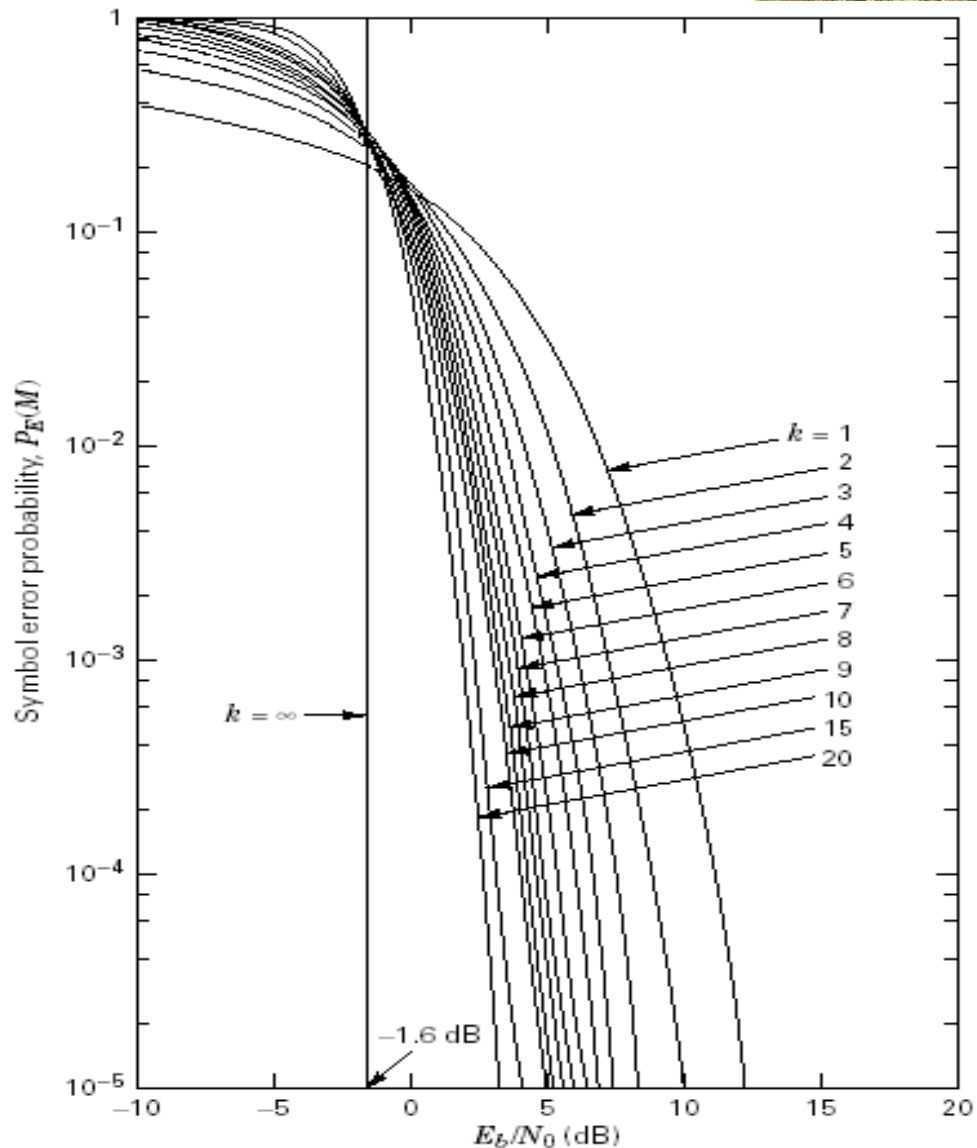
为：

$$P_E \approx (M - 1)Q \left[\sqrt{\frac{E_S}{N_0}} \right]$$

$$\approx (M - 1)Q \left[\sqrt{\frac{E_b}{N_0} \log_2 M} \right]$$

$k = \log_2 M$ 增大时，

误码性能改善。



MFSK调制解调系统(续)



MFSK系统的误比特率

通过前面对MFSK不同符号间信号距离的分析可知，MFSK不同信号间的欧氏距离相等。因此不能通过格雷码编码提高性能。

MFSK系统误码率与误比特率间的关系

首先讨论8FSK系统：

8个不同频率的符号对应二进制码组

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111

若当前发送码组 100

000 100 (正确码组)

所有可能出现的

001 101

比特错误如右图

010 110

斜体数字所示

011 111

MFSK调制解调系统(续)



MFSK系统的误比特率

8FSK的每个误码可能导致二进制码组1位或多位错误；

8FSK每个符号对应的二进制码组共有3位。观察上图每位共有 2^3-1 个可能的错误，总共可能有

$$3 \times 2^{3-1} = 3 \times 4 = 12 \text{ 比特的错误}$$

一般地，对MFSK的每个误码，可能导致的各种组合的比特错误总共有

$$k \times 2^{k-1}$$

在所有这些有错误的 $M - 1 = 2^k - 1$ 个码组中，每个码组包含 k 比特，总的比特数(含有错与无错的比特)

$$k \times (M - 1) = k \times (2^k - 1)$$

因此若误码率为 P_E ，则误比特率为

$$P_b = \frac{k \times 2^{k-1}}{k \times (2^k - 1)} P_E = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} P_E = \frac{M}{2(M - 1)} P_E \xrightarrow{M \uparrow} \frac{1}{2} P_E$$



◆ 综上所述, MASK、MPSK、及MQAM的频带利用率相同, 但在相同的 E_b/N_0 条件下, $M > 2$ 的MPSK误符率小于MASK的误符率; 而在 $M > 8$ 情况下, MQAM的误符率小于MPSK的误符率。

ASK, FSK, PSK, and QAM Summary



Modulation	Encoding Scheme	Outputs Possible	Minimum Bandwidth	Baud
ASK	Single bit	2	f_b	f_b
FSK	Single bit	2	f_b	f_b
BPSK	Single bit	2	f_b	f_b
QPSK	Dibits	4	$f_b/2$	$f_b/2$
8-PSK	Tribits	8	$f_b/3$	$f_b/3$
8-QAM	Tribits	8	$f_b/3$	$f_b/3$
16-QAM	Quadbits	16	$f_b/4$	$f_b/4$
16-PSK	Quadbits	16	$f_b/4$	$f_b/4$
32-PSK	Five bits	32	$f_b/5$	$f_b/5$
32-QAM	Five bits	32	$f_b/5$	$f_b/5$
64-PSK	Six bits	64	$f_b/6$	$f_b/6$
64-QAM	Six bits	64	$f_b/6$	$f_b/6$
128-PSK	Seven bits	128	$f_b/7$	$f_b/7$
128-QAM	Seven bits	128	$f_b/7$	$f_b/7$

Note: f_b indicates a magnitude equal to the input bit rate.

ASK, FSK, PSK, and QAM Summary



Modulation	Encoding Scheme	Outputs Possible	Minimum Bandwidth	Baud	$B\eta$
ASK	Single bit	2	f_b	f_b	1
FSK	Single bit	2	f_b	f_b	1
BPSK	Single bit	2	f_b	f_b	1
QPSK	Dibits	4	$f_b/2$	$f_b/2$	2
8-PSK	Tribits	8	$f_b/3$	$f_b/3$	3
8-QAM	Tribits	8	$f_b/3$	$f_b/3$	3
16-PSK	Quadbits	16	$f_b/4$	$f_b/4$	4
16-QAM	Quadbits	16	$f_b/4$	$f_b/4$	4
32-PSK	Five bits	32	$f_b/5$	$f_b/5$	5
64-QAM	Six bits	64	$f_b/6$	$f_b/6$	6

Note: f_b indicates a magnitude equal to the input bit rate.



6.5 恒包络连续相位调制



恒包络调制



- ◆在数字调制中，实际系统使用非线性调制方法。不管调制信号如何改变，载波的幅度是恒定的。
- ◆使用模拟信号调制的通信中，调频和调相信号的幅度是不变的，通称为**恒包络调制**。
- ◆恒包络调制可用硬限幅的方法去除干扰引起的幅度变化，**具有较高的抗干扰性能**。
- ◆恒包络调制具有可以满足多种应用环境的优点，但它们占用的带宽比线性调制大。

为什么采用MSK/GMSK调制



在1986年线性高功放未取得突破性进展以前，移动通信中的调制是以恒包络调制技术为主体。

MSK调制是一种恒包络调制，这是因为**MSK**是属于二进制连续相位移频键控(**CPFSK**)的一种特殊的情况，它不存在相位跃变点，因此在限带系统中，能保持恒包络特性。

恒包络调制可提供以下**优点**：极低的旁瓣能量；可使用高效率的**C**类高功率放大器；容易恢复用于相干解调的载波；已调信号峰平比低。

为什么采用MSK/GMSK调制



MSK是CPFSK满足移频系数时的特例：当时满足在码元交替点相位连续的条件，是移频键控为保证良好的误码性能所允许的最小调制指数；且此时波形的相关系数为0，待传送的两个信号是正交的。

GMSK是MSK的进一步优化方案。数字移动通信中，当采用较高传输速率时，寻求更为紧凑的功率谱，更高的频谱利用效率，因此要求对MSK进一步优化。**GMSK**是属于MSK简单的优化方案，它只需在MSK调制前附加一个高斯型前置低通滤波器，进一步抑制高频分量，防止过量的瞬时频率偏移以及满足相干检测的需求。

恒包络连续相位调制的基本概念



前面讨论过的各种调制方式，在不同符号转换对应的信号切换期间，都有可能发生相位突变；

因为信号的频率 $\omega(t)$ 与相位 $\theta(t)$ 间有如下的关系

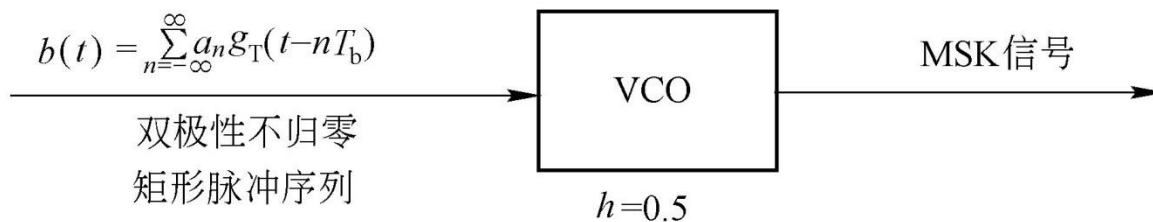
$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

信号的相位突变瞬间会产生极大的频率扩展变化，产生的谐波会造成对带外的干扰(带外的频谱泄漏)。

避免信号的相位突变是消除对带外干扰的关键。

最小频域键控(MSK)和高斯滤波最小频移键控(GMSK)正是基于这种思路提出的调制方式。

最小移频键控(MSK)



利用 $h=0.5$ 的 VCO 产生 MSK 信号

调制指数
$$h = \frac{2\Delta f}{R_b} = \frac{1}{2}$$



- ◆ MSK是一种**高效的**调制方法，它有时也称为快速FSK，因为其使用的频率空间仅为常规非相干FSK空间的一半。
- ◆ MSK特别**适合**在移动无线通信系统中使用。它有很多好的特性，例如包络恒定、频谱利用率高、误比特率低和自同步性能。

最小频移键控(MSK)



最小频移键控(MSK)本质上是一种2FSK调制方式。

对于2FSK, 已知在任何初相下保证两载波频率正交的条件是

$$\Delta f = |f_1 - f_2| = \frac{1}{2T_S}$$

其中 T_S 是码元周期。

记调制频率的基带信号为 $s_B(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT)$

定义单位电压导致频率的变化量为调制指数 K_f

对于调频信号频率

$$f(t) = f_c + K_f s_B(t) = f_c + K_f \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT_S)$$

调频信号的相位

$$\theta(t) = 2\pi f_c t + \int_{-\infty}^t 2\pi K_f \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(\tau - nT_S) d\tau$$

最小频移键控(MSK)(续)



MSK信号可以表示为

$$s_{MSK}(t) = a \cos \theta(t) = a \cos \left(2\pi f_c t + \int_{-\infty}^t 2\pi K_f \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(\tau - nT_S) d\tau \right)$$

若取脉冲波形函数 $g_T(t)$ 为门函数，则

$$\int_{-\infty}^t g_T(\tau - iT_S) d\tau = \begin{cases} 0, & t < iT_S \\ t - iT_S, & iT_S \leq t \leq (i+1)T_S \\ T_S, & t \geq (i+1)T_S \end{cases}$$

由此可得

$$\begin{aligned} s_{MSK}(t) &= a \cos \left(2\pi f_c t + 2\pi K_f (t - nT_S) a_n + 2\pi K_f T_S \sum_{i=-\infty}^{n-1} a_i \right) \\ &= a \cos \left(2\pi f_c t + 2\pi K_f a_n t - 2\pi K_f a_n nT_S + 2\pi K_f T_S \sum_{i=-\infty}^{n-1} a_i \right) \end{aligned}$$

其中在任意的第 n 个码元周期 $nT_S \leq t \leq (n+1)T_S$ 内，式中

$$-2\pi K_f a_n nT_S + 2\pi K_f T_S \sum_{i=-\infty}^{n-1} a_i \xrightarrow{\text{常数, 记为}} x_n$$

最小频移键控(MSK)(续)



由此可得

$$s_{MSK}(t) = a \cos \left[2\pi (f_c + K_f a_n) t + x_n \right] = \begin{cases} a \cos(2\pi f_1 t + x_n), & a_n = +1 \\ a \cos(2\pi f_2 t + x_n), & a_n = -1 \end{cases}$$

因为要求

$$\Delta f = |f_1 - f_2| = \frac{1}{2T_S}$$

所以有

$$a_n = \begin{cases} +1 \leftrightarrow f_1 = f_c + \frac{1}{4T_S} \\ -1 \leftrightarrow f_2 = f_c - \frac{1}{4T_S} \end{cases}$$

由此可导出对调制指数的取值要求

$$K_f = \frac{1}{4T_S}$$

MSK的频率关系



在MSK信号中，码元速率 $R_b=1/T_b$ 、峰值频偏 f_d 和两个频率 f_1 、 f_2 存在一定的关系。

$$\left. \begin{aligned} \omega_c T_b = 2\pi f_c T_b = 2\pi(f_2 + f_1)T_b = m\pi \\ \omega_d T_b = 2\pi f_d T_b = 2\pi(f_2 - f_1)T_b = n\pi \end{aligned} \right\}$$

当给定码元速率 R_b 时可以确定各个频率如下：

$$\left. \begin{aligned} f_c &= m \cdot R_b / 4 \\ f_2 &= (m + 1)R_b / 4 \\ f_1 &= (m - 1)R_b / 4 \end{aligned} \right\}$$

即载波频率应当是 $R_b/4$ 的整数倍。

最小频移键控(MSK)(续)



由此可得

$$\begin{aligned}x_n &= -\frac{\pi}{2} a_n n + \frac{\pi}{2} \sum_{i=-\infty}^{n-1} a_i = -\frac{\pi}{2} a_n n + \frac{\pi}{2} a_{n-1} n - \frac{\pi}{2} a_{n-1} n + \frac{\pi}{2} \sum_{i=-\infty}^{n-1} a_i \\&= -\frac{\pi}{2} a_n n + \frac{\pi}{2} a_{n-1} n + \left(-\frac{\pi}{2} a_{n-1} (n-1) + \frac{\pi}{2} \sum_{i=-\infty}^{n-2} a_i \right) \\&= -\frac{\pi}{2} (a_n - a_{n-1}) n + x_{n-1}\end{aligned}$$

MSK信号的表达式变为

$$s_{MSK,n}(t) = A \cos \left[2\pi \left(f_c + \frac{a_n}{4T_s} \right) t + x_n \right] = A \cos \left(2\pi f_c t + \frac{\pi a_n}{2T_s} t + x_n \right)$$

MSK的信号表达式



MSK的信号表达式为

$$S(t) = \cos \left[\omega_c t + \frac{\pi}{2T_b} a_k t + x_k \right]$$

式中， x_k 是为了保证 $t=kT_b$ 时相位连续而加入的相位常量。

令

$$\varphi_k = \omega_c t + \theta_k \quad kT_b \leq t \leq (k+1)T_b$$

式中

$$\theta_k = \frac{\pi}{2T_b} a_k t + x_k$$

为了保持相位连续，在 $t=kT_b$ 时应有下式成立：



$$\varphi_{k-1}(kT_b) = \varphi_k(kT_b)$$

将式(2 - 35)代入式(2 - 36)可得

$$x_k = x_{k-1} + (a_{k-1} - a_k) \frac{k\pi}{2}$$

若令 $x_0=0$,则 $x_k=0$ 或 $\pm\pi$ (模 2π), $k=0,1,2,\dots$ 。该式表明本比特内的相位常数**不仅**与本比特区间的输入有关，还与前一个比特区间内的输入及相位常数有关。

最小频移键控 (MSK)



- ◆ QPSK与OQPSK信号的都有相位突变，瞬间产生极大的频率变化，从而造成带外干扰；
- ◆ OQPSK较之QPSK相位突变小，造成的带外干扰也小；
- ◆ 若能够采用避免相位跳变的调制，则可大大抑止带外干扰，最小频域键控 (MSK)正是基于这种思路提出的调制方式。
- ◆ MSK调制信号的波形可表示为：

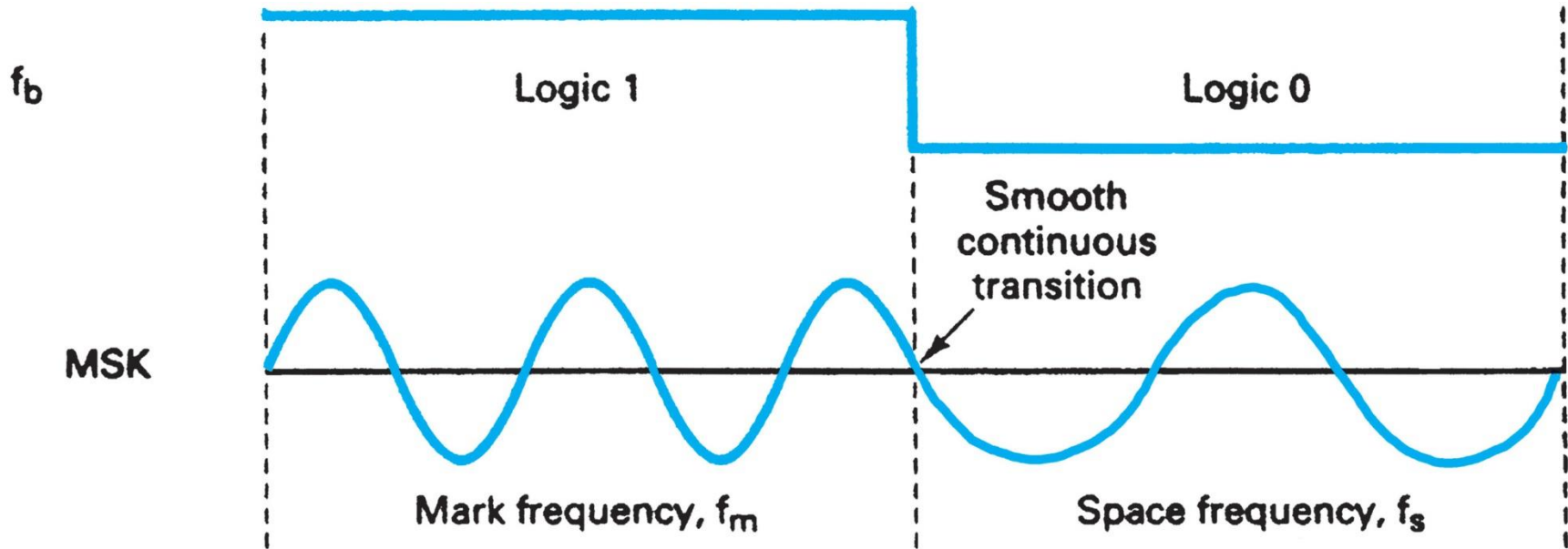
$$s(t) = \cos \left[2\pi \left(f_0 + \frac{d_k}{4T} \right) t + x_k \right] \quad kT < t < (k+1)T$$

其中

$$x_k = \left[x_{k-1} + \frac{\pi k}{2} (d_{k-1} - d_k) \right] \text{ modulo } 2\pi$$

f_0 为载波频率； $d_k = \pm 1$ 双极性数据； x_k 第 k 个时间段相位常数

Continuous-phase MSK waveform



最小频移键控(MSK)(续)



分析MSK信号相位变化的连续性

(1) 在一个码元周期内，相位函数是一个连续的函数

$$\theta_n(t) = 2\pi \left(f_c + \frac{a_n}{4T_S} \right) t + x_n$$

(2) 在两个码元切换瞬间，因为

$$\theta_{n-1}(nT_S) = 2\pi \left(f_c + \frac{a_{n-1}}{4T_S} \right) nT_S + x_{n-1} = 2\pi f_c nT_S + \frac{\pi n a_{n-1}}{2} + x_{n-1}$$

$$\theta_n(nT_S) = 2\pi \left(f_c + \frac{a_n}{4T_S} \right) nT_S + x_n = 2\pi f_c nT_S + \frac{\pi n a_n}{2} + x_n$$

$$= 2\pi f_c nT_S + \frac{\pi n a_n}{2} + \left[x_{n-1} + \frac{\pi n}{2} (a_{n-1} - a_n) \right] = 2\pi f_c nT_S + \frac{\pi k a_{n-1}}{2} + x_{n-1}$$

可见有

$$\theta_{n-1}(nT_S) = \theta_n(nT_S)$$

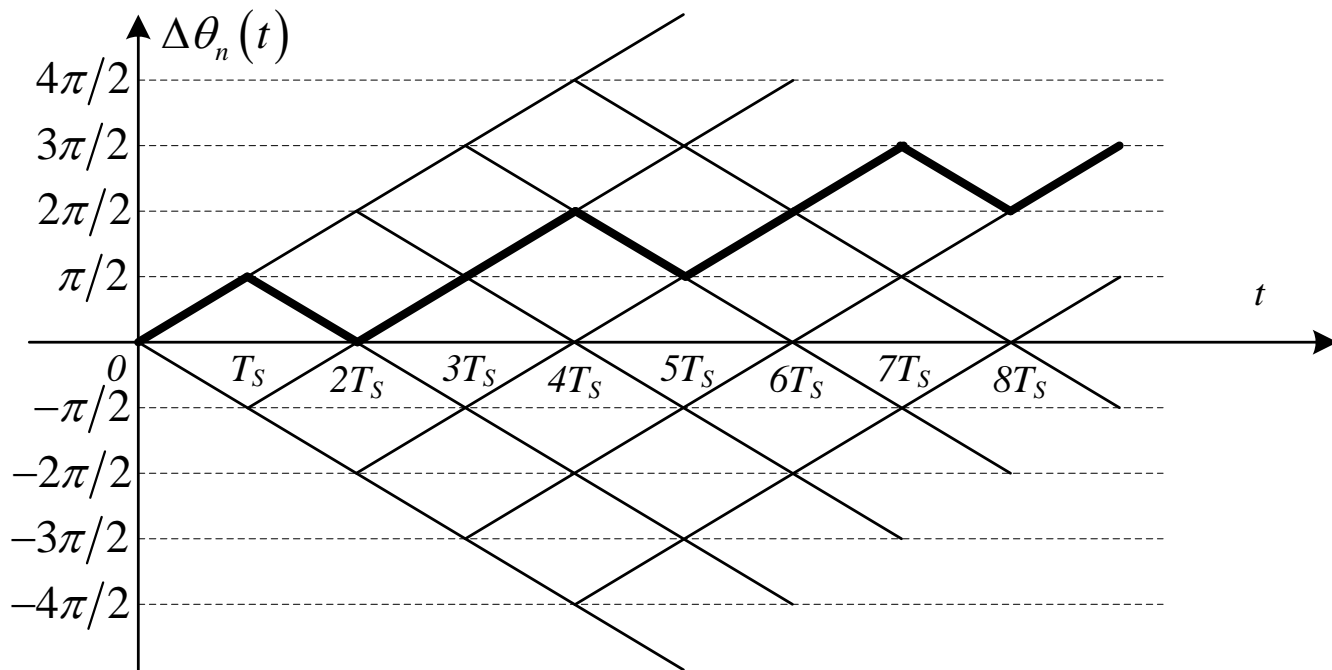
最小频移键控(MSK)(续)



综合上述(1)和(2)可得结论：MSK信号是相位连续的函数。

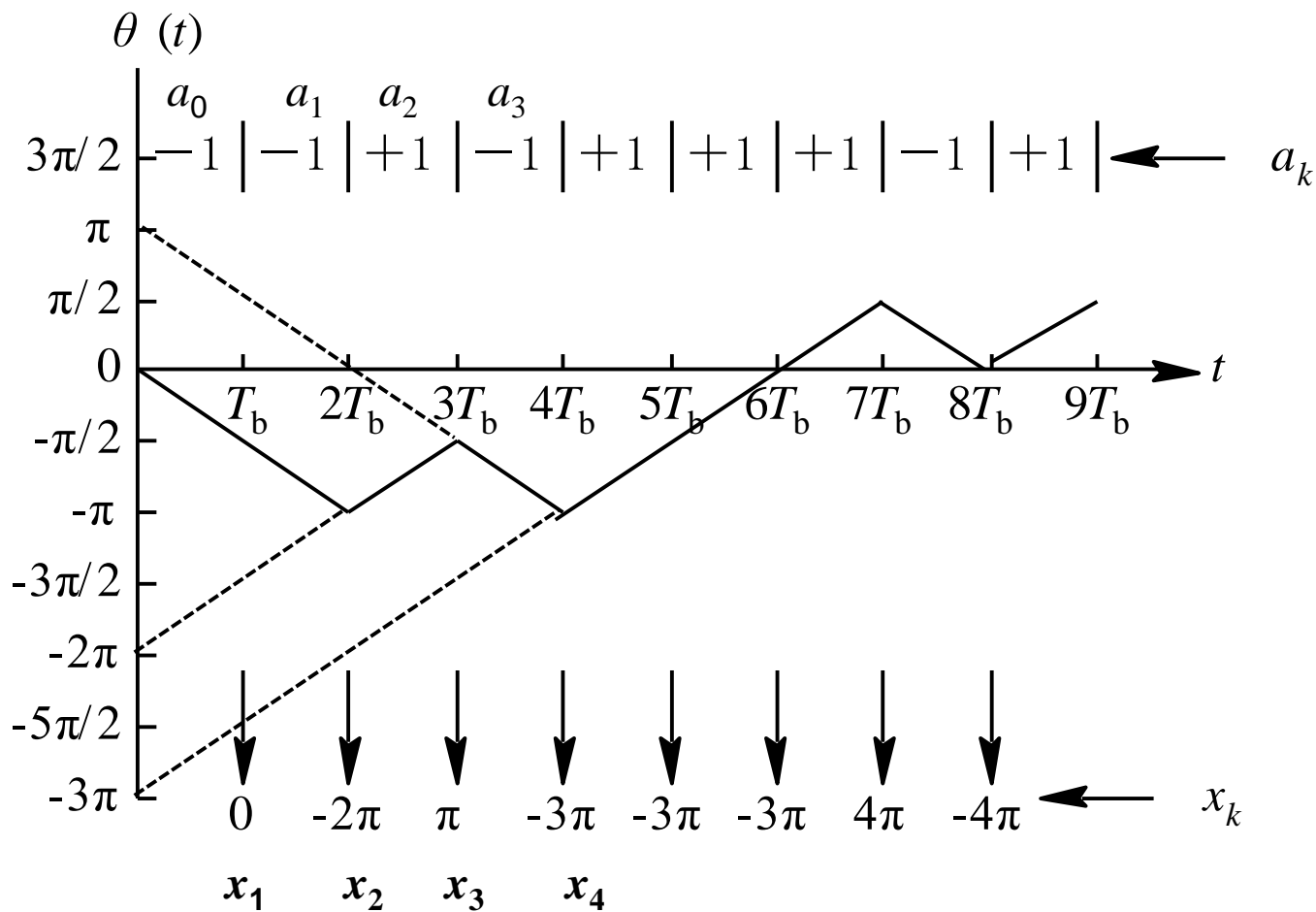
MSK信号的相位树

MSK信号相位的(连续)变化可用相位树描述



图中加重曲线的路径反映了当 $\{a_n\}$ 为 101101101... 时相位的变化。

在给定输入序列 $\{a_k\}$ 的情况下，MSK的相位轨迹如下图所示。各种可能的输入序列所对应的所有可能的相位轨迹如下页图所示。



$$x_1 = x_0 + (a_0 - a_1) \frac{\pi}{2}$$

$$= x_0 = 0$$

$$x_2 = x_1 + (a_1 - a_2) \frac{2\pi}{2}$$

$$= 0 - 2\pi = -2\pi$$

$$x_3 = x_2 + (a_2 - a_3) \frac{3\pi}{2}$$

$$= -2\pi + (1+1) \frac{3\pi}{2} = \pi$$

$$x_4 = x_3 + (a_3 - a_4) \frac{4\pi}{2}$$

$$= \pi - 4\pi = -3\pi$$

图 MSK的相位轨迹

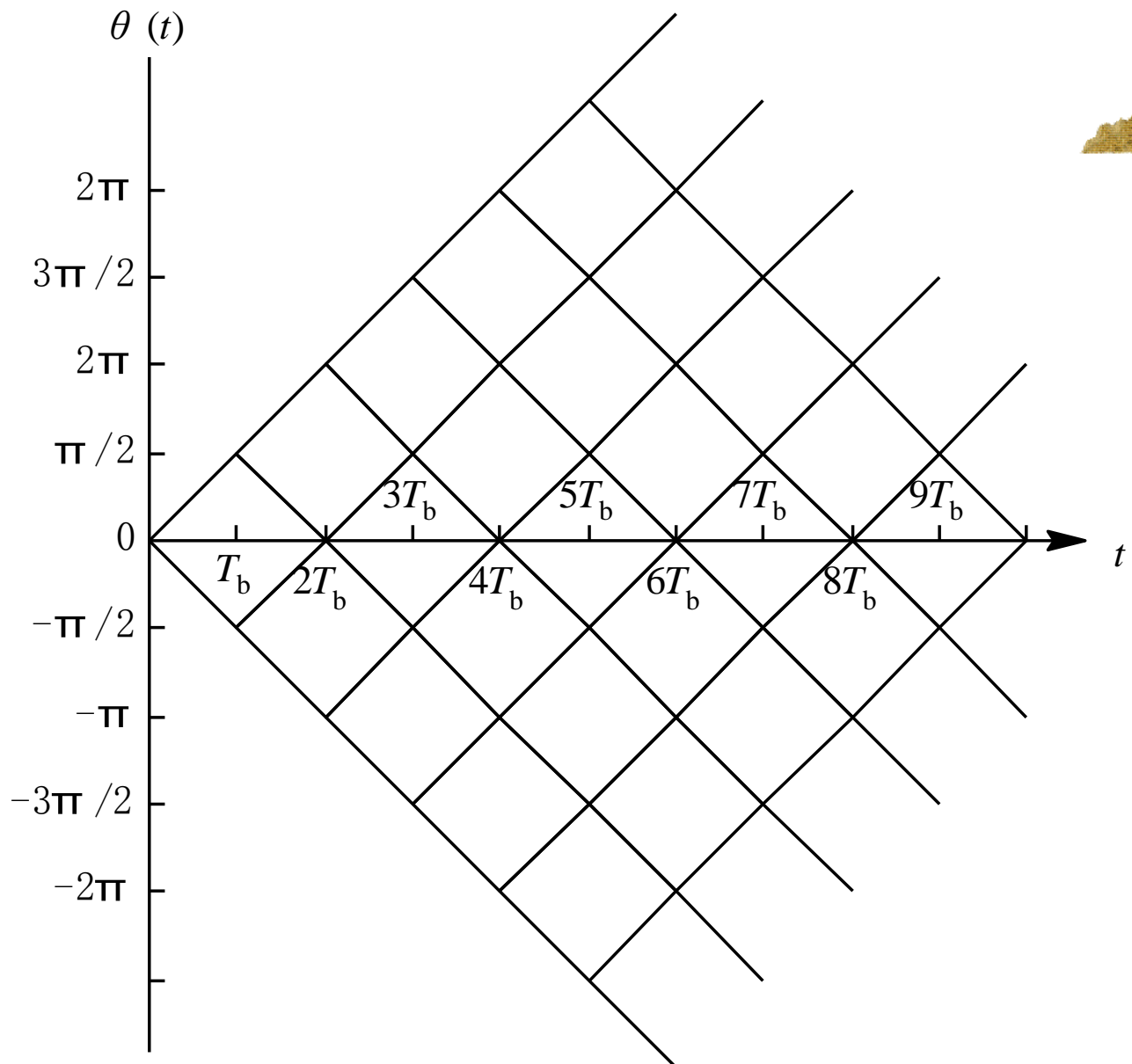


图 MSK的可能相位轨迹



从上面两幅图可以看出：当 $t=2lT_b$, $l=0, 1, 2, \dots$ 时，相位取值只能是0或 $\pm\pi$ (模 2π)；
当 $t=(2l+1)T_b$, $l=0, 1, 2, \dots$ 时，相位取值只能是 $\pm\pi/2$ (模 2π)；
在一个比特区间内，相位线性地增加或减少 $\pi/2$ 。

最小频移键控(MSK)(续)



展开MSK信号

$$s_{MSK,n}(t) = a \cos \left[2\pi f_c t + \frac{\pi a_n}{2T_S} t + x_n \right]$$

$$= a \left[\cos \left(\frac{\pi a_n}{2T_S} t + x_n \right) \cos \omega_c t - \sin \left(\frac{\pi a_n}{2T_S} t + x_n \right) \sin \omega_c t \right]$$

$$= a \left[\cos x_n \cos \left(\frac{\pi}{2T_S} t \right) \cos \omega_c t - a_n \cos x_n \sin \left(\frac{\pi}{2T_S} t \right) \sin \omega_c t \right]$$

若记

$$I_n = \cos x_n$$

$$Q_n = a_n \cos x_n$$

MSK信号可表示为

$$s_{MSK,n}(t) = a \left[I_n \cos \left(\frac{\pi}{2T_S} t \right) \cos \omega_c t - Q_n \sin \left(\frac{\pi}{2T_S} t \right) \sin \omega_c t \right]$$



$$\begin{aligned} s_{\text{MSK}}(t) &= \cos \left[\omega_c t + \frac{\pi t}{2T_b} a_k + x_k \right] \\ &= \cos \left(\frac{\pi t}{2T_b} a_k + x_k \right) \cos \omega_c t - \sin \left(\frac{\pi t}{2T_b} a_k + x_k \right) \sin \omega_c t \\ &= \left[\cos x_k \cos \left(\frac{\pi t}{2T_b} a_k \right) - \sin x_k \sin \left(\frac{\pi t}{2T_b} a_k \right) \right] \cos \omega_c t \\ &\quad - \left[\sin x_k \cos \left(\frac{\pi t}{2T_b} a_k \right) + \cos x_k \sin \left(\frac{\pi t}{2T_b} a_k \right) \right] \sin \omega_c t \\ &= \cos x_k \cos \left(\frac{\pi t}{2T_b} a_k \right) \cos \omega_c t - \cos x_k \sin \left(\frac{\pi t}{2T_b} a_k \right) \sin \omega_c t \\ &= \cos x_k \cos \left(\frac{\pi t}{2T_b} a_k \right) \cos \omega_c t - a_k \cos x_k \sin \left(\frac{\pi t}{2T_b} a_k \right) \sin \omega_c t \end{aligned}$$

可得:

$$x_k = \begin{cases} x_{k-1} & a_k = a_{k-1} \\ x_{k-1} \pm k\pi & a_k \neq a_{k-1} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \cos x_k &= \cos \left[x_{k-1} + (a_{k-1} - a_k) \cdot \left(\frac{k\pi}{2} \right) \right] \\ &= \cos x_{k-1} \cos \left[(a_{k-1} - a_k) \cdot \left(\frac{k\pi}{2} \right) \right] - \sin x_{k-1} \sin \left[(a_{k-1} - a_k) \left(\frac{k\pi}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\sin x_{k-1} = 0$$

$$a_{k-1} - a_k = 0, \pm 2$$

$$\sin \left[(a_{k-1} - a_k) \left(\frac{k\pi}{2} \right) \right] = 0$$

$$\cos \left[(a_{k-1} - a_k) \left(\frac{k\pi}{2} \right) \right] = \begin{cases} +1 \\ -1 \\ +1 \end{cases}$$



所以上式可以写成(令 $k=2l, l=0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{cases} \cos x_{2l} = \cos x_{2l-1} \\ a_{2l+1} \cos x_{2l+1} = a_{2l} \cos x_{2l} \end{cases}$$

由此式可以看出： I 支路数据($\cos x_k$)和 Q 支路数据($a_k \cos x_k$)并不是每隔 T_b 秒就可能改变符号，而是每隔 $2T_b$ 秒才有可能改变符号。 I 支路与 Q 支路的码元在时间上错开 T_b 秒，如图 2-7 所示。

最小频移键控(MSK)(续)



利用归纳法原理，可用证明

$$I_{2n} = I_{2n-1}, Q_{2n+1} = Q_{2n}$$

关系式 $I_{2n} = I_{2n-1}$ 表明变量 I_m 只能在 m 等于奇数位置发生变化

同理 $Q_{2n+1} = Q_{2n}$ 表明变量 Q_m 只能在 m 等于偶数位置发生变化

因为

$$I_{2n} = I_{2n-1} = b_{2n-1} \quad Q_{2n+1} = Q_{2n} = b_{2n}$$

式中 $\{b_n\}$ 是输入信息序列 $\{a_n\}$ 的电平转换序列 $\{a_n\} \xrightarrow[1 \rightarrow +1]{0 \rightarrow -1} \{b_n\}$

若定义

$$g_{2T}(t) = \begin{cases} a \cos\left(\frac{\pi}{2T_S} t\right), & -T_S \leq t \leq T_S \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

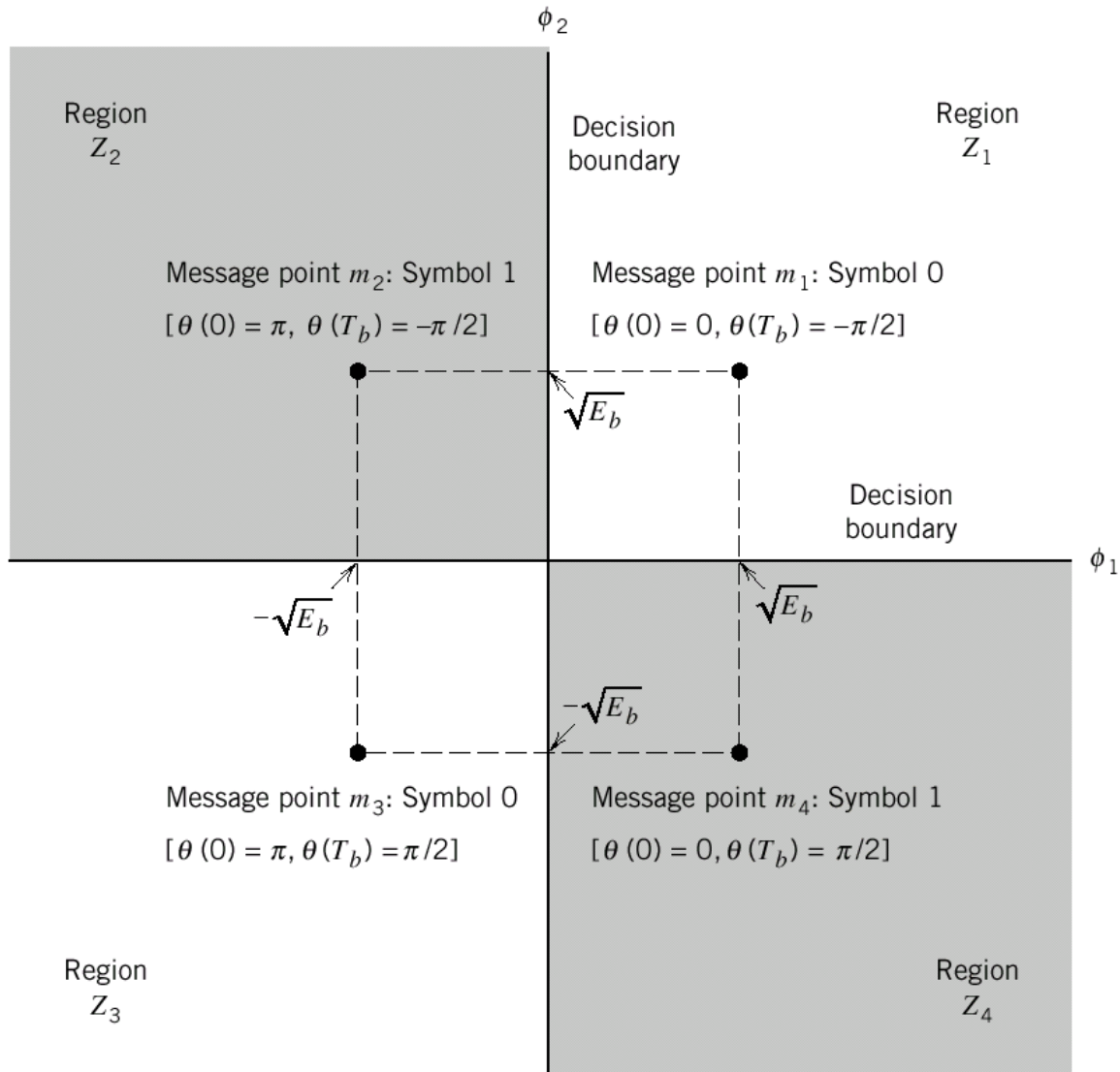
最小频移键控(MSK)(续)



则MSK信号进一步可以表示为序列 $\{b_n\}$ 的加权和

$$s_{MSK}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(b_{2n-1} g_{2T}(t - 2nT_S) \cos \omega_c t - b_{2n} g_{2T}(t - (2n+1)T_S) \sin \omega_c t \right)$$

Signal-space diagram for MSK system.



最小频移键控 (MSK) (续)



◆ MSK信号的正交表达形式，MSK信号可展开表示为：

$$s(t) = a_k \cos \frac{\pi t}{2T} \cos 2\pi f_0 t - b_k \sin \frac{\pi t}{2T} \sin 2\pi f_0 t \quad kT < t < (k+1)T$$

其中

$$a_k = \cos x_k = \pm 1 \quad b_k = d_k \cos x_k = \pm 1$$

上式中， a_k 和 b_k 是取值为+1或-1的随机变量。因此可直接用同步流 $d_I(t)$ 和正交流 $d_Q(t)$ 替代 a_k 和 b_k ，其中

$$d_I(t) = d_0, d_2, d_4, \dots \text{ (even bits)}$$

$$d_Q(t) = d_1, d_3, d_5, \dots \text{ (odd bits)}$$

直接由式 $s(t) = d_I(t) \cos \frac{\pi t}{2T} \cos 2\pi f_0 t + d_Q(t) \sin \frac{\pi t}{2T} \sin 2\pi f_0 t$

产生MSK信号。

最小频移键控 (MSK) (续)



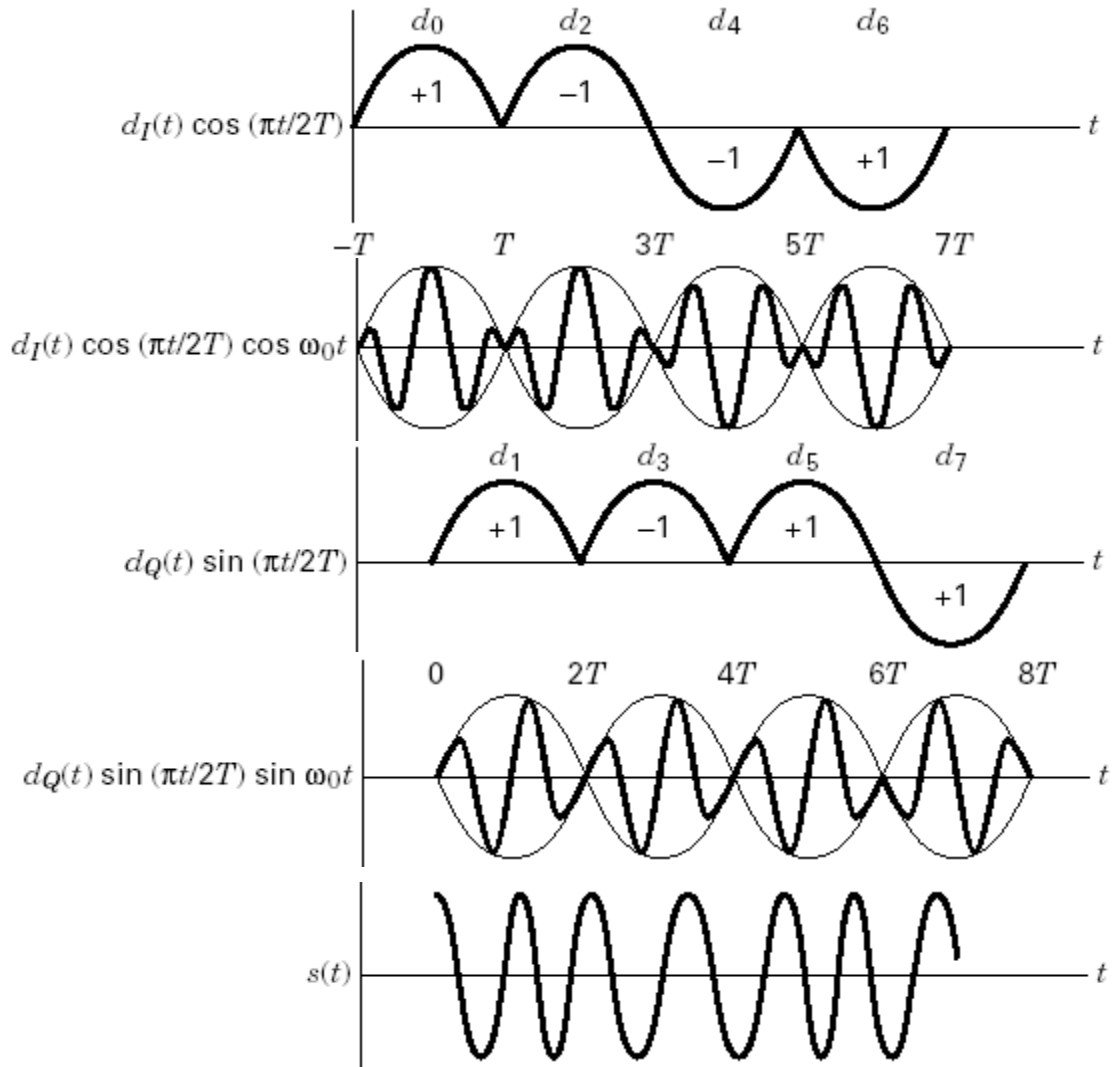
◆ MSK信号的波形
修正的I比特流

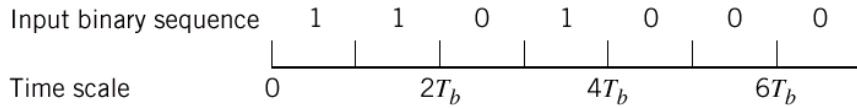
I比特流调制信号

修正的Q比特流

Q比特流调制信号

MSK信号



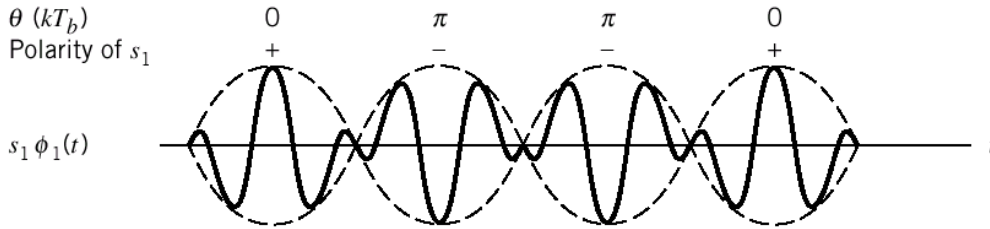


(a)

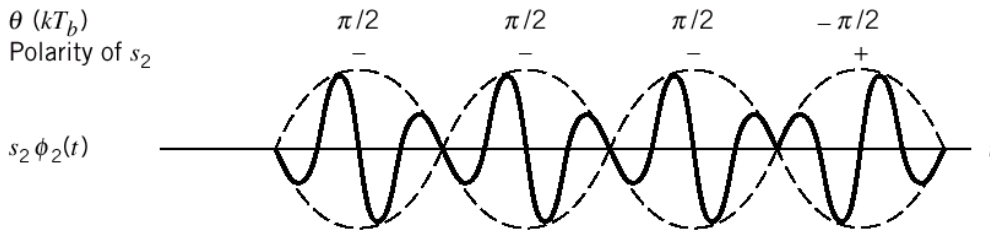
(a) Input binary sequence.



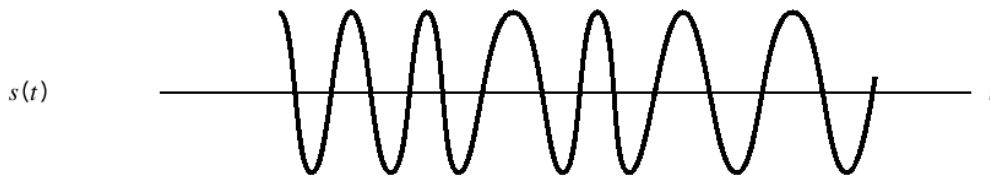
(b) Waveform of scaled time function $s_1\phi_1(t)$. (c) Waveform of scaled time function $s_2\phi_2(t)$. (d) Waveform of the MSK signal $s(t)$ obtained by adding $s_1\phi_1(t)$ and $s_2\phi_2(t)$ on a bit-by-bit basis.



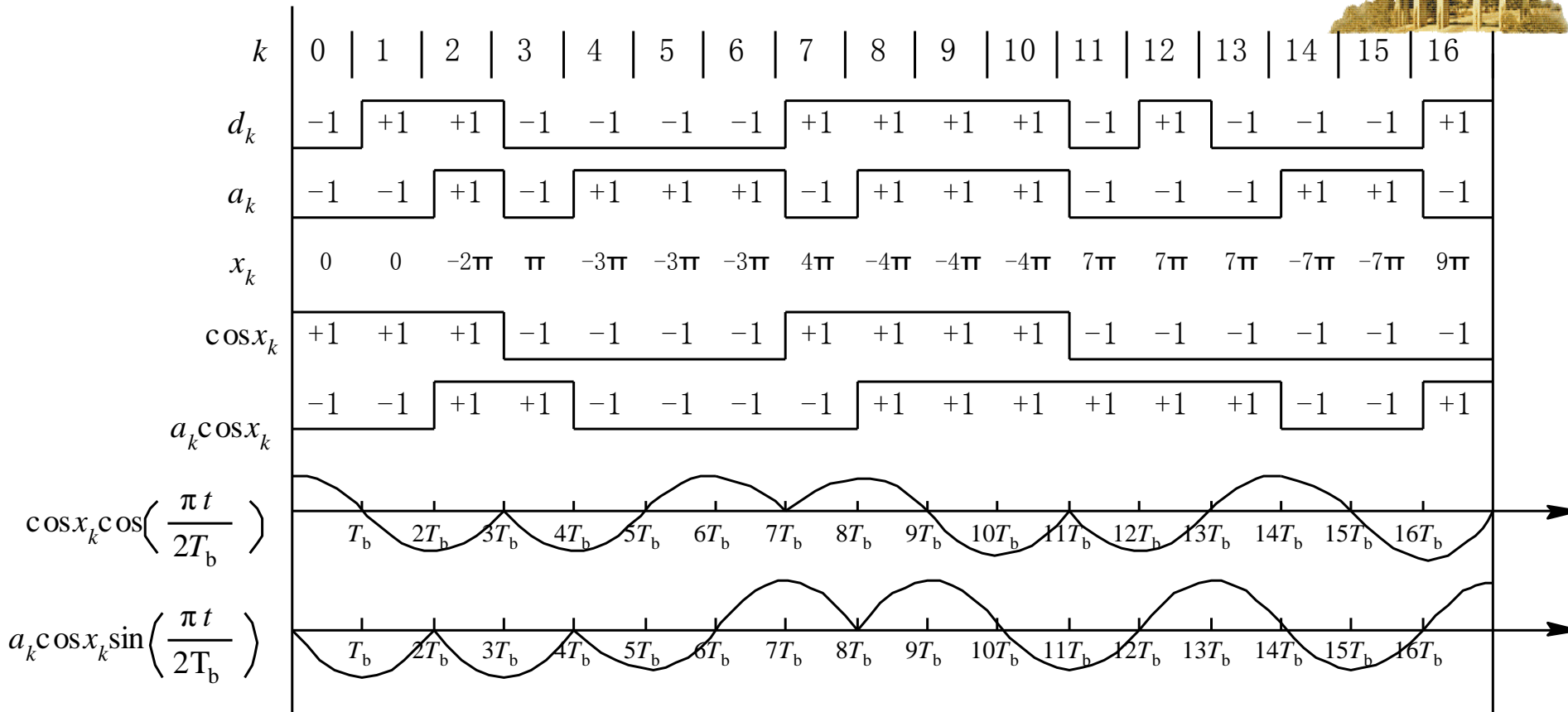
(b)



(c)



(d)



MSK的输入数据与各支路数据及基带波形的关系

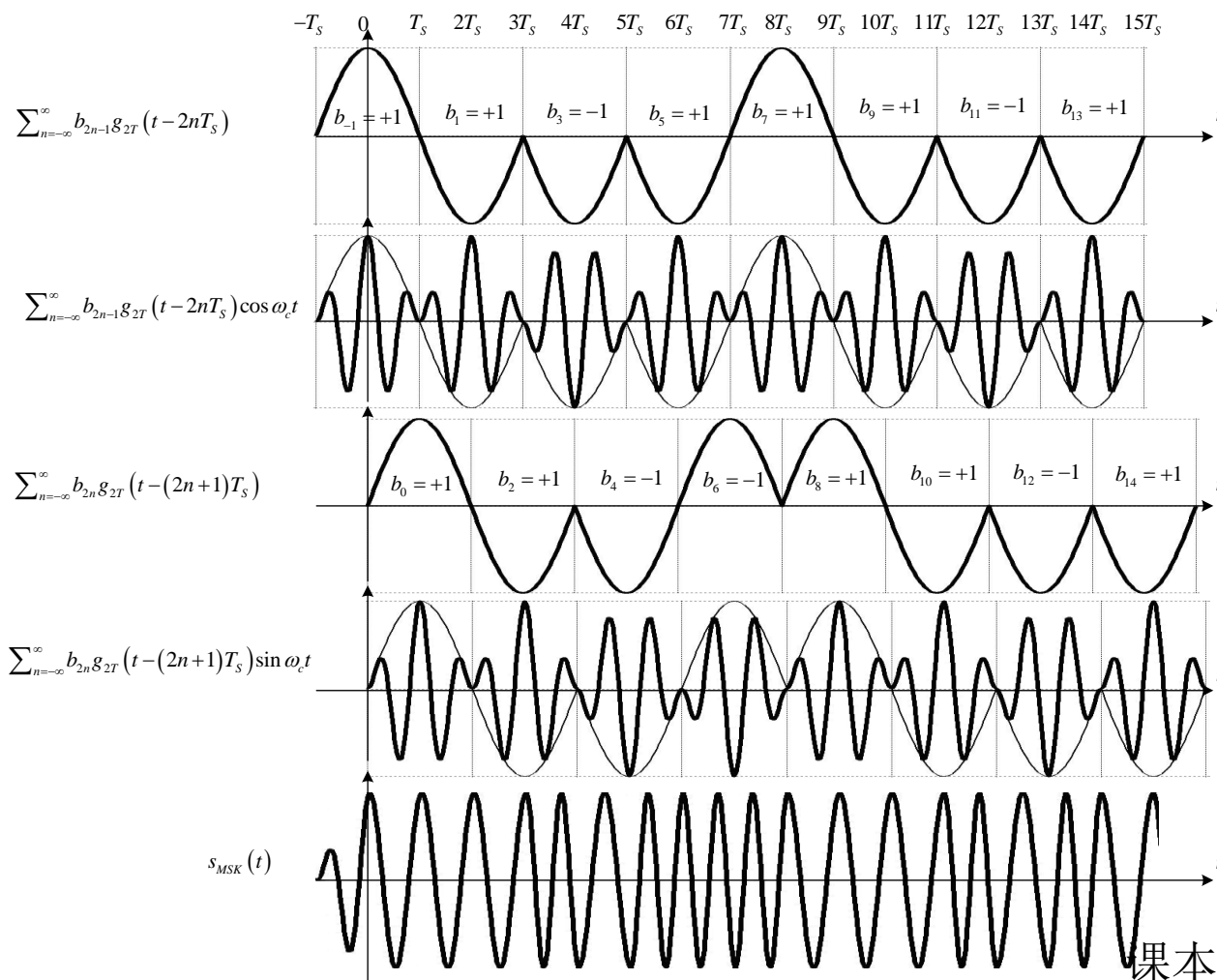
最小频移键控(MSK)(续)



MSK信号的波形示例：输入的序列 $\{b_n\}$ 为

+1+1+1-1-1+1-1+1+1+1+1-1-1+1+1

由图可见最后合成的 $s_{MSK}(t)$ 信号波形具有连续的相位。



最小频移键控(MSK)(续)



MSK信号的功率谱

若记 $\{b_{2n-1}\}$ 与 $\{b_{2n}\}$ 的自相关函数为 $R_{\{b_{2n-1}\}}$ 和 $R_{\{b_{2n}\}}$

其相应的傅里叶级数为

$$P_{\{b_{2n-1}\}}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{\{b_{2n-1}\}}(n) e^{-j2\pi f(2n-1)(2T_S)}$$

$$P_{\{b_{2n}\}}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{\{b_{2n}\}}(n) e^{-j2\pi f(2n)(2T_S)}$$

且

$$g_{2T}(t) \Leftrightarrow G_{2T}(f) = \frac{4aT_S \cos(2\pi fT_S)}{\pi \sqrt{16T_S^2 f^2 - 1}} = \frac{4}{\pi} \sqrt{2E_b T_S} \frac{\cos(2\pi fT_S)}{\sqrt{16T_S^2 f^2 - 1}}$$

则可得
$$P_s(f) = \frac{1}{4T_S} \left(P_{\{b_{2n-1}\}}(f) + P_{\{b_{2n}\}}(f) \right) \left(|G_{2T}(f + f_c)|^2 + |G_{2T}(f - f_c)|^2 \right)$$

$$= \frac{1}{4T_S} P_{\{b_n\}}(f) \left(|G_{2T}(f + f_c)|^2 + |G_{2T}(f - f_c)|^2 \right)$$

式中

$$P_{\{b_n\}}(f) = P_{\{b_{2n-1}\}}(f) + P_{\{b_{2n}\}}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{\{b_n\}}(n) e^{-j2\pi fn(2T_S)}$$

最小频移键控(MSK)(续)

假定序列 $\{b_n\}$ 先验等概且互不相关，则有 $R_{\{b_n\}}(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$

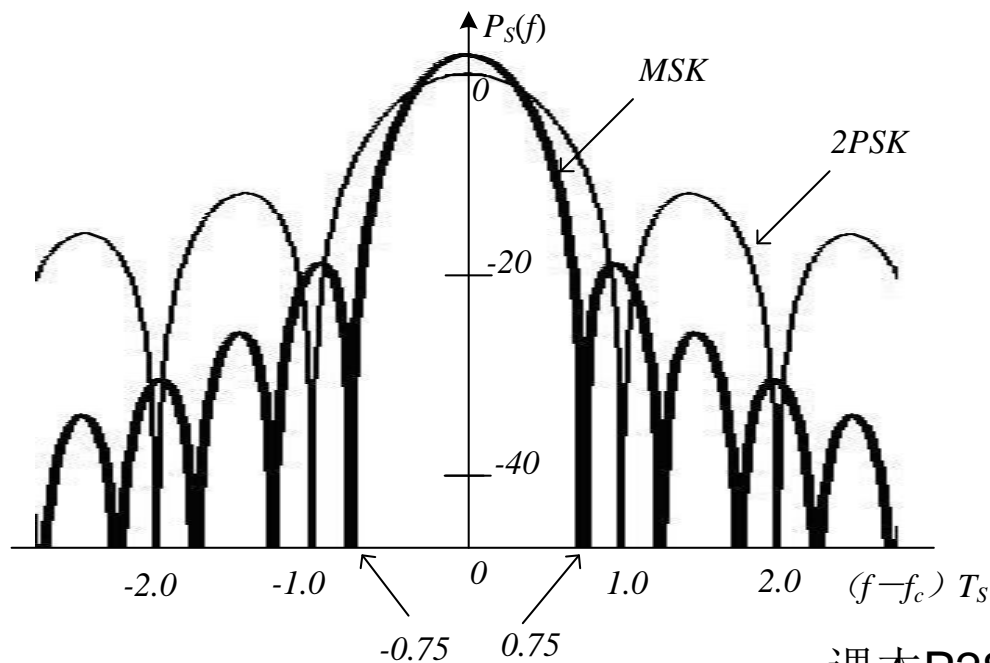


由此MSK信号的功率谱可简化为

$$P_s(f) = \frac{8E_b}{\pi^2} \left(\left| \frac{\cos(2\pi(f+f_c)T_s)}{16T_s^2(f+f_c)^2-1} \right|^2 + \left| \frac{\cos(2\pi(f-f_c)T_s)}{16T_s^2(f-f_c)^2-1} \right|^2 \right)$$

MSK信号的功率谱的旁瓣比2PSK信号的功率谱的旁瓣显著下降。

(与2FSK功率谱的比较可自行分析)



MSK信号也可以将非归零的二进制序列直接送入FM调制器中来产生，这里要求FM调制器的调制指数为0.5。

MSK信号的单边功率谱表达式为

$$P_{\text{MSK}}(f) = \frac{8T_b}{\pi^2 [1 - 16(f - f_c)^2 T_b^2]} \cos^2 [2\pi(f - f_c)T_b]$$

MSK信号的功率谱如图2-9所示。图中还给出了QPSK信号的功率谱。

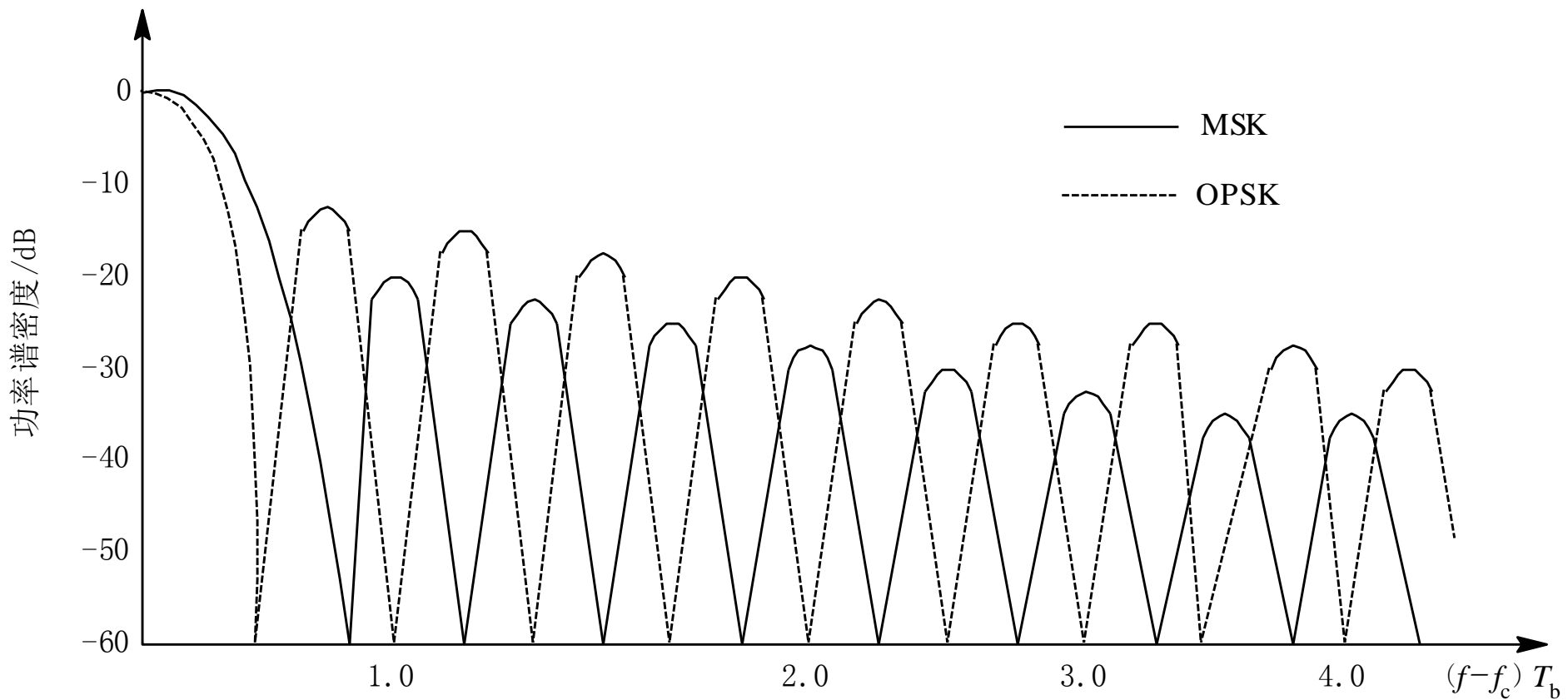


图 MSK信号的功率谱

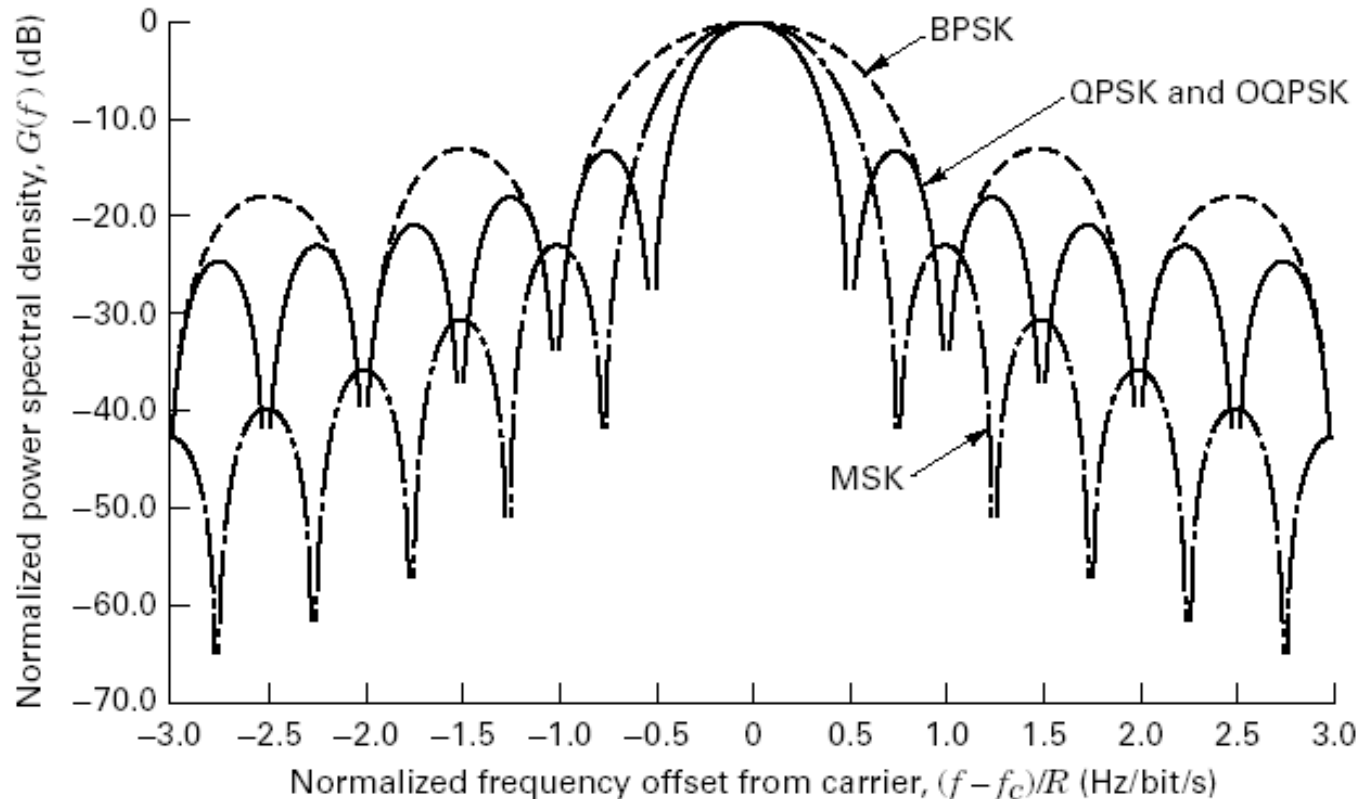
最小频移键控 (MSK) (续)



◆ BPSK、QPSK、OQPSK和MSK信号功率密度谱比较

QPSK/OQPSK: $G(f) = 2PT \left(\frac{\sin 2\pi fT}{2\pi fT} \right)^2$ MSK: $G(f) = \frac{16PT}{\pi^2} \left(\frac{\cos 2\pi fT}{1 - 16f^2T^2} \right)^2$

MSK 信号有最好的频谱特性



最小频移键控(MSK)(续)

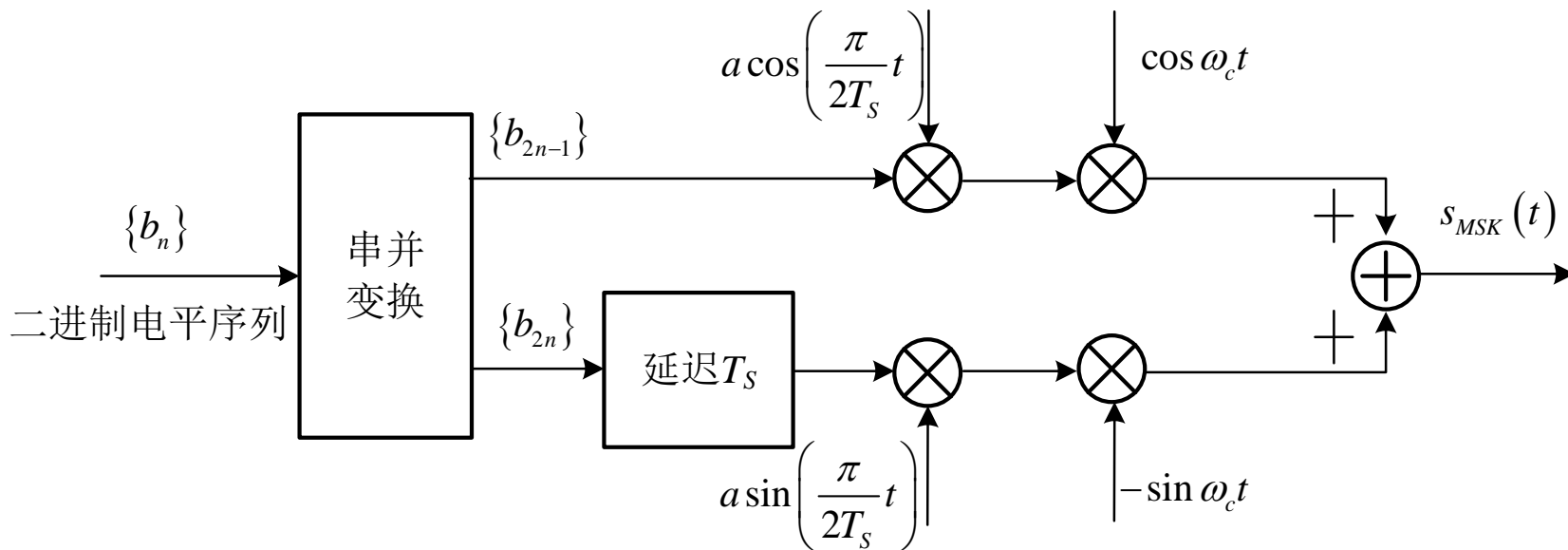


MSK信号的调制

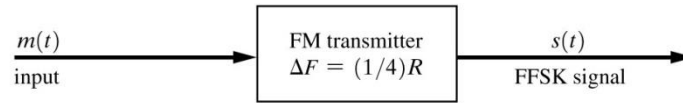
由式

$$s_{MSK}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(b_{2n-1} g_{2T}(t - 2nT_s) \cos \omega_c t - b_{2n} g_{2T}(t - (2n+1)T_s) \sin \omega_c t \right)$$

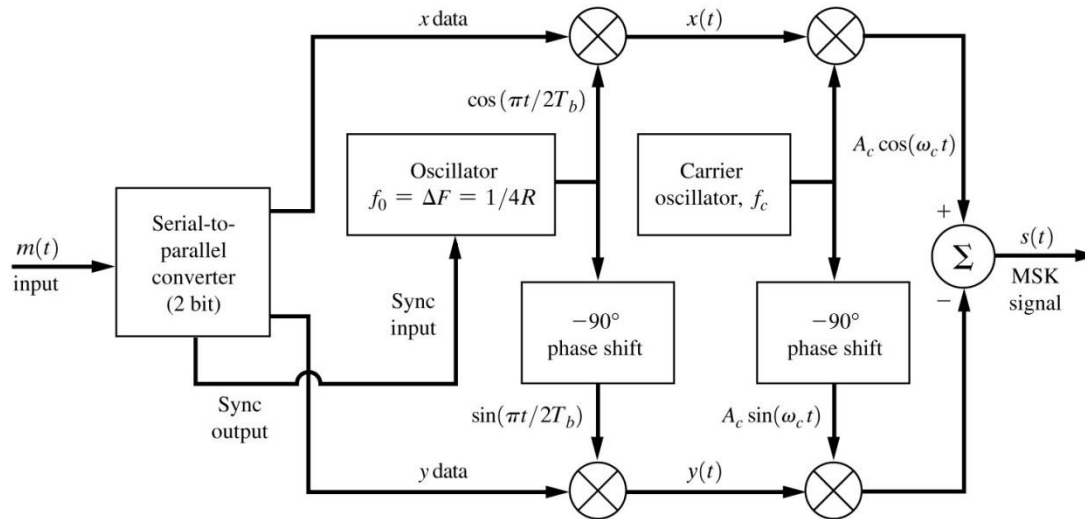
可知MSK信号的调制可通过如下图所示的方法实现



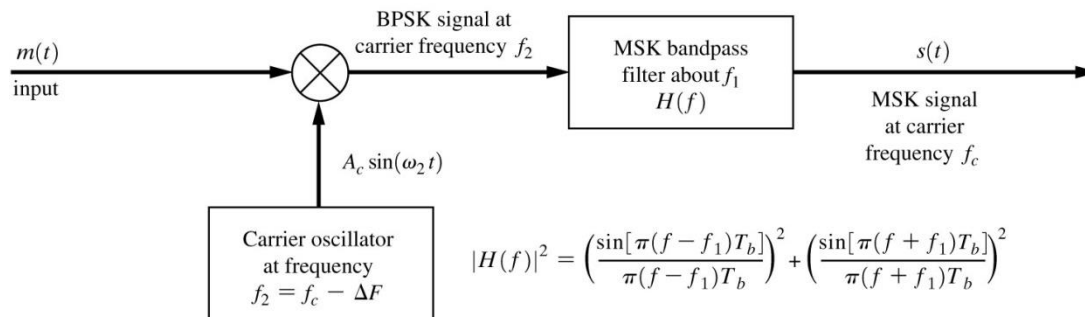
Generation of MSK signals.



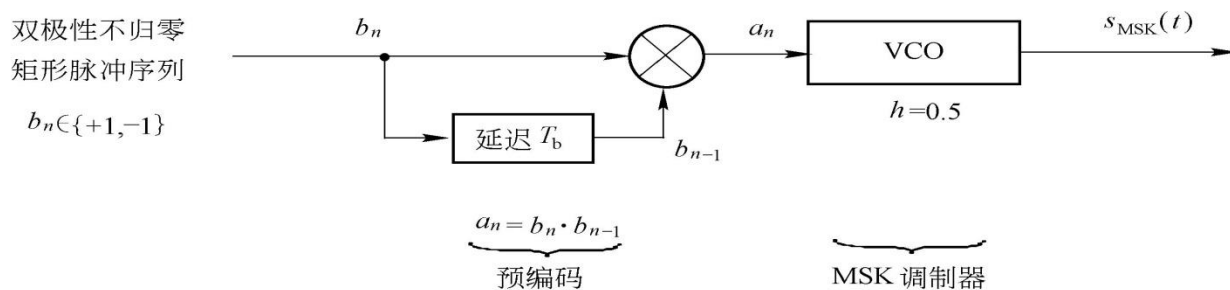
(a) Generation of Fast Frequency-Shift Keying (FFSK)



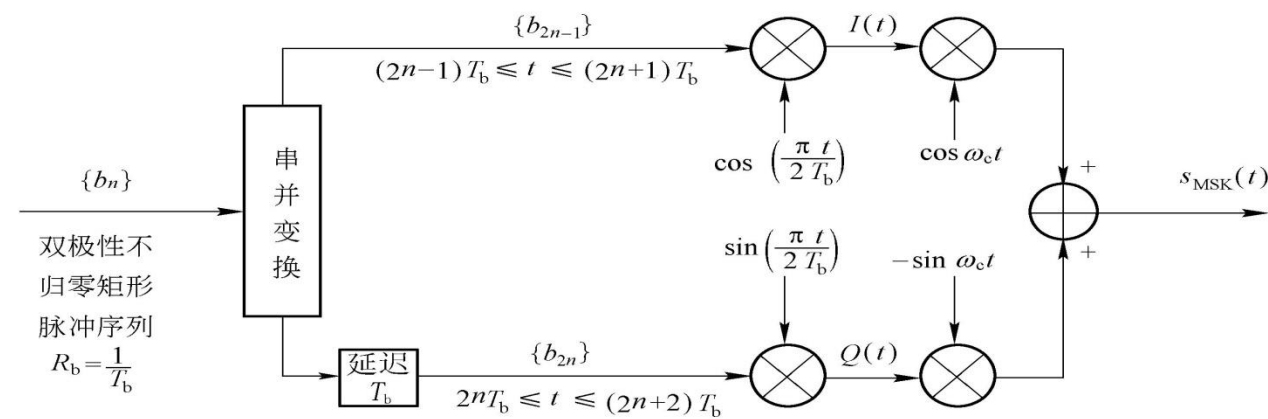
(b) Parallel Generation of Type I MSK (This will generate FFSK if a differential encoder is inserted at the input.)



(c) Serial Generation of MSK



(a) 加预编码的 MSK 调制器



(b) 利用正交调制法产生MSK信号

加预编码的MSK调制



MSK信号可以采用鉴频器解调，也可以采用相干解调。相干解调的框图如下页图所示。图中采用平方环来提取相干载波。从图中可以看出经过低通滤波后， I 支路和 Q 支路的输出分别为

$$\begin{cases} \cos x_k \cos^2\left(\frac{\pi t}{2T_b}\right) \\ a_k \cos x_k \sin^2\left(\frac{\pi t}{2T_b}\right) \end{cases}$$

通过对 I 支路和 Q 支路交替采样就可以恢复 b_k ，再经差分译码后就可以恢复 a_k 。

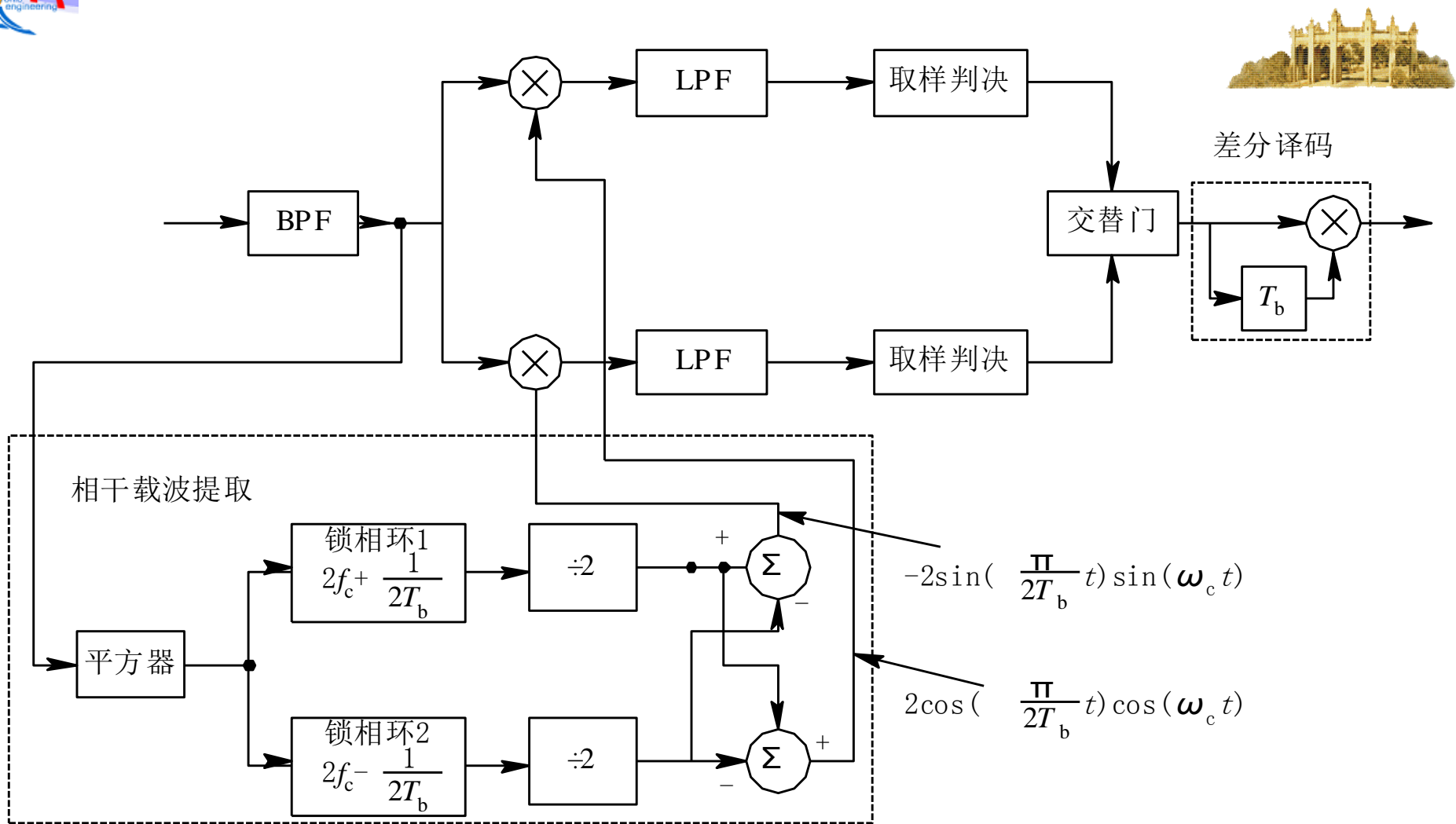


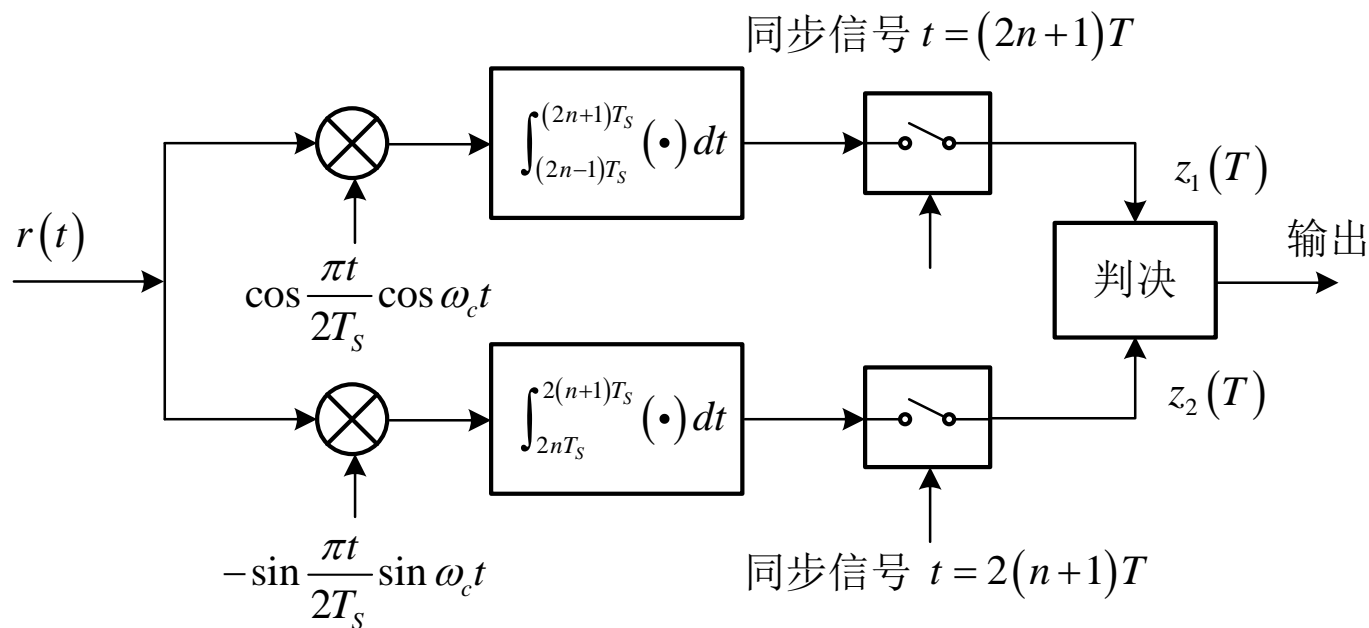
图 MSK相干解调框图

最小频移键控(MSK)(续)



MSK信号的解调

MSK信号的相关接收机可如下图所示



注意，相关器中的积分器的积分区间是两个码元周期，且两个积分器的积分区间有一个码元周期的时间差异；

另外，判决时刻也有一个码元周期的时间差异。

最小频移键控(MSK)(续)



因为

$$\begin{aligned} & \int_{-T_S}^{T_S} g_{2T}(t) \cos \omega_c t g_{2T}(t - T_S) \sin \omega_c t dt \\ &= \int_{-T_S}^{T_S} a^2 \cos \left(\frac{\pi}{2T_S} t \right) \sin \left(\frac{\pi}{2T_S} t \right) \cos \omega_c t \sin \omega_c t dt \\ &= \frac{a^2}{4} \int_{-T_S}^{T_S} \sin \left(\frac{\pi}{T_S} t \right) \sin 2\omega_c t dt = 0 \end{aligned}$$

同理有

$$\int_0^{2T_S} g_{2T}(t) \cos \omega_c t g_{2T}(t - T_S) \sin \omega_c t dt = 0$$

因此通过相关运算,

$$s_{MSK}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(b_{2n-1} g_{2T}(t - 2nT_S) \cos \omega_c t - b_{2n} g_{2T}(t - (2n+1)T_S) \sin \omega_c t \right)$$

中的两路信号可以有效地分离。

最小频移键控(MSK)(续)



MSK信号最佳接收机的误码性能分析

受高斯白噪声干扰的MSK接收信号可以表示为

$$r(t) = s_{MSK}(t) + n_w(t)$$

经相关器后上下两路的输出的信号部分分别为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-T_s}^{T_s} a \left(\cos \left(\frac{\pi}{2T_s} t \right) \cos \omega_c t \right)^2 dt \\ &= a \int_{-T_s}^{T_s} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{T_s} t \right) \right) \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega_c t) dt \\ &= \frac{1}{4} a \int_{-T_s}^{T_s} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{T_s} t \right) + \cos 2\omega_c t + \cos \left(\frac{\pi}{T_s} t \right) \cos 2\omega_c t \right) dt = \frac{1}{2} a T_s \end{aligned}$$

$$V' = \int_0^{2T_s} a \left(\sin \left(\frac{\pi}{T_s} t \right) \sin 2\omega_c t \right)^2 dt = \frac{1}{2} a T_s$$

最小频移键控(MSK)(续)



经相关器后(上下支路)的高斯噪声的统计特性

均值

$$E[N_1] = E \left[\int_{-T_s}^{T_s} n_w(t) \cos\left(\frac{\pi}{2T_s}t\right) \cos \omega_c t dt \right] = \int_{-T_s}^{T_s} E[n_w(t)] \cos\left(\frac{\pi}{2T_s}t\right) \cos \omega_c t dt = 0$$

方差

$$\begin{aligned} \sigma_N^2 &= E \left[(N_1 - E[N_1])^2 \right] = E \left[(N_1)^2 \right] \\ &= E \left[\int_{-T_s}^{T_s} n_w(t_1) \cos\left(\frac{\pi}{2T_s}t_1\right) \cos \omega_c t_1 dt_1 \int_{-T_s}^{T_s} n_w(t_2) \cos\left(\frac{\pi}{2T_s}t_2\right) \cos \omega_c t_2 dt_2 \right] \\ &= \int_{-T_s}^{T_s} \int_{-T_s}^{T_s} E[n_w(t_1)n_w(t_2)] \cos\left(\frac{\pi}{2T_s}t_1\right) \cos \omega_c t_1 \cos\left(\frac{\pi}{2T_s}t_2\right) \cos \omega_c t_2 dt_1 dt_2 \\ &= \int_{-T_s}^{T_s} \int_{-T_s}^{T_s} \frac{N_0}{2} \delta(t_2 - t_1) \cos\left(\frac{\pi}{2T_s}t_1\right) \cos \omega_c t_1 \cos\left(\frac{\pi}{2T_s}t_2\right) \cos \omega_c t_2 dt_1 dt_2 \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-T_s}^{T_s} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2T_s}t_2\right) \cos \omega_c t_2 \right)^2 dt_2 = \frac{N_0}{2} \frac{T_s}{2} = \frac{N_0}{4} T_s \end{aligned}$$

最小频移键控(MSK)(续)



对每个支路来说，均是对极信号，由此可得误符号率

$$\begin{aligned} P_{e1} = P_{e2} &= Q\left(\frac{V - (-V)}{2\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{V}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{aT_s/2}{\sqrt{N_0T_s/4}}\right) \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{2(a^2T_s/2)}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \end{aligned}$$

在先验等概的条件下总的误码率为

$$P_E = \frac{1}{2}P_{e1} + \frac{1}{2}P_{e2} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

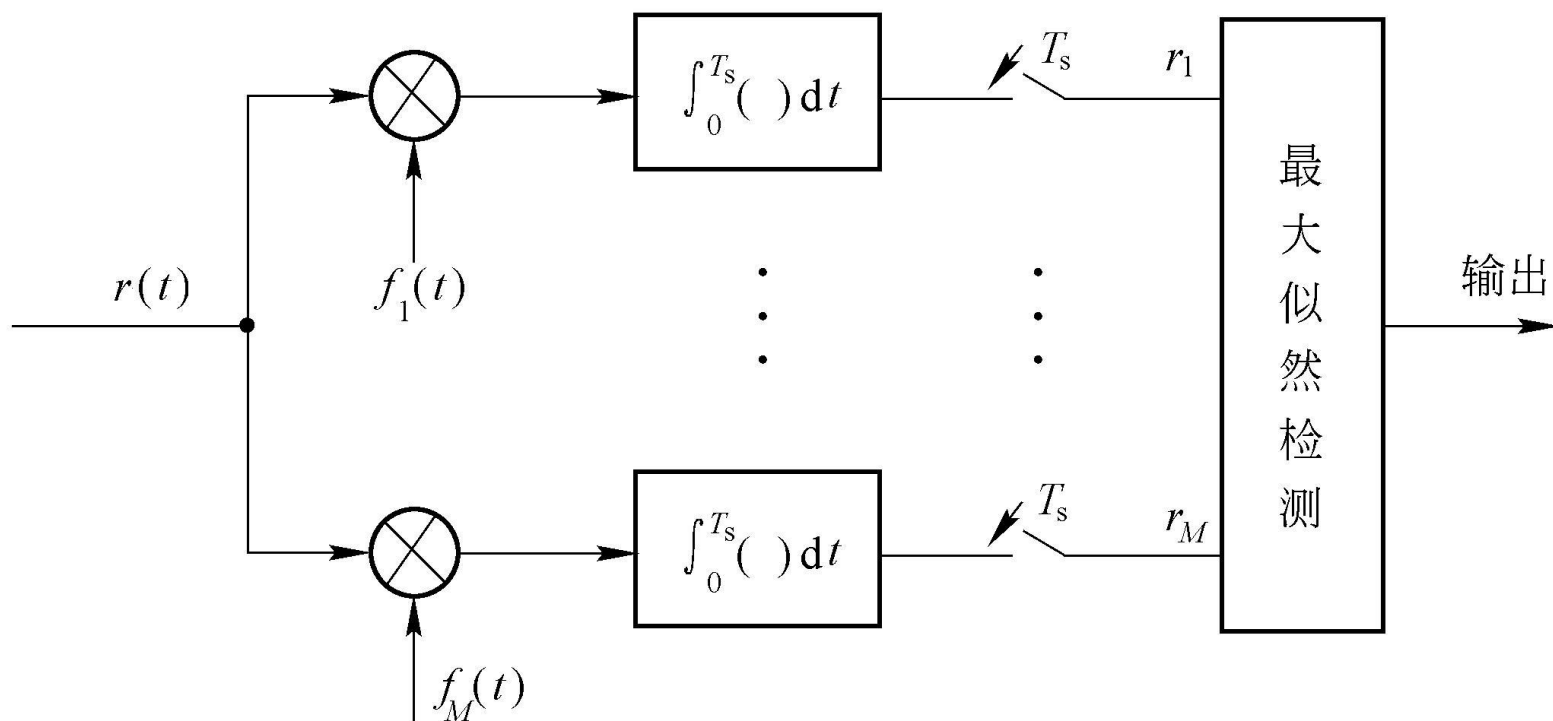
最小频移键控 (MSK) (续)



◆ MSK调制信号的性质

- $s(t)$ 信号的包络不变;
- 比特变化时射频 (RF) 载波相位连续;
- $s(t)$ 可看成频率在 $f_0 + 1/4T$ 和 $f_0 - 1/4T$ 间变化的FSK信号, 最小频率间隔:

$$\left(f_0 + \frac{1}{4T}\right) - \left(f_0 - \frac{1}{4T}\right) = \frac{1}{2T}$$



加预编码MSK的最佳接收

最小频移键控 (MSK)



◆ QPSK、OQPSK和MSK信号差错性能

在理想的情况下，在相干解调（两正交信号能够完全分离）的条件下，QPSK、OQPSK和MSK信号与BPSK信号有相同的误比特率。

高斯滤波最小频移键控(GMSK)



通过MSK调制，可用获得相位连续变化的传输信号。

但有MSK信号的相位跳变，当相邻码元取值发生变化

$$\{b_n\}: \pm 1 \rightarrow \mp 1$$

MSK信号的频率仍会发生突变，导致频谱泄漏。

高斯滤波最小频移键控(GMSK): MSK原理的基础上，进一步改善信号的相位变化的过渡特性，使频率变化具有连续性。



尽管MSK信号已具有较好的频谱和误比特率性能，但仍不能满足功率谱在相邻频道取值(即邻道辐射)低于主瓣峰值60 dB以上的要求。这就要求在保持MSK基本特性的基础上，对MSK的带外频谱特性进行改进，使其衰减速度加快。

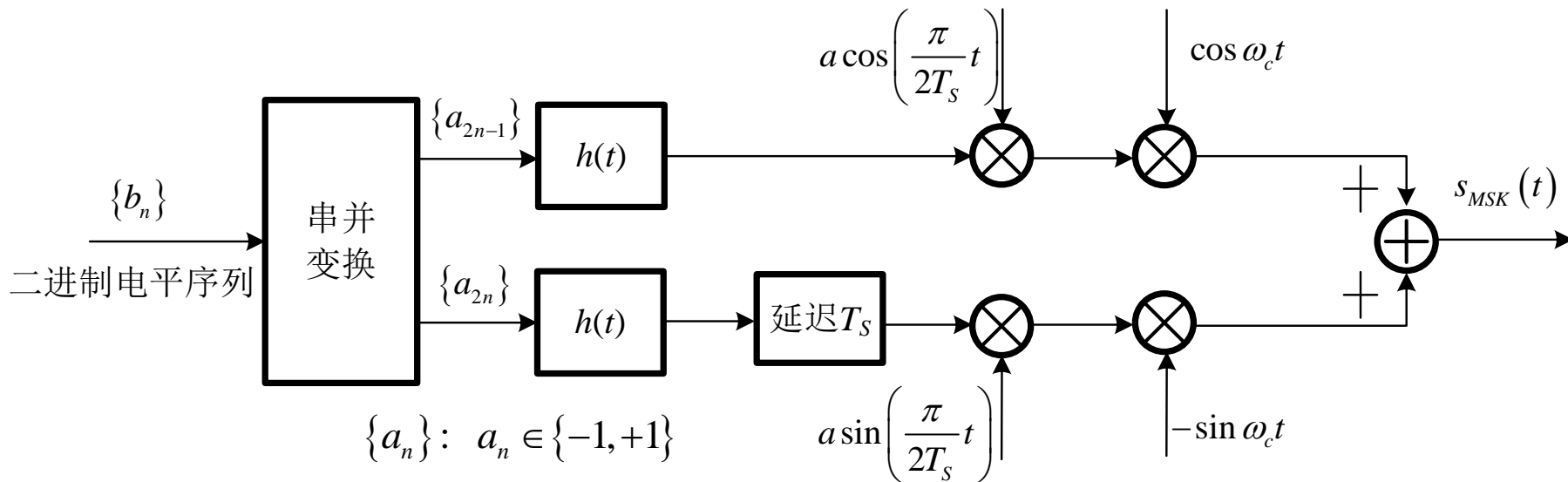
由前面可以看出，MSK信号可由FM调制器来产生，由于输入二进制非归零脉冲序列具有较宽的频谱，从而导致已调信号的带外衰减较慢。如果将输入信号经过滤波以后再送入FM调制，必然会改善已调信号的带外特性。

GMSK信号就是基带信号通过在FM调制器前加入高斯低通滤波器(称为预调制滤波器)而产生的。

高斯滤波最小频移键控(GMSK)(续)



GMSK调制系统：在MSK调制器基础上加入高斯特性滤波器。



高斯特性滤波器冲激响应：

$$h(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp\left(-\frac{\pi^2}{\alpha^2} t^2\right)$$

$h(t)$ 的傅里叶变换：

$$H(f) = \mathcal{F}^{-1}[h(t)] = \exp(-\alpha^2 f^2)$$

高斯滤波最小频移键控(GMSK)(续)



α 是高斯滤波器的参数，若取定其3dB带宽为 W_{3dB}

则由
$$H^2(W_{3dB}) = \exp(-2\alpha^2 W_{3dB}^2) = \frac{1}{2}$$

可得
$$\alpha = \sqrt{\frac{\ln 2}{2}} \frac{1}{W_{3dB}}$$

未经高斯滤波器滤波前的信号

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT_S)$$

其中 $g_T(t)$ 为门函数

$$g_T(t) = u\left(t + \frac{T_S}{2}\right) - u\left(t - \frac{T_S}{2}\right)$$

滤波器输出：

$$g(t) = g_T(t) * h(t)$$

高斯滤波最小频移键控(GMSK)(续)



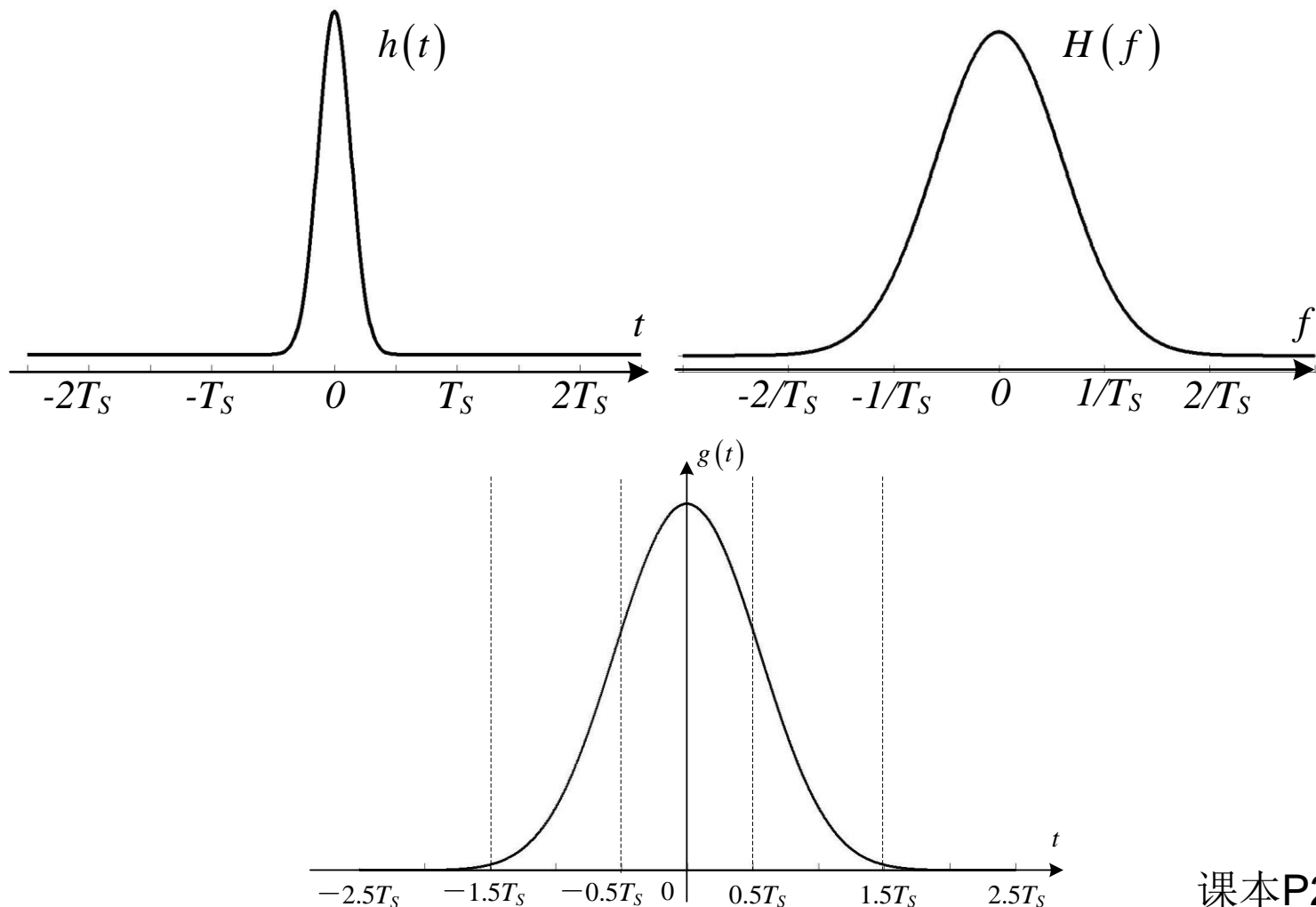
由此可得

$$\begin{aligned}g(t) &= g_T(t) * h(t) = \frac{dg_T(t)}{dt} * \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \\&= \frac{d}{dt} \left(u\left(t + \frac{T_S}{2}\right) - u\left(t - \frac{T_S}{2}\right) \right) * \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \\&= \left(\delta\left(t + \frac{T_S}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{T_S}{2}\right) \right) * \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{\pi^2}{\alpha^2} \tau^2\right) d\tau \\&= \left(\delta\left(t + \frac{T_S}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{T_S}{2}\right) \right) * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{2}\pi t}{\alpha}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\&= Q\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{\alpha} \left(t - \frac{T_S}{2}\right)\right) - Q\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{\alpha} \left(t + \frac{T_S}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

高斯滤波最小频移键控(GMSK)(续)



高斯滤波器参数为 $\alpha = \sqrt{\frac{\ln 2}{2}} \frac{T_S}{0.3}$ 时的信号波形



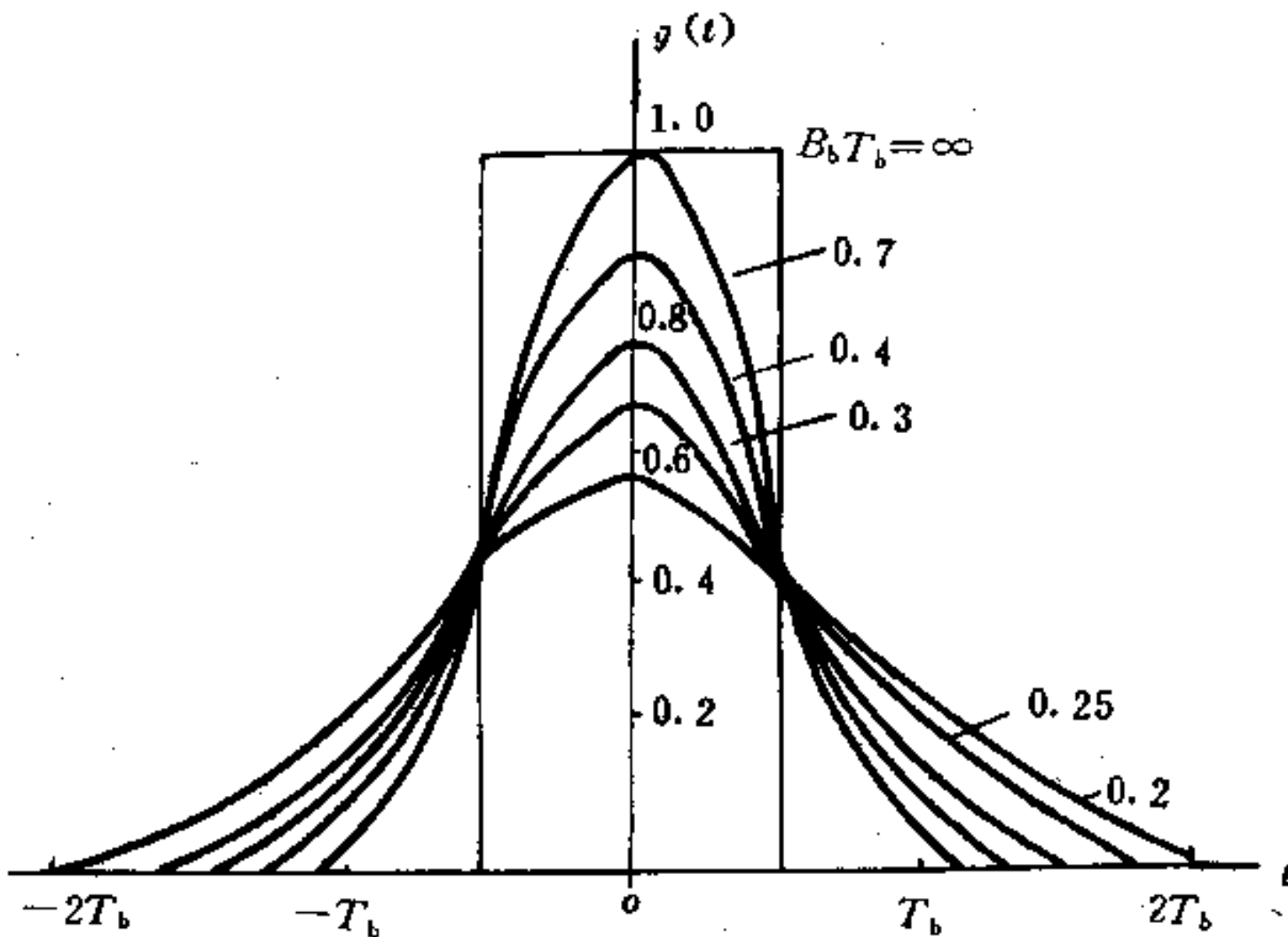


图 高斯滤波器的矩形脉冲响应

高斯滤波最小频移键控(GMSK)(续)



由此，GMSK信号可以表示为

$$s_{GMSK}(t) = a \cos(2\pi f_c t + \theta(t)) = a \cos\left(2\pi f_c t + \frac{\pi}{2T_S} \int_{-\infty}^t \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT_S) dt\right)$$

其中携带信息的相位变化特性

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2T_S} \int_{-\infty}^t \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(\tau - nT_S) d\tau = \frac{\pi}{2T_S} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^t g(\tau - nT_S) d\tau$$



分析波形函数 $g(t)$ 的有关特性($\alpha = \sqrt{\frac{\ln 2}{2}} \frac{T_s}{0.3}$)

可以证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} Q\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{\alpha}\left(\tau - \frac{T_s}{2}\right)\right) - Q\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{\alpha}\left(\tau + \frac{T_s}{2}\right)\right) d\tau = T_s$$

根据 $g(t)$ 的特点, 且有

$$g(t) \approx 0; \quad |t| > \left(N + \frac{1}{2}\right)T_s, \quad N \geq 2$$

示例:

$$\begin{aligned} g(2.5T_s) &= Q\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{\alpha} 2T_s\right) - Q\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{\alpha} 3T_s\right) = Q\left(\frac{1.2\pi}{\sqrt{\ln 2}}\right) - Q\left(\frac{1.8\pi}{\sqrt{\ln 2}}\right) \\ &\approx 2.98 \times 10^{-6} - 5.53 \times 10^{-12} \approx 0 \end{aligned}$$

$$g(-2.5T_s) = Q\left(-\frac{1.8\pi}{\sqrt{\ln 2}}\right) - Q\left(-\frac{1.2\pi}{\sqrt{\ln 2}}\right) = Q(-6.792) - Q(-4.528) \approx 1 - 1 = 0$$

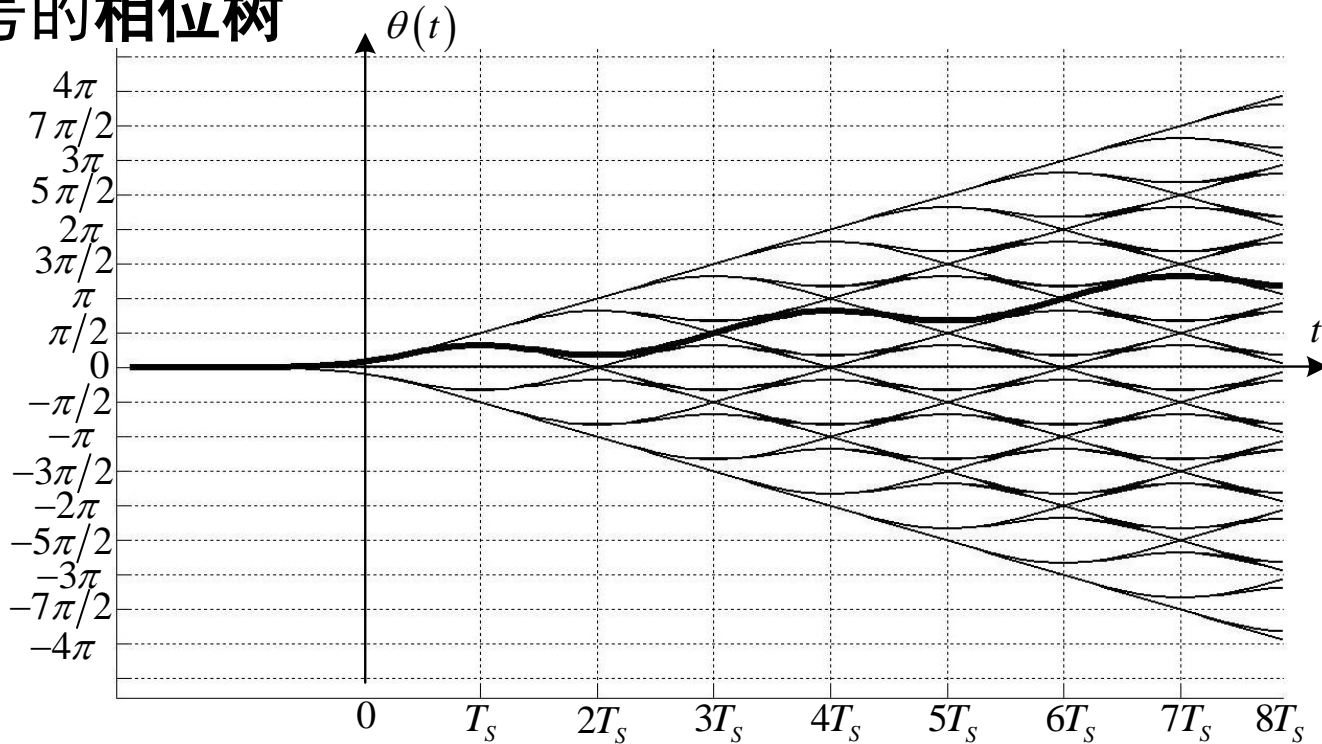
高斯滤波最小频移键控(GMSK)(续)



可见对每一个波形脉冲信号 $g(\tau - nT_s)$, 只需考虑其在

$$nT_s - \left(N + \frac{1}{2}\right)T_s \leq t < nT_s + \left(N + \frac{1}{2}\right)T_s; \quad N = 2 \text{ 期间的影响。}$$

GMSK信号的相位树



其中加重的曲线反映输入 $\{a_n\}$: $+1 -1 +1 +1 -1 +1 +1 -1 +1$ 时相位取值

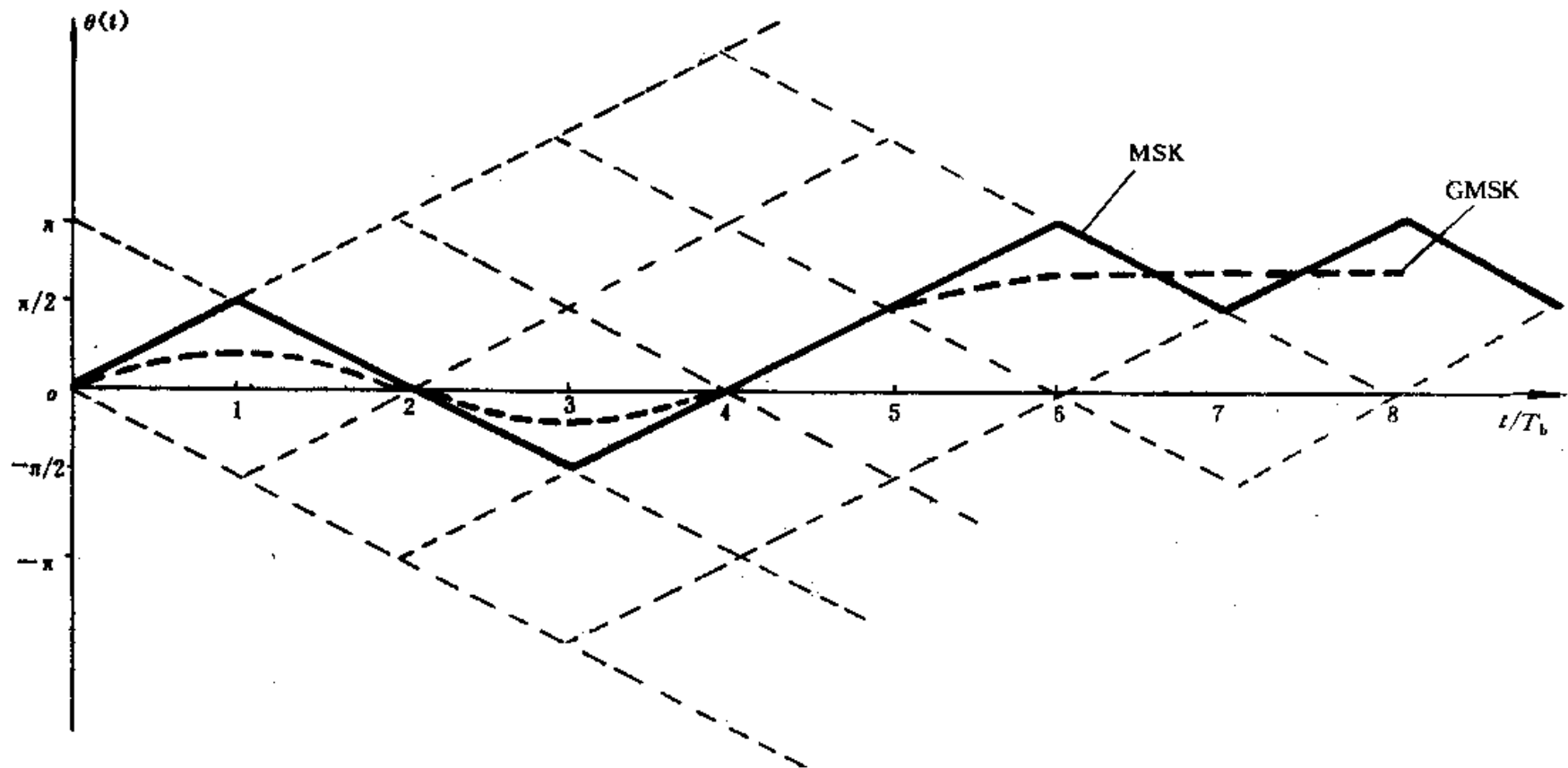


图 GMSK的相位轨迹

GMSK信号的波形和相位路径

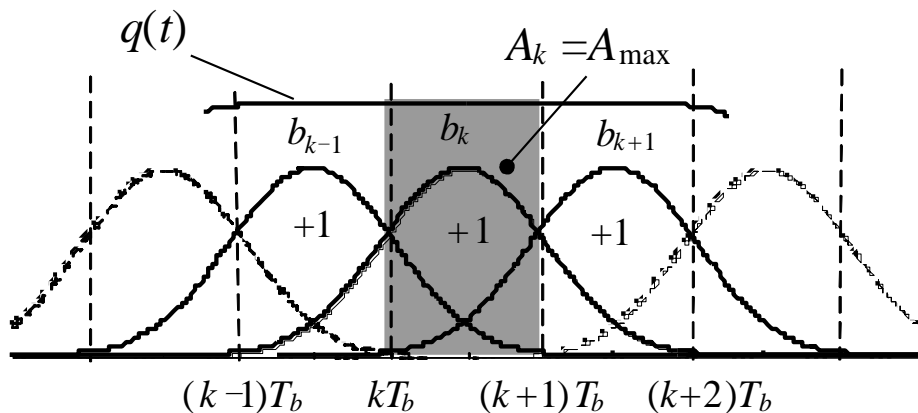


图 3.13 $q(t)$ 曲线下的面积最大

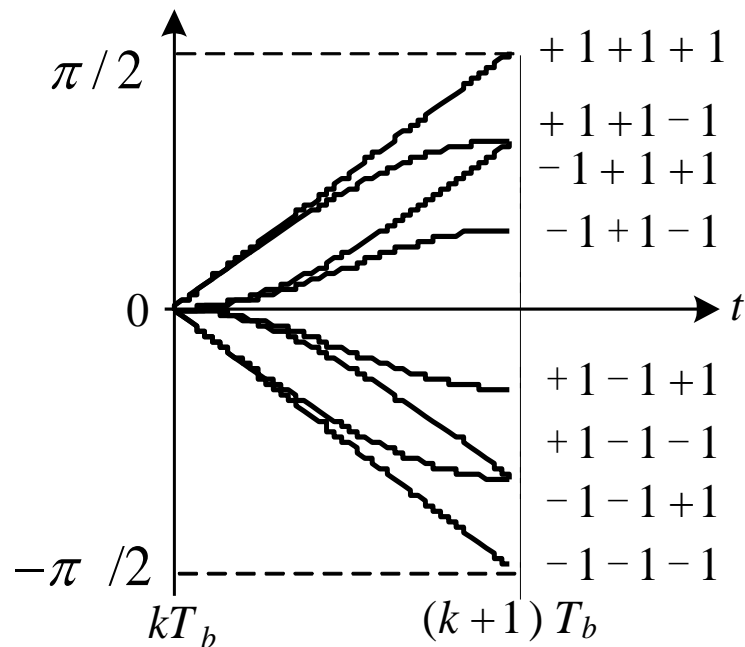


图 3.14 相位的8种状态



从图中可以看出，GMSK通过引入**可控的码间干扰**(即部分响应波形)来达到平滑相位路径的目的，它消除了MSK相位路径在码元转换时刻的相位转折点。从图中还可以看出，GMSK信号在一码元周期内的相位增量，不像MSK那样固定为 $\pm\pi/2$ ，而是随着输入序列的不同而不同。

可得

$$S(t) = \cos(\omega_c t + \theta(\tau)) = \cos \theta(t) \cos \omega_c t - \sin \theta(t) \sin \omega_c t$$

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2T_b} \int_{-\infty}^t \left[\sum a_n g\left(\tau - nT_b - \frac{T_b}{2}\right) \right] d\tau$$

$$= \theta(kT_b) + \Delta\theta(t) \quad kT_b \leq t < (k+1)T_b$$

高斯滤波最小频移键控(GMSK)(续)



GMSK信号调制器

一般地，GMSK信号的相位函数的可表示为

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2T_S} \int_{-\infty}^t \sum a_n g \left(\tau - nT_S - \frac{T_S}{2} \right) d\tau$$

当 $nT_S \leq t < (n+1)T_S$ 时，相位函数亦可写作

$$\theta(t) = \theta(nT_S) + \Delta\theta(t)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta\theta(t) &= \frac{\pi}{2T_S} \int_{nT_S}^t \sum a_k g \left(\tau - kT_S - \frac{T_S}{2} \right) d\tau \\ &= \frac{\pi}{2T_S} \sum_{k=n-N}^{n+N} \int_{nT_S}^t a_k g \left(\tau - kT_S - \frac{T_S}{2} \right) d\tau \end{aligned}$$

高斯滤波最小频移键控(GMSK)(续)



考虑到 $\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} Q\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{\alpha}\left(\tau - \frac{T_s}{2}\right)\right) - Q\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{\alpha}\left(\tau + \frac{T_s}{2}\right)\right) d\tau = T_s$

且 $g(t)$ 波形的宽度近似为 $(2N+1)T_s$, 可得

$$\begin{aligned} \theta(nT_s) &= \frac{\pi}{2T_s} \int_{-\infty}^{nT_s} \sum a_k g\left(\tau - kT_s - \frac{T_s}{2}\right) d\tau \\ &= \frac{\pi}{2T_s} \sum_{k=-\infty}^{n-N} \int_{-\infty}^{(n-N)T_s} a_k g\left(\tau - kT_s - \frac{T_s}{2}\right) d\tau \\ &\quad + \frac{\pi}{2T_s} \sum_{k=n-N}^{n+N} \int_{(n-N)T_s}^{nT_s} a_k g\left(\tau - kT_s - \frac{T_s}{2}\right) d\tau \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{n-N} a_k + \frac{\pi}{2T_s} \sum_{k=n-N}^{n+N} \int_{(n-N)T_s}^{nT_s} a_k g\left(\tau - kT_s - \frac{T_s}{2}\right) d\tau \\ &= \frac{\pi}{2} L + \frac{\pi}{2T_s} \sum_{k=n-N}^{n+N} \int_{(n-N)T_s}^{nT_s} a_k g\left(\tau - kT_s - \frac{T_s}{2}\right) d\tau \end{aligned}$$

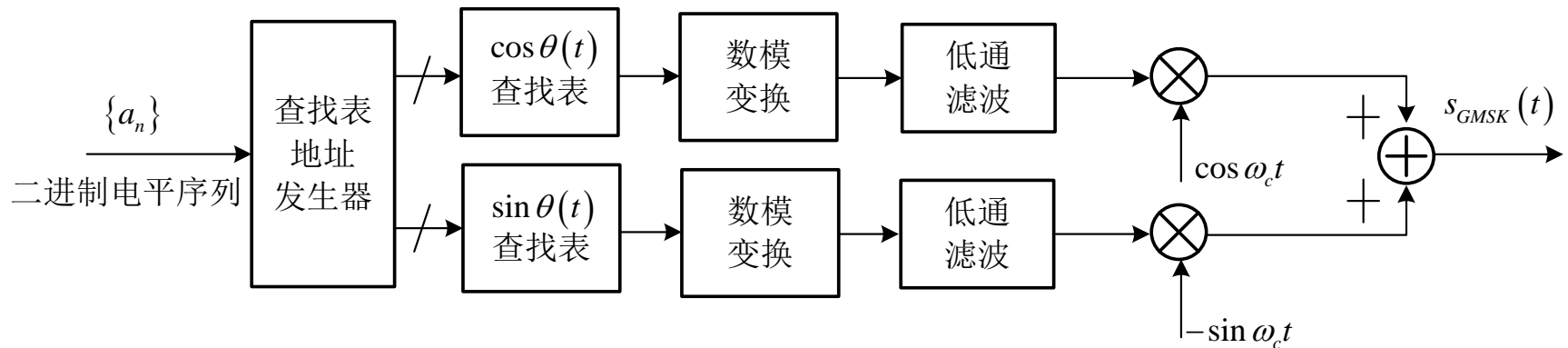
其中 $\frac{\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{n-N} a_k$ 取 $\text{mod } 2\pi$ 可能取值为 $\frac{\pi}{2} L$, $L \in \{0, 1, 2, 3\}$

高斯滤波最小频移键控(GMSK)(续)



由此 $\theta(t)$ 离散和量化后，只有限中取值，因此可将相应的函数值 $\cos \theta(t)$ 和 $\sin \theta(t)$ 制作成查找表。

GMSK调制器可通过如下的方法实现



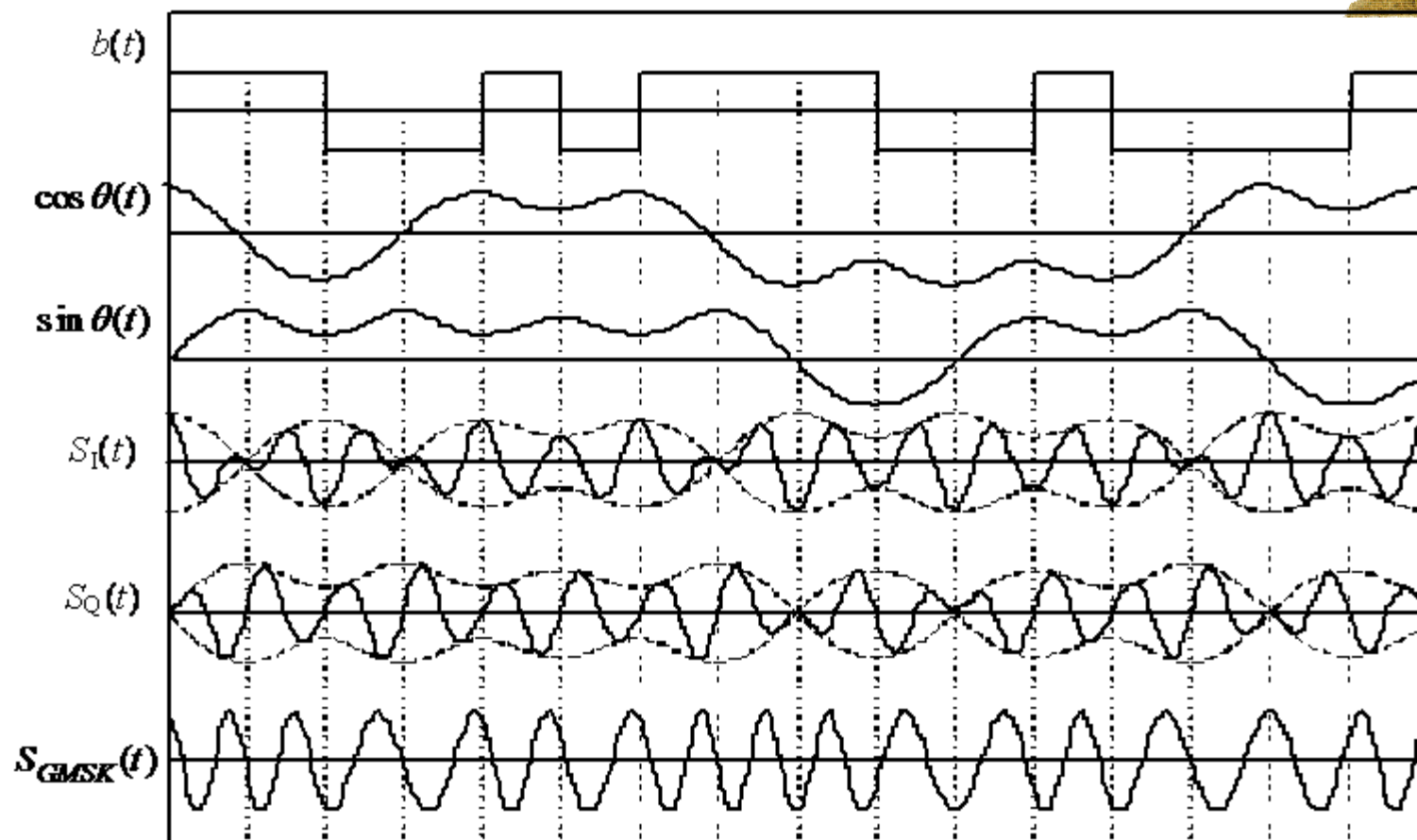


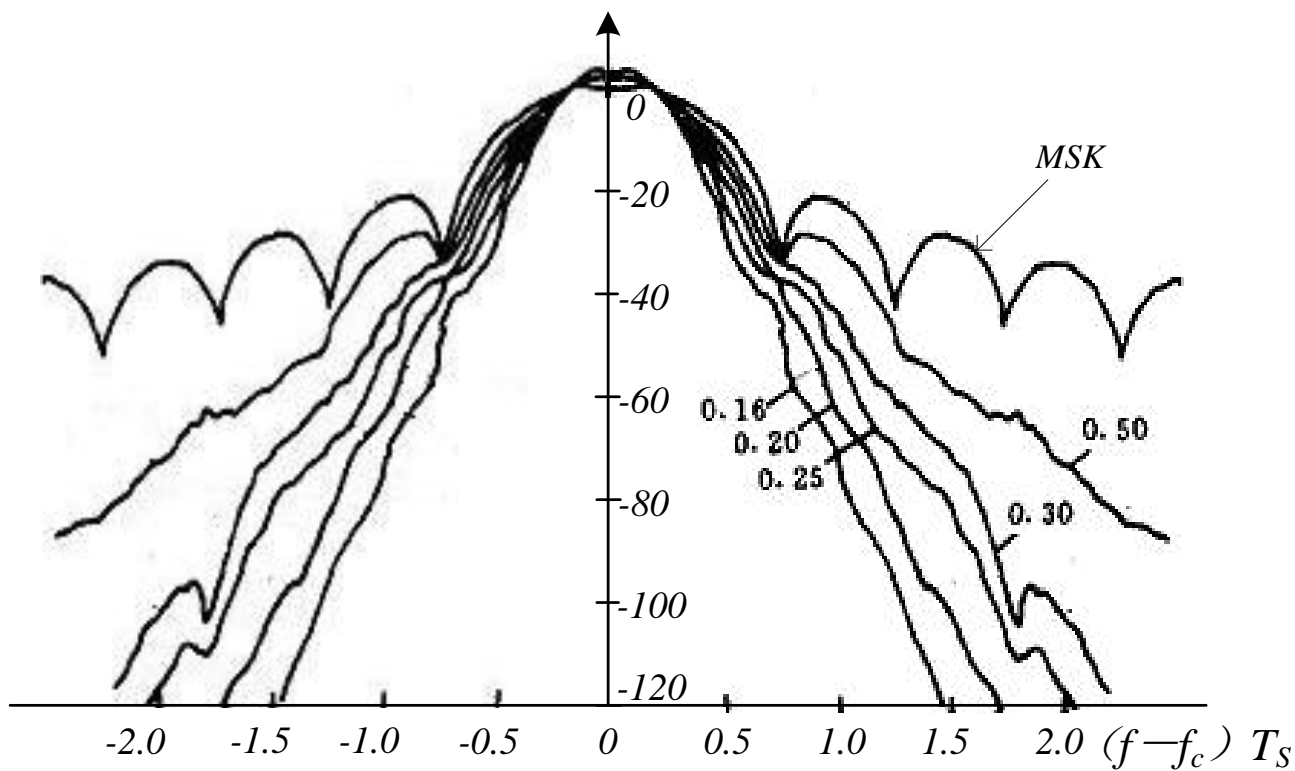
图 3.17 GMSK 正交调制的各点波形

高斯滤波最小频移键控(GMSK)(续)



相位取值由MSK调制时的折线变为GMSK调制时平滑过渡的曲线。

GMSK信号的功率谱特性



可见较之MSK信号，GMSK信号的功率谱旁瓣衰减加快，性能有明显的改善。

GMSK信号的功率谱密度如下图所示。从图中可以看出，随着 $B_b T_b$ 的减小，功率谱衰减明显加快，但过小会使码间干扰（ISI）增加。在GSM系统中，要求在 $(f-f_c)T_b=1.5$ 时功率谱密度低于60dB，从图中可以看出， $B_b T_b = 0.3$ 时GMSK的功率谱即可满足GSM的要求。

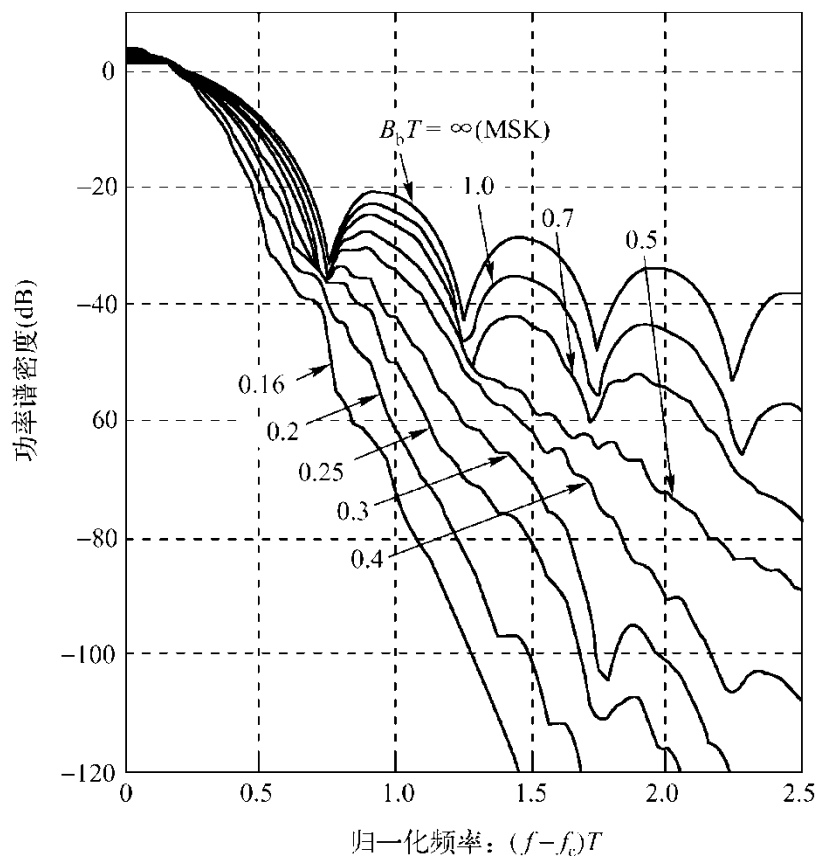


图 GMSK的功率谱密度



表 GMSK在给定百分比功率下的占用带宽

$B_b T_b$ \ %	90	99	99.9	99.99
0.2	0.52	0.79	0.99	1.22
0.25	0.57	0.86	1.09	1.37
0.5	0.69	1.04	1.33	2.08
∞ (MSK)	0.78	1.20	2.76	6.00

在 $B_b T_b$ 取不同值时，GMSK信号在相邻信道



的带外辐射功率与本信道内的总功率之比如下图所示。

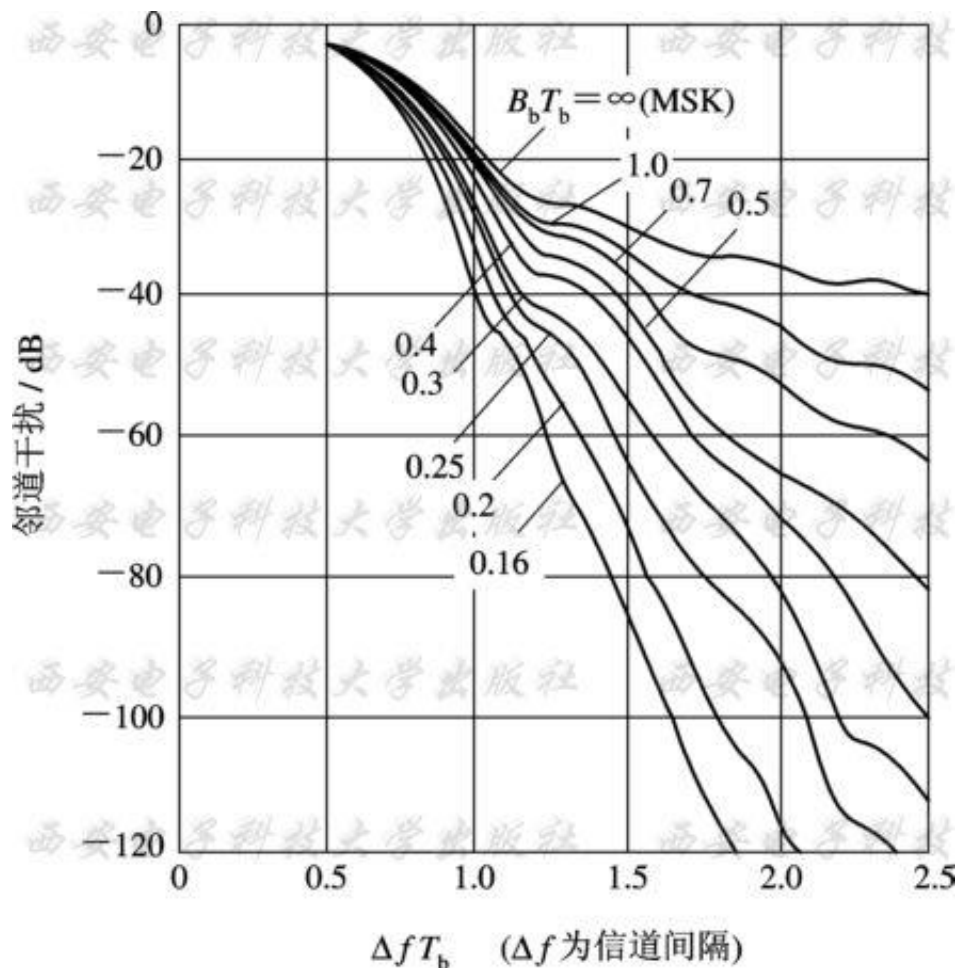


图 GMSK信号对邻道的干扰功率



由图可见，在 $B_b T_b$ 一定时， $\Delta f T_b$ 越大则邻道干扰越小。
在频道间隔 $\Delta f T_b$ 一定时， $B_b T_b$ 越小则邻道干扰越小。

例如，数据速率 $1/T_b=16\text{kb/s}$ ，频道间隔 $\Delta f=25\text{kHz}$ ，则归一化频道间隔 $\Delta f T_b=25/16=1.56$ 。从上页图可查得，在 $B_b T_b=0.3$ 时，邻道干扰为 -60dB ； $B_b T_b=0.25$ 时为 -70dB ； $B_b T_b=0.2$ 时为 -80dB 。实际中还应考虑载波漂移的影响，邻道干扰会比上述计算值严重一些。

高斯滤波最小频移键控(GMSK)(续)



GMSK信号的相位是一个有记忆的函数，一般采用相干或差分相干的方法解调。

(1)GMSK信号的差分相干解调



已知接收信号为 $r(t) = a \cos(\omega_c t + \theta(t)) + n(t)$

其中 $n(t) = n_c(t) \cos \omega_c t + n_s(t) \sin \omega_c t$

信号的极坐标形式 $r(t) = R(t) \cos(\omega_c t + \theta(t) + \varphi_n(t))$

其中 $R(t) = \sqrt{(a + n_c(t))^2 + n_s^2(t)}$ $\varphi_n(t) = -\arctan\left(\frac{n_s(t)}{a + n_c(t)}\right)$

高斯滤波最小频移键控(GMSK)(续)



延时移项和相乘电路后的输出为

$$r_o(t) = R(t) \cos(\omega_c t + \theta(t) + \varphi_n(t)) R(t - T_s) \sin(\omega_c(t - T_s) + \theta(t - T_s) + \varphi_n(t - T_s))$$

经低通后的输出

$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= R(t) R(t - T_s) \sin(\omega_c T_s + \theta(t) - \theta(t - T_s) + \varphi_n(t) - \varphi_n(t - T_s)) \\ &= R(t) R(t - T_s) \sin(\theta(t) - \theta(t - T_s) + \varphi_n(t) - \varphi_n(t - T_s)) \end{aligned}$$

暂时不考虑噪声对相位的影响部分： $\varphi_n(t) - \varphi_n(t - T_s)$

因为信号的幅度部分 $R(t)R(t - T_s) > 0$

判决输出主要由 $\theta(t) - \theta(t - T_s)$ 决定。

$$\begin{aligned} \theta(t) - \theta(t - T_s) &= \frac{\pi}{2T_s} \int_{-\infty}^t \sum a_n g\left(\tau - nT_s - \frac{T_s}{2}\right) d\tau - \frac{\pi}{2T_s} \int_{-\infty}^{t-T_s} \sum a_n g\left(\tau - nT_s - \frac{T_s}{2}\right) d\tau \\ &= \frac{\pi}{2T_s} \int_{t-T_s}^t \sum a_n g\left(\tau - nT_s - \frac{T_s}{2}\right) d\tau \end{aligned}$$

高斯滤波最小频移键控(GMSK)(续)



显然要保证判决时刻 $\sin(\theta((n+1)T_S) - \theta(nT_S))$ 的符号与 a_n 一致

应有

$$a_n > 0 \leftrightarrow \sin(\theta((n+1)T_S) - \theta(nT_S)) > 0 \leftrightarrow 0 < \theta((n+1)T_S) - \theta(nT_S) < \pi$$

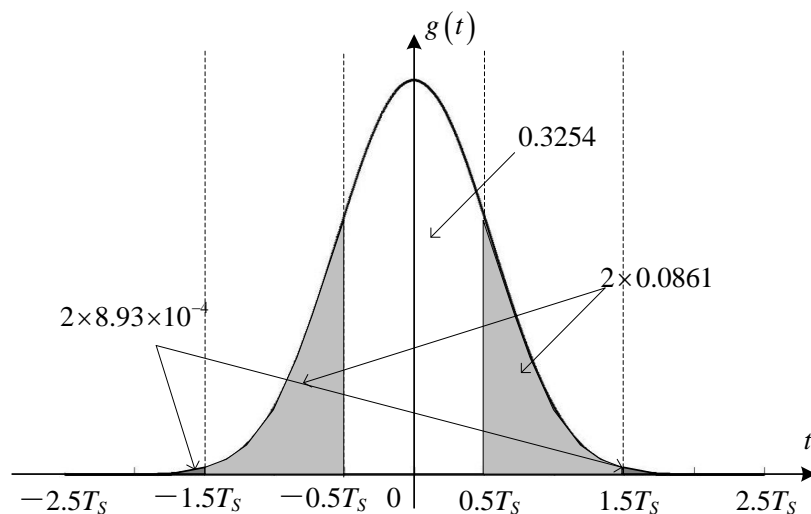
$$a_n < 0 \leftrightarrow \sin(\theta((n+1)T_S) - \theta(nT_S)) < 0 \leftrightarrow -\pi < \theta((n+1)T_S) - \theta(nT_S) < 0$$

注意到如下函数 $g(t)$ 各个部分所占面积的情况

$$\int_{-0.5T_S}^{+0.5T_S} g(t) dt = 0.6508T_S$$

$$\int_{-1.5T_S}^{-0.5T_S} g(t) dt = \int_{+0.5T_S}^{+1.5T_S} g(t) dt = 0.1722T_S$$

$$\int_{-2.5T_S}^{-1.5T_S} g(t) dt = \int_{+1.5T_S}^{+2.5T_S} g(t) dt = 0.0020T_S$$



高斯滤波最小频移键控(GMSK)(续)

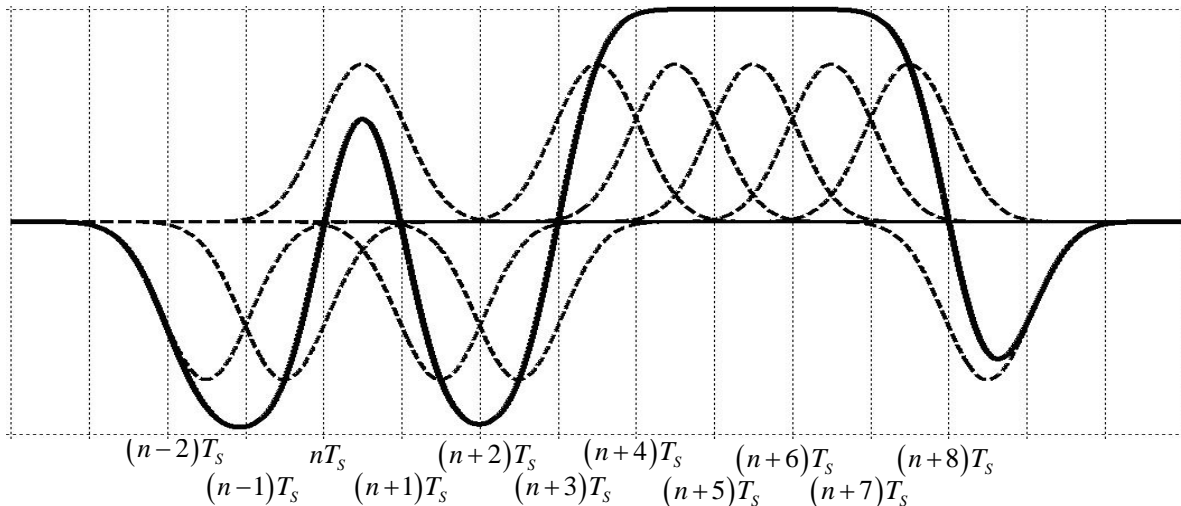


下图给出了当 $a_n = +1$ 时相差取值最极端的两种情况

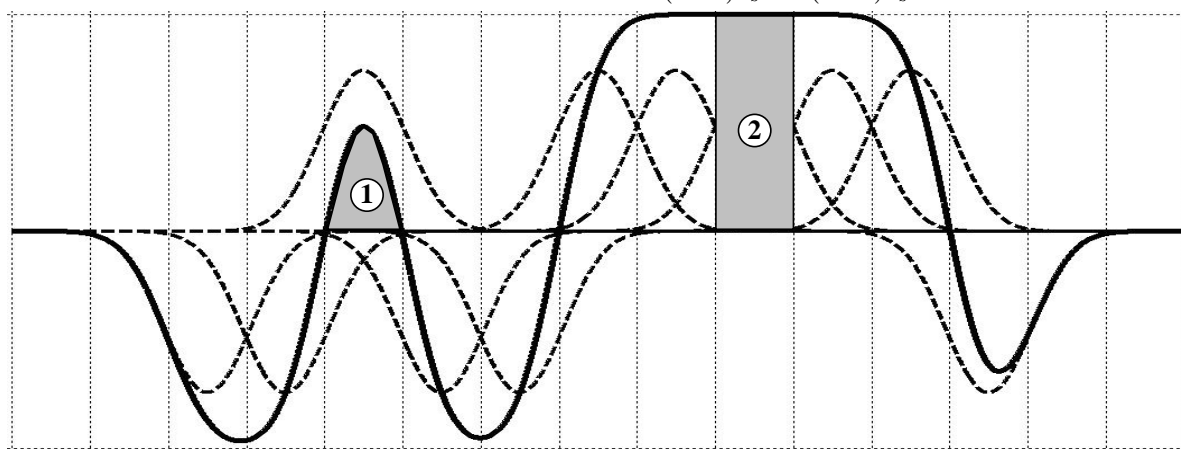
a_{n-2}	a_{n-1}	a_n	a_{n+1}	a_{n+2}	a_{n+3}	a_{n+4}	a_{n+5}	a_{n+6}	a_{n+7}	a_{n+8}
-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1

其中：

“①” 对应相位差
取值最小的情形



“②” 对应相位差
取值最大的情形



高斯滤波最小频移键控(GMSK)(续)



“①”的面积

$$\begin{aligned}\theta((n+1)T_s) - \theta(nT_s) &= \frac{\pi}{2T_s} \int_{nT_s}^{(n+1)T_s} \sum a_n g\left(\tau - nT_s - \frac{T_s}{2}\right) d\tau \\ &= \frac{\pi}{2T_s} (0.6508 - 2 \times 0.1722 - 2 \times 0.0020) T_s = 0.1532\pi\end{aligned}$$

“②”的面积

$$\begin{aligned}\theta((n+6)T_s) - \theta((n+5)T_s) &= \frac{\pi}{2T_s} \int_{(n+5)T_s}^{(n+6)T_s} \sum a_n g\left(\tau - nT_s - \frac{T_s}{2}\right) d\tau \\ &= \frac{\pi}{2T_s} (0.6508 + 2 \times 0.1722 + 2 \times 0.0020) T_s \approx 0.5\pi\end{aligned}$$

可见不会影响码元的判决；

同理可导出，当 $a_n = -1$

相位差最大和最小的取值分别为 -0.1532π 和 -0.5π

同样不会影响码元的判决。

高斯滤波最小频移键控(GMSK)(续)



判决规则可归纳为

$$y((n+1)T_s) \begin{cases} \geq 0 \rightarrow a_n = +1 \\ < 0 \rightarrow a_n = -1 \end{cases}$$

由上面的分析可知，GMSK差分相干解调的相位噪声容限为

$$\max |\Delta\theta_n| < 0.1532\pi$$

二比特延迟差分检测



二比特延迟差分检测器的框图如下图所示。图中相乘器的输出信号为

$$R(t) \cos [\omega_c t + \theta(t)] \cdot R(t-2T_b) \cos [\omega_c (t-2T_b) + \theta(t-2T_b)]$$

$$= R(t)R(t-2T_b) \cos [\omega_c t + \theta(t)] \cos [\omega_c (t-2T_b) + \theta(t-2T_b)]$$

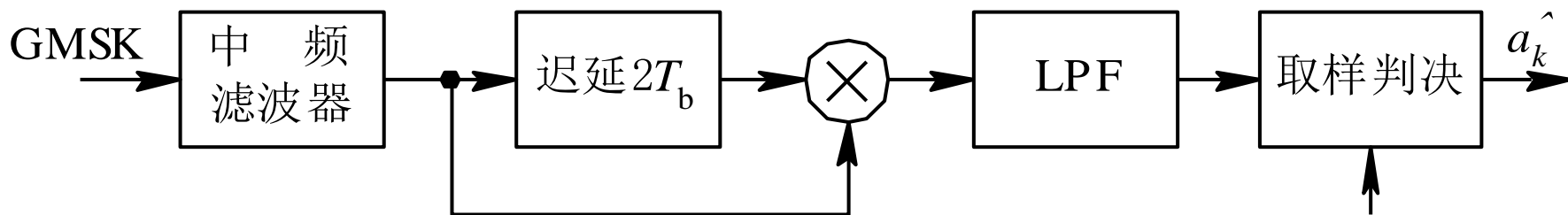


图 二比特延迟差分检测器的框图



$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

经LPF后的输出

$$Y(t) = \frac{1}{2} R(t)R(t - 2T_b) \cos[2\omega_c T_b + \Delta\theta(2T_b)]$$

式中

$$\begin{aligned} \Delta\theta(2T_b) &= \theta(t) - \theta(t - 2T_b) \\ &= \theta(t) - \theta(t - T_b) + \theta(t - T_b) - \theta(t - 2T_b) \end{aligned}$$

当 $2\omega_c T_b = k(2\pi)$ (k 为整数)时

$$\begin{aligned} Y(t) &= \frac{1}{2} R(t)R(t - 2T_b) \{ \cos[\theta(t) - \theta(t - T_b)] \cos[\theta(t - T_b) - \theta(t - T_b)] \\ &\quad - \sin[\theta(t) - \theta(t - T_b)] \sin[\theta(t - T_b) - \theta(t - 2T_b)] \} \end{aligned}$$



如果在中频滤波器后插入一个限幅器，则可以去掉振幅的影响。上式中， $\{ \}$ 内的第一项为偶函数，在 $\Delta\theta(T_b)$ 不超过 $\pm\pi/2$ 的范围时，它不会为负。它实际上反映的是直流分量的大小，对判决不起关键作用，但需要把判决门限增加一相应的直流分量 γ ； **第二项**

$$\sin [\theta(t)-\theta(t-T_b)] \sin [\theta(t-T_b)-\theta(t-2T_b)]$$

才是判决的依据。



为了从上式中恢复出传输的数据，令其中的 $\sin [\theta(t)-\theta(t-T_b)]$ 对应于原始数据 a_k 经差分编码后的 c_k ，而 $\sin [\theta(t-T_b)-\theta(t-2T_b)]$ 则对应于 c_{k-1} ，两者相乘等效于两者的模2相加 $c_k \oplus c_{k-1}$ 。若发端进行差分编码，根据差分编码的规则 $c_k = a_k \oplus c_{k-1}$ ，可得

$$\tilde{a} = c_k \oplus c_{k-1} \text{ 即为解调输出。}$$

由此可见，检测器只要设置一个判决门限 γ ，并令判决规则为

$Y(t) > \gamma$ 判为“+1”

$Y(t) < \gamma$ 判为“-1”

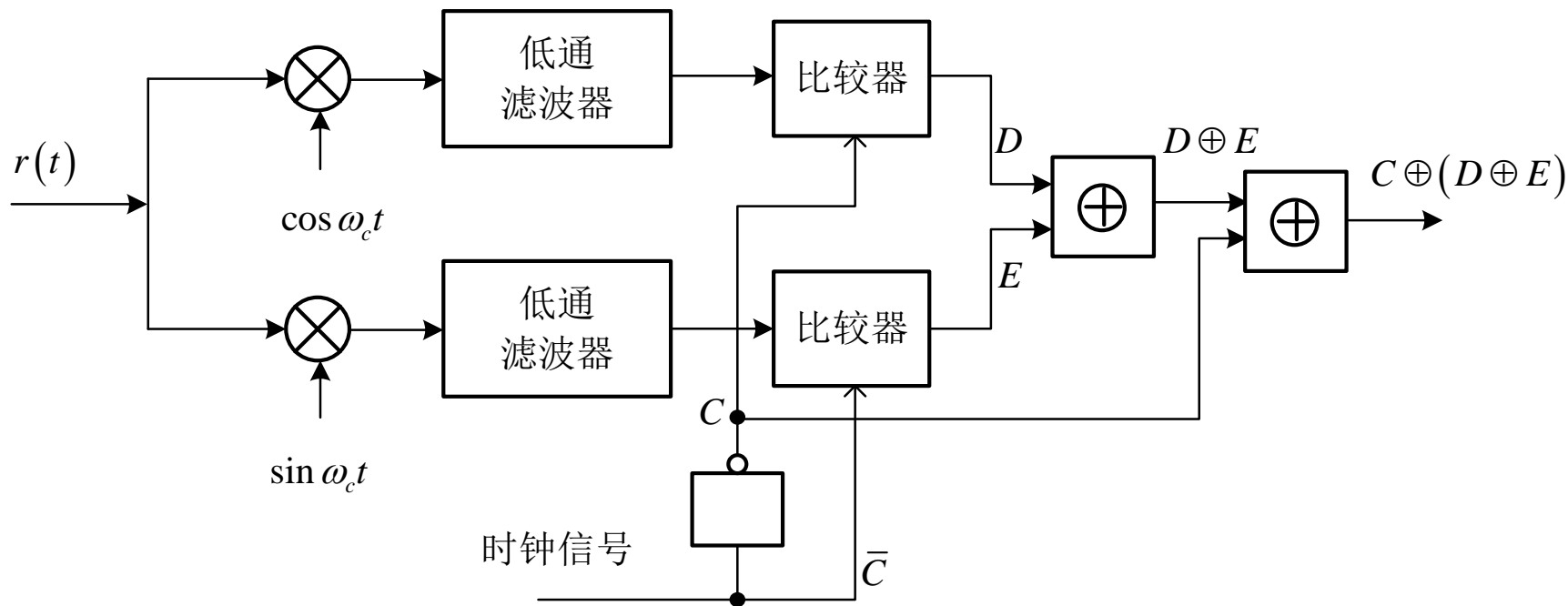
而相应地在发端，需对原始数据 a_k 进行差分编码。

高斯滤波最小频移键控(GMSK)(续)



(2)GMSK信号的相干解调

GMSK信号相干解调的原理电路如下图所示



这是一个模数混合的非线性系统，我们通过一个具体的示例来说明其工作原理。

高斯滤波最小频移键控(GMSK)(续)



(2)GMSK信号的相干解调

两个比较器在时钟C的上升沿和下降沿的输出分别为

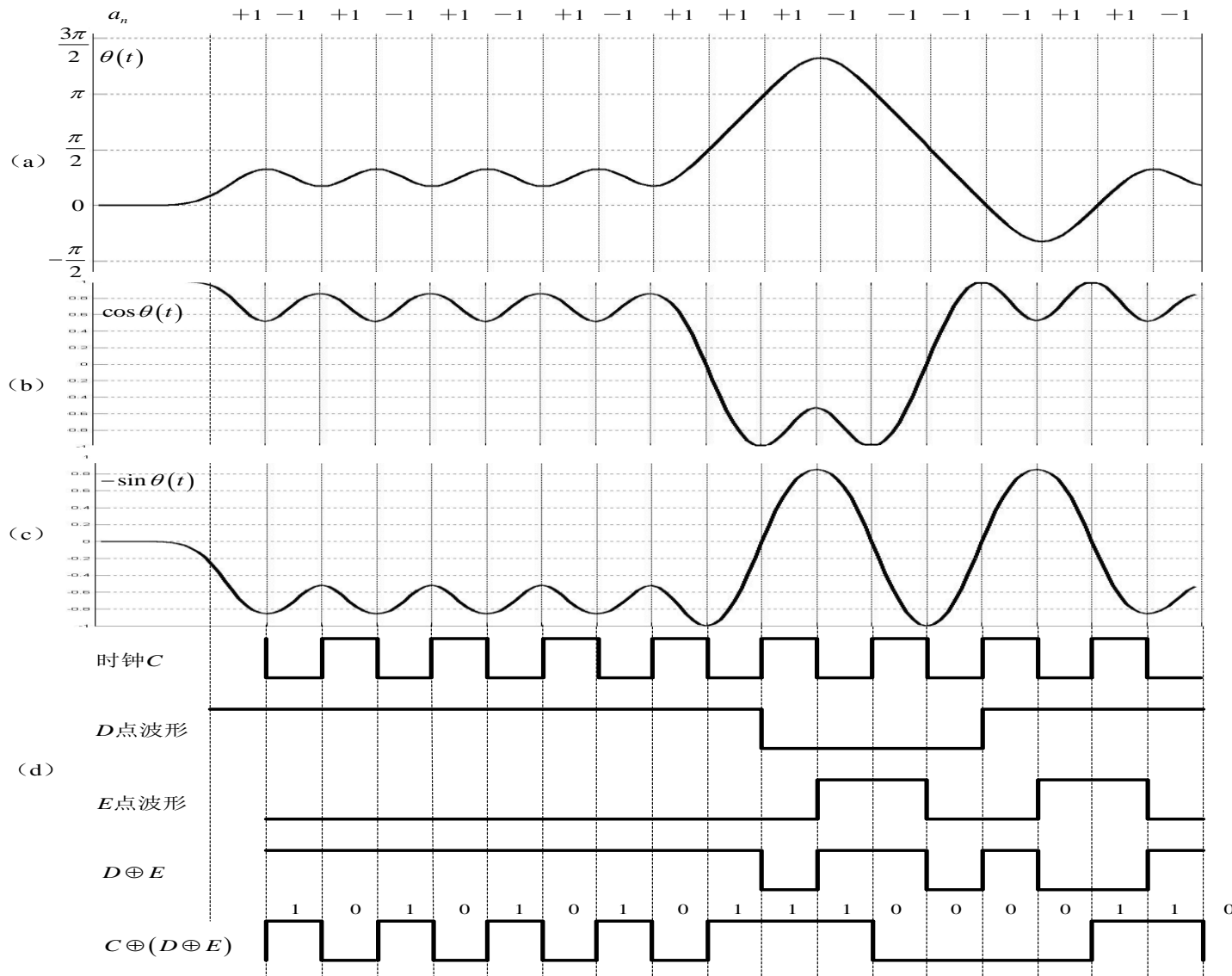
$$D = \begin{cases} 0, & \cos(2kT_s) \leq 0 \\ 1, & \cos(2kT_s) > 0 \end{cases}$$

$$E = \begin{cases} 0, & \sin((2k-1)T_s) \leq 0 \\ 1, & \sin((2k-1)T_s) > 0 \end{cases}$$

假定输入的符号序列为：101010101110000110

得到的各点输出波形如下图所示，可见可实现正确的解调。

高斯滤波最小频移键控(GMSK)(续)



高斯滤波最小频移键控(GMSK)(续)



GMSK系统的误码性能分析

比较MSK信号和GMSK信号的树形图

为避免相位折线导致

频率突变；

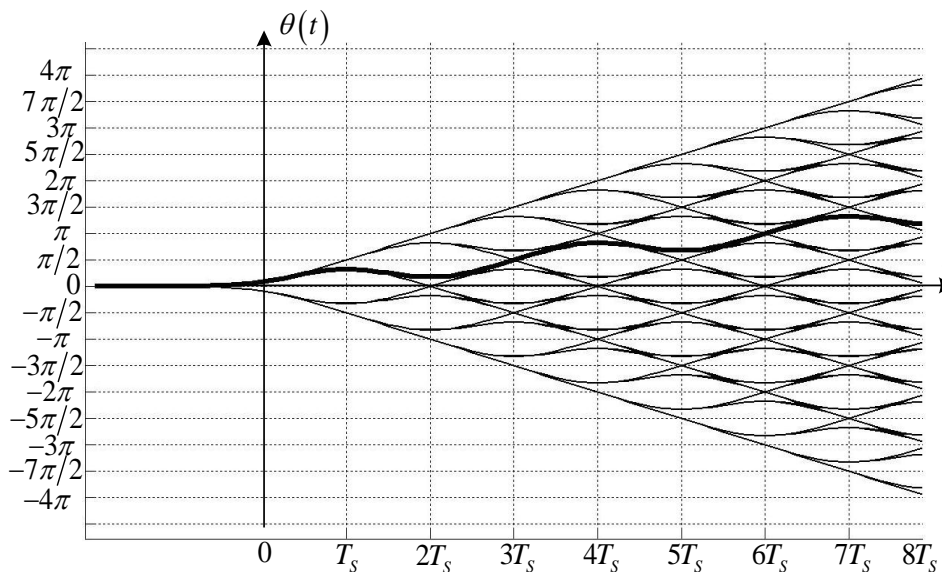
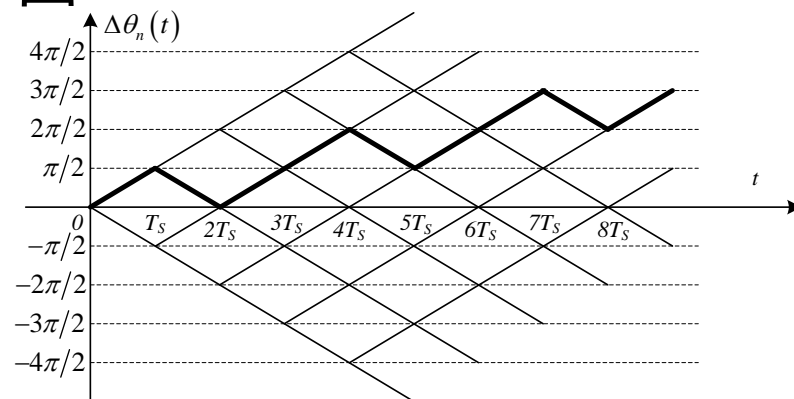
GMSK选择了圆滑的过渡

特性。其代价是相位

差的变化幅度减小；

相应地抗误码的性能

较之MSK略有降低。



高斯滤波最小频移键控(GMSK)(续)



MSK系统的误码率

$$P_{E,MSK} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

GMSK系统的误码率

$$P_{E,GMSK} = Q\left(\sqrt{\frac{1.89E_b}{N_0}}\right)$$

考虑到Q函数的单调降特性，一般地有

$$P_{E,MSK} \overset{\text{略}}{<} P_{E,GMSK}$$

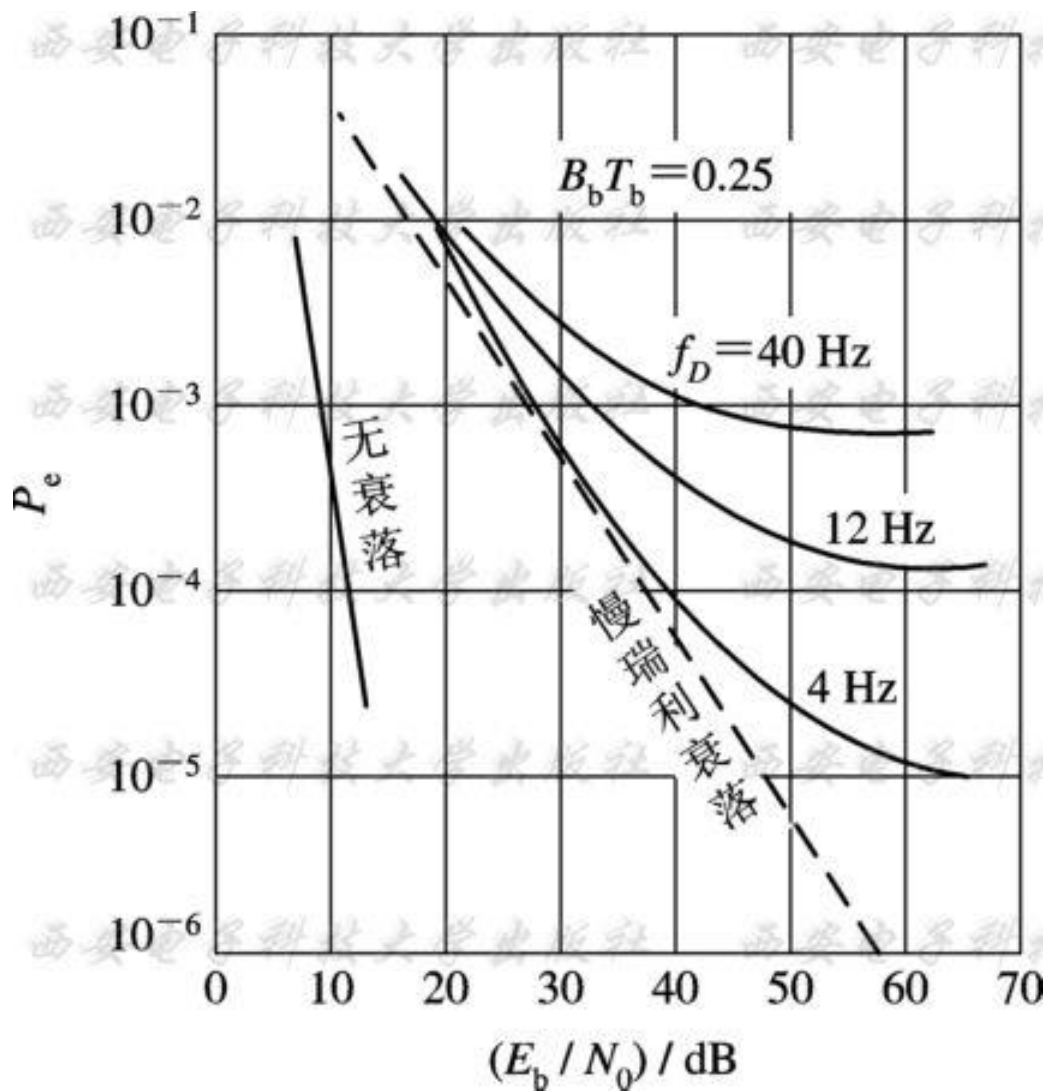


图 GMSK相干检测的误码率特性

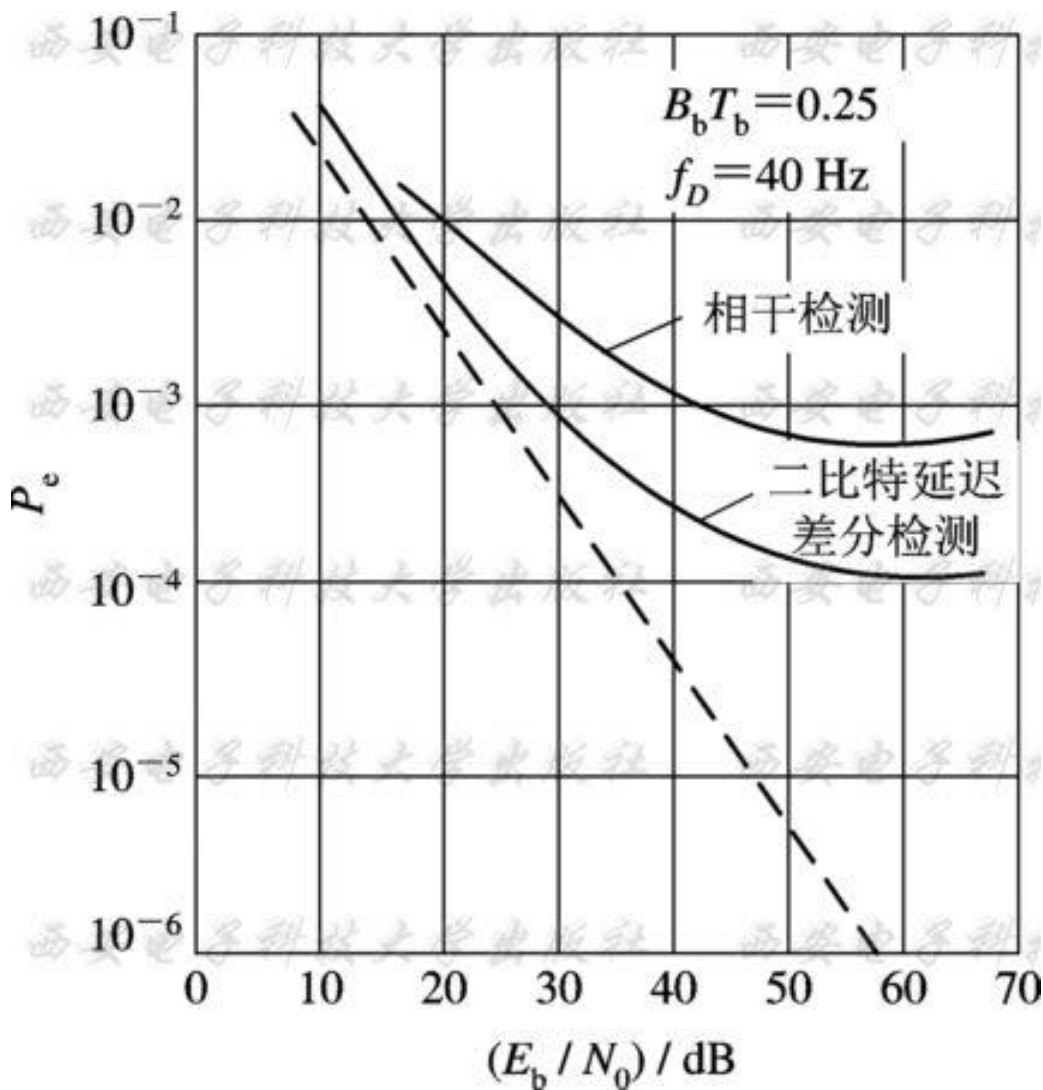
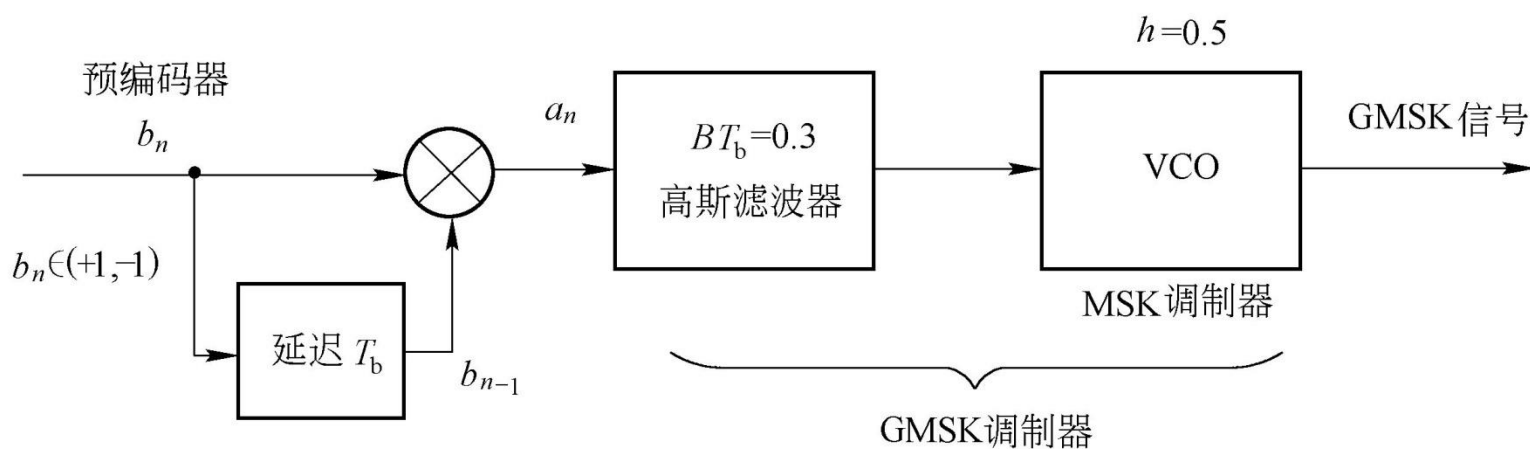
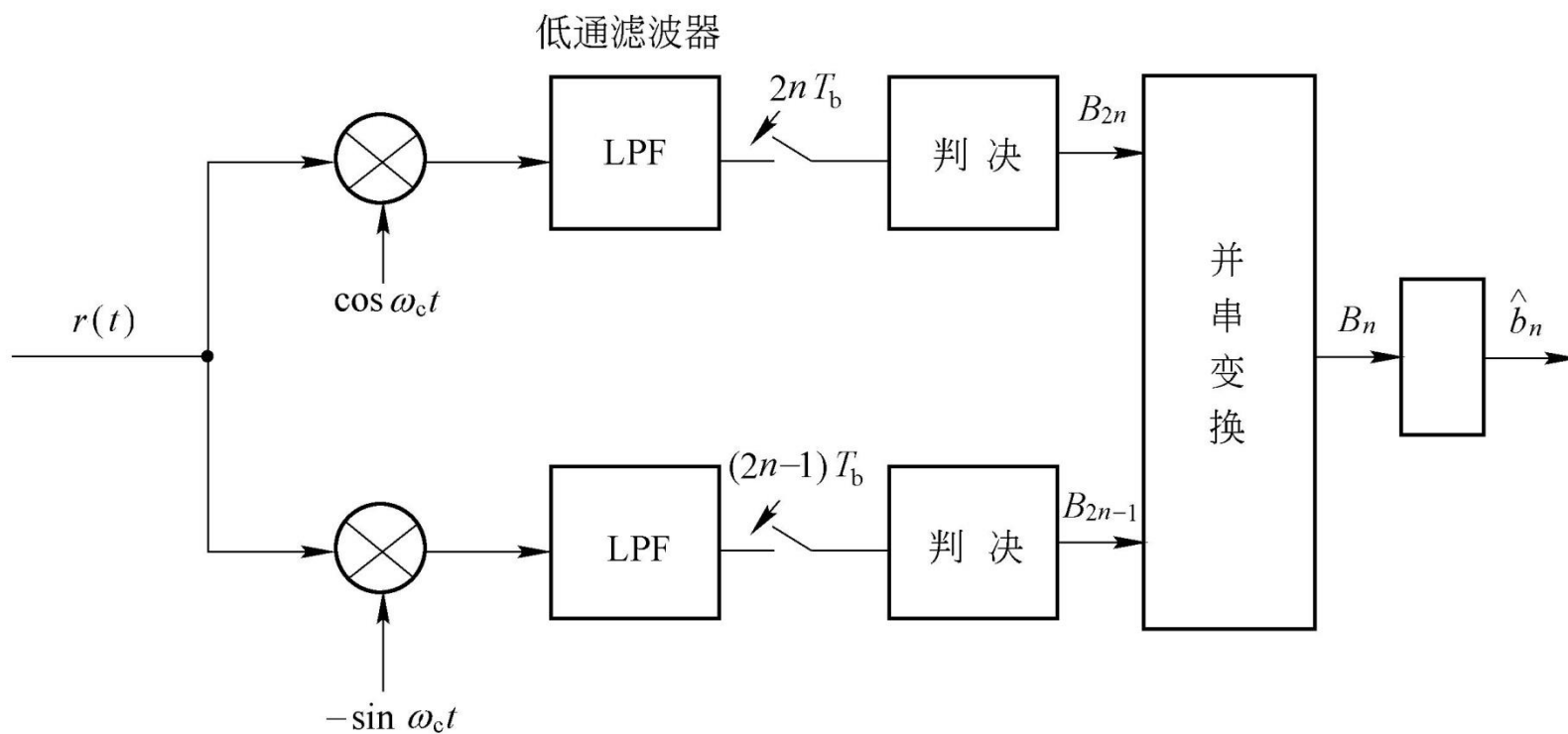


图 GMSK二比特延迟差分检测的误码率特性

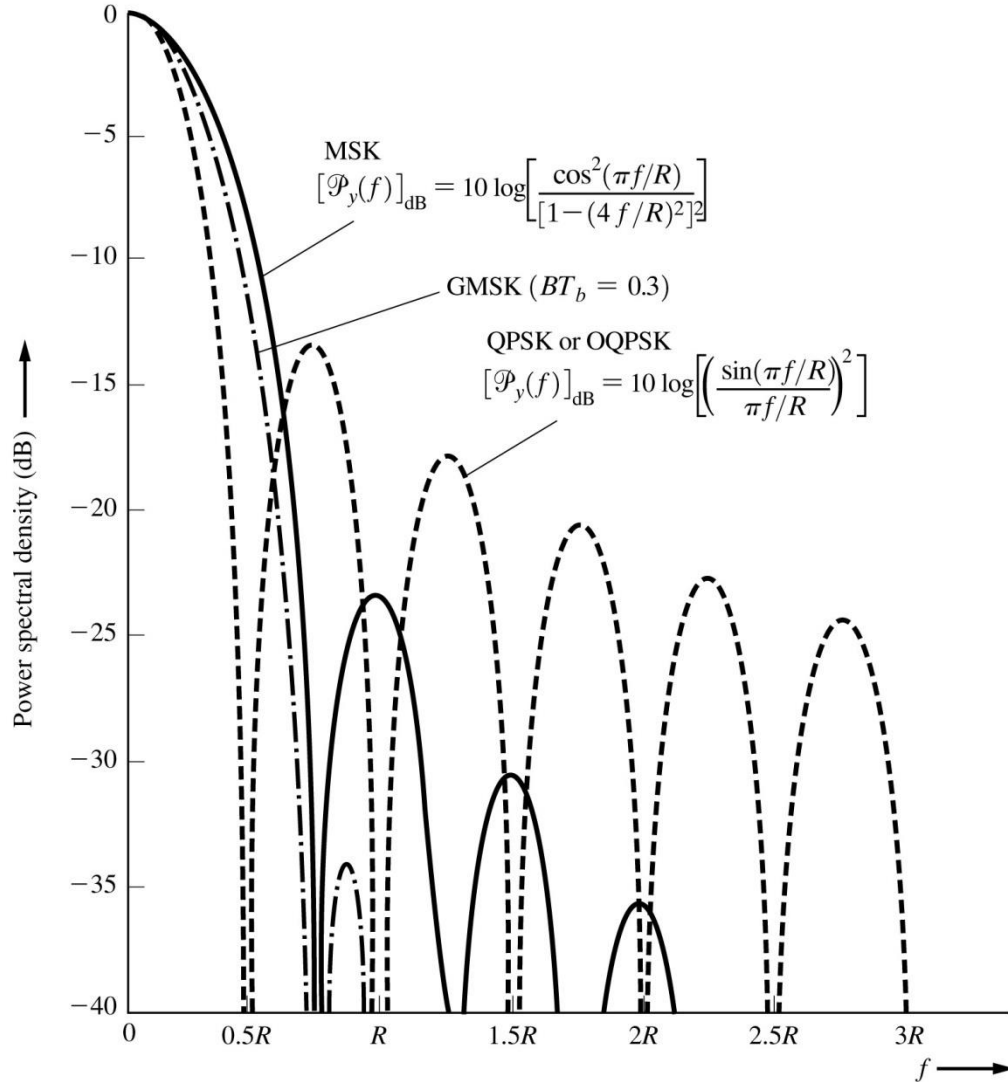


加预编码器的框图



加预编码GMSK的相干解调

PSD for complex envelope of MSK, GMSK, QPSK, and OQPSK, where R is the bit rate (positive frequencies shown).



补充各种移动通信制式所用的调制方式



- ◆ GSM---GMSK
- ◆ IS-95--- OQPSK、BPSK、QPSK
- ◆ CDMA2000/WCDMA-- BPSK、QPSK、正交复四相相移键控OCQPSK和混合相移键控HPSK。
- ◆ HSPA 16QAM 64QAM
- ◆ LTE QAM



6.6 正交频分复用载波调制传输系统

多载波调制



多载波传输首先把一个高速的数据流**分解**为若干个低速的子数据流（这样每个子数据流将具有低得多的比特速率），然后，每个子数据流经过调制（符号匹配）和滤波（波形形成 $g(t)$ ），去调制相应的子载波，从而构成多个并行的已调信号，经过合成后进行传输。其基本结构如下图所示。

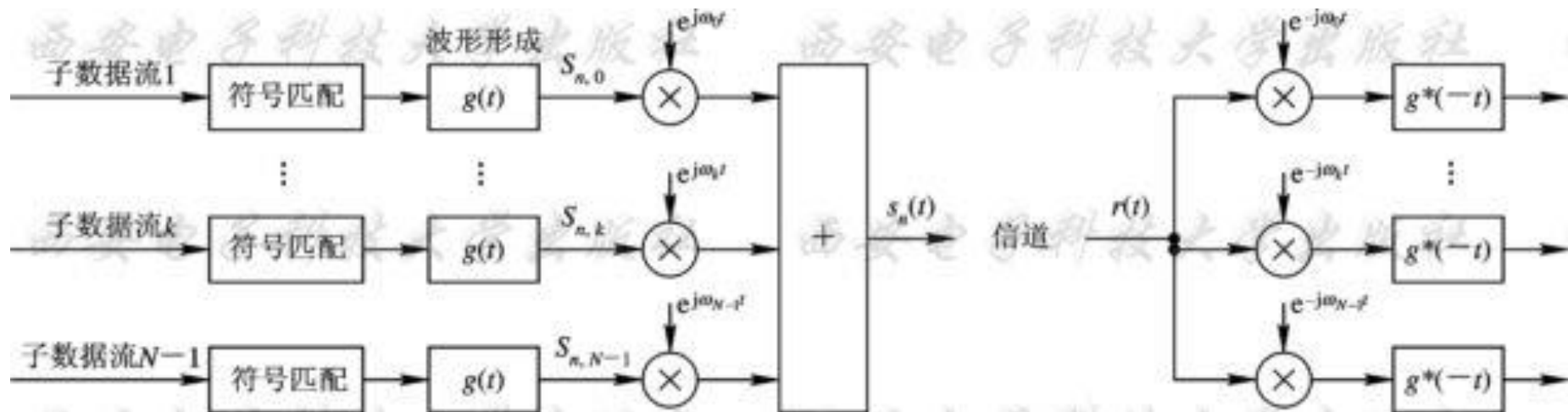


图 多载波系统的基本结构



在单载波系统中，一次衰落或者干扰就可以导致整个传输链路失效，但是在多载波系统中，某一时刻**只会有少部分的子信道会受到深衰落或干扰的影响**，因此多载波系统**具有较高的传输能力以及抗衰落和干扰能力**。

在多载波传输技术中，对每一路载波频率（子载波）的选取可以有多种方法，它们的不同选取将决定最终已调信号的频谱宽度和形状。



第1种方法是：各子载波间的间隔足够大，从而使各路子载波上的已调信号的**频谱不相重叠**，如下图（a）所示。该方案就是传统的频分复用方式，即将整个频带划分成 N 个不重叠的子带，每个子带传输一路子载波信号，在接收端可用滤波器组进行分离。这种方法的优点是实现简单、直接；缺点是频谱的利用率低，子信道之间要留有保护频带，而且多个滤波器的实现也有不少困难。



第2种方法是：各子载波间的间隔选取，使得已调信号的频谱部分重叠，使复合谱是平坦的，如下图（b）所示。重叠的谱的交点在信号功率比峰值功率低3 dB处。子载波之间的正交性通过交错同相或正交子带的的数据得到(即将数据偏移半个码元周期)。

第3种方案是：各子载波是互相正交的，且各子载波的频谱有1/2的重叠。如下图（c）所示。该调制方式被称为正交频分复用(OFDM)。此时的系统带宽比FDMA系统的带宽可以节省一半。

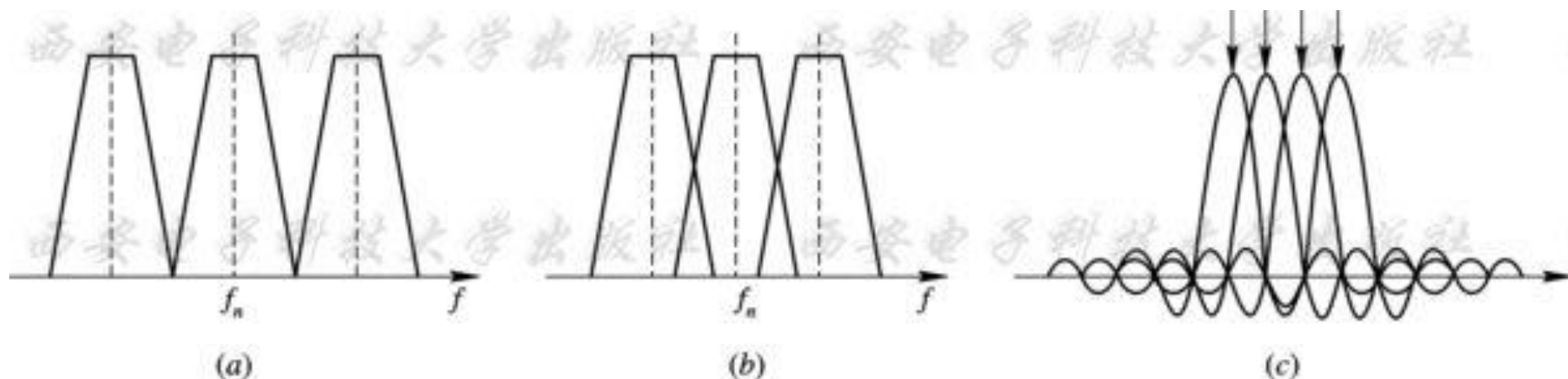


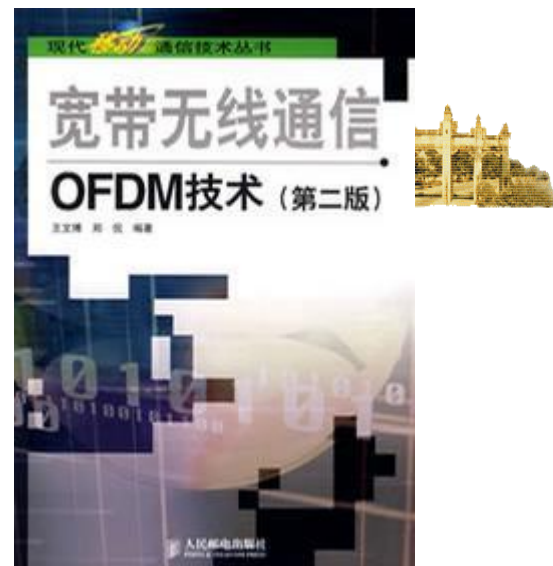
图 子载波频率设置

(a) 传统的频分复用； (b) 3 dB频分复用； (c) OFDM

多载波系统的实际应用



- ◆ 多载波系统已成功地应用于接入网中的高速数字环路HDSL，非对称数字环路ADSL。
- ◆ 数字音频广播DAB，欧洲DAB标准就是采用OFDM技术。
- ◆ 高清晰度电视HDTV的地面广播系统。
- ◆ 高速移动通信领域，比如它是第四及第五代移动通信采用的技术之一。



◆多载波传输的主要技术：

- 正交频分复用OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing)
- 离散多音调制DMT (Discrete Multi Tone)
- 多载波调制MCM (Multi Carrier Modulation)

其中OFDM中各子载波保持相互正交，而在MCM与DMT中这一条并不总能成立。

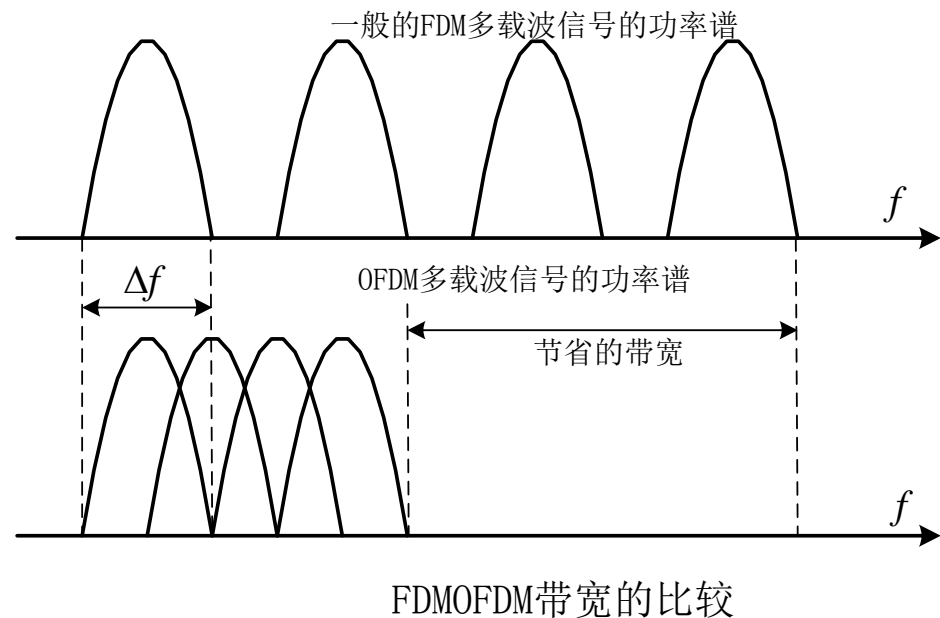
OFDM 技术以及系统简介



系统把整个可用信道频带 B 划分为 N 个带宽为的子信道。把 N 个串行码元变换为 N 个并行的码元，分别调制这 N 个子信道载波进行同步传输，这就是频分复用。

若子信道的码元速率 $1/T_s \leq \Delta f$ ，避免严重的码间干扰。另外若频谱允许重叠，提高频带效率，如图所示。

扩展了码元的长度 T ，远远大于信道的时延，减小时延扩展对信号传输的影响。



并行传输的基本概念



并行传输通常是指两个终端间利用多个信道同时传输信息；

并行传输最基本的方法是将信道的带宽划分为多个子信道，各个子信道同时传输信息；

在一个较宽的频带上划分子信道进行并行传输的优点是

(1) 将一个高速信道分解为多个低速的子信道，各个子信道的信道估计与均衡物理上容易实现；

(2) 频带上可能有不同的衰落和干扰特性，可针对不同的子信道特性采取相应的措施。

传统的并行传输方法需要保护间隔，频谱利用率低；

当并行传输的子信道数目很大时，需解决实现复杂性的问题。

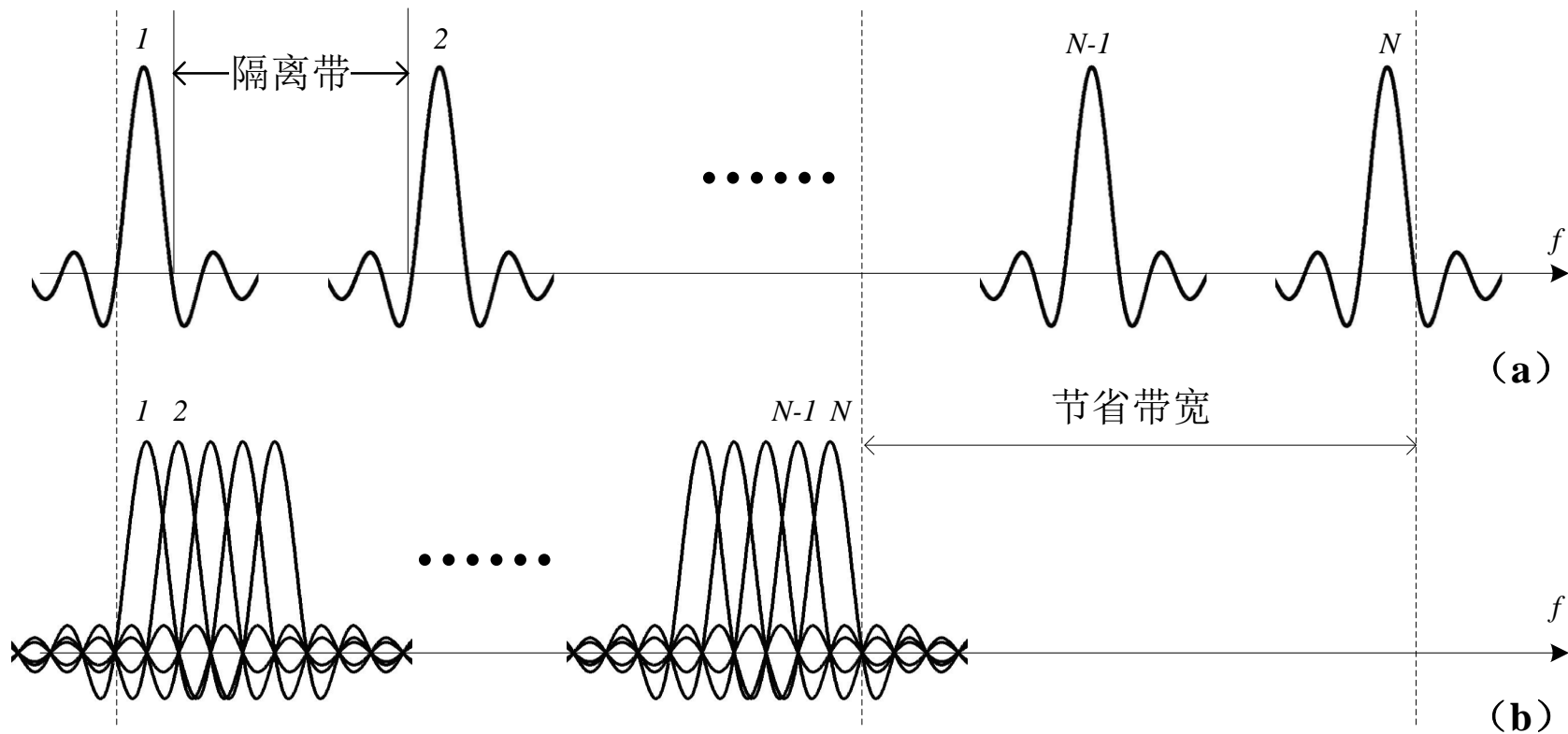
并行传输的基本概念(续)



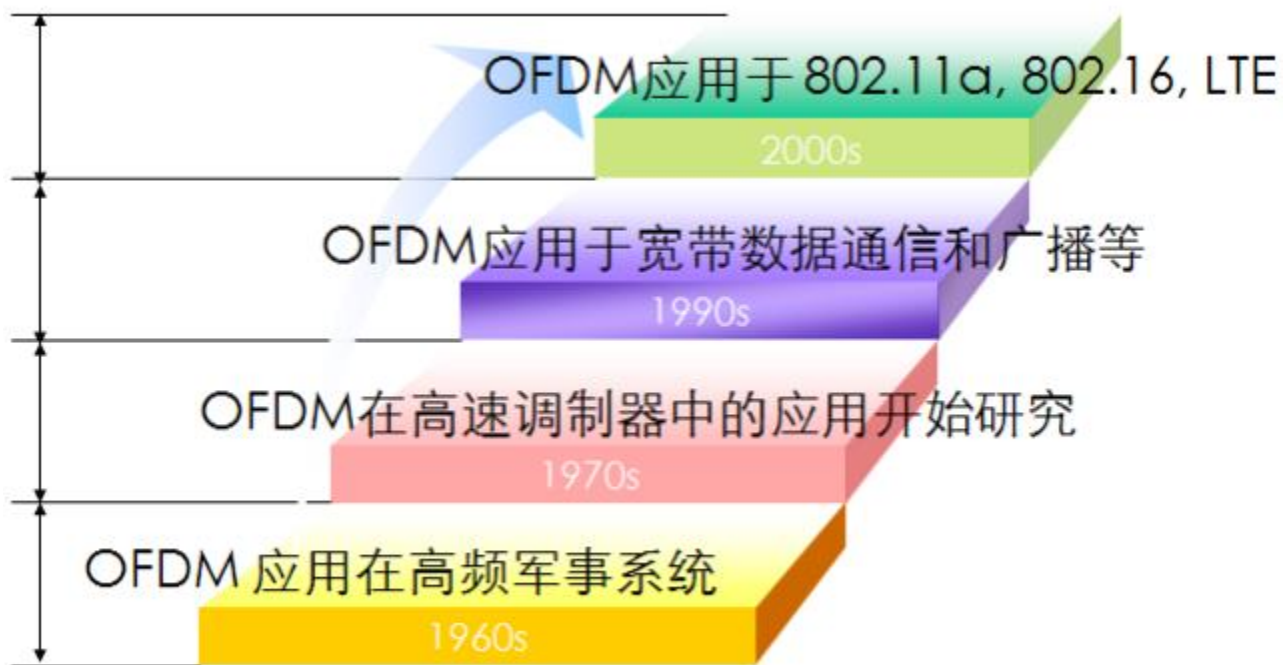
正交频分复用(OFDM)技术是一种“古老”又年青的技术；

OFDM的思想1950s已经提出，目前开始获得广泛应用。

OFDM较之传统的并行传输方法，频带利用率大大提高(如图)。



OFDM发展历史



OFDM子载波与多载波传输的主要区别



- ① 子载波的数量非常多，子载波的带宽较窄，而前面介绍的多载波传输的子载波的数量很少，子载波的带宽相对较大。
- ② 如图所示，OFDM的子载波间有一些重叠（但是它们之间是正交的），这就意味着OFDM的频谱效率要高于多载波传输技术。
- ③ 由于OFDM中子载波的数量非常多，每个子载波的带宽很小，那么就能很好地对抗频率选择性衰落，并且均衡的复杂度较低，在子载波带宽较窄时甚至可以不用均衡。



OFDM信号的特点：子载波间正交且间隔达到最小。

子载波间正交：保证子信道信号间具有可分离性；

子载波间间隔最小：保证具有最高的频带利用率。

OFDM子载波间隔的选择

回顾2FSK系统，在任意初相条件下，两个载波频率正交的条件

$$\min \Delta f = \min |f_{c1} - f_{c2}| = \frac{1}{T_s}$$

推广到OFDM系统中，保证子载波间正交相邻子载波间最小的间隔

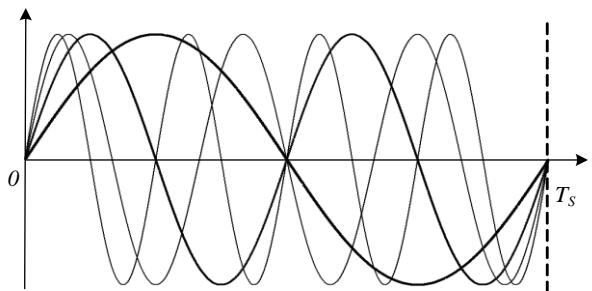
$$\min \Delta f = \frac{1}{T_s}$$

其中 T_s 为码元周期。

OFDM的基本原理(续)

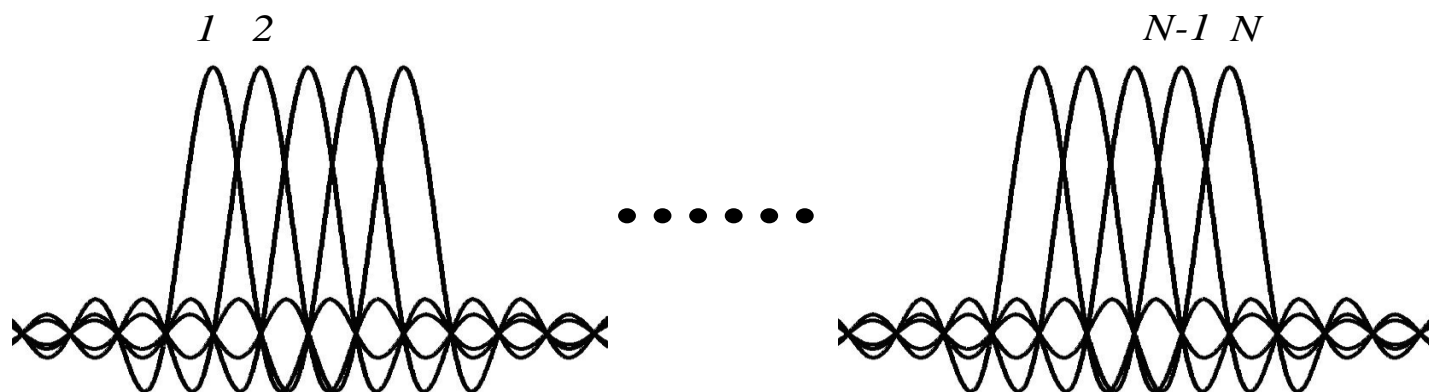


正交子载波的时域波形示例



在一个码元周期内每个子载波有**整数倍**的码元周期。

正交子载波的频域波形示例

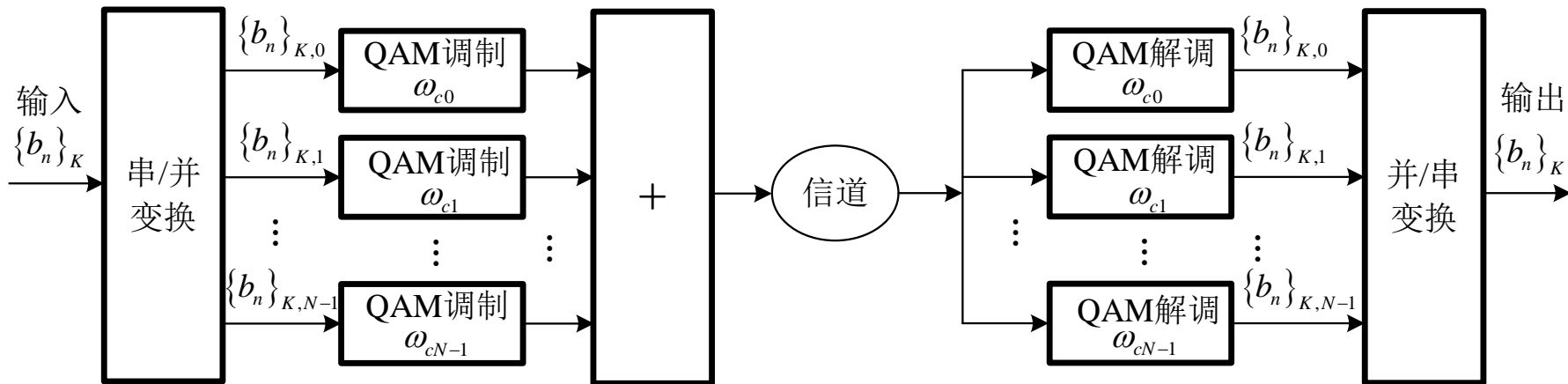


每个子载波与相邻的子载波有**50%**的频谱交叠。

OFDM的基本原理(续)



正交频分复用各子载波独立调制解调的实现方案



目前实用的OFDM技术中子载波数可多达2048，如果各子载波采用独立的调制解调方案，实现太复杂，没有实用的可行性。

OFDM的基本原理(续)



正交频分复用：采用复数子载波的实现方案

输入信息序列 $\{b_n\}$ 按组划分，每一组数据映射到一组 N 个星座点

$$S_0, S_1, \dots, S_{N-1} \xrightarrow{\text{调制} N \text{ 个复数子载波}} e^{j2\pi f_0 t}, e^{j2\pi f_1 t}, \dots, e^{j2\pi f_{N-1} t}$$

组合后得到一个正交频分复用的信号

$$s_{OFDM}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} S_k e^{j2\pi f_k t} = I_{OFDM}(t) + jQ_{OFDM}(t)$$

其中 $I_{OFDM}(t)$ 与 $Q_{OFDM}(t)$ 分别为 $s_{OFDM}(t)$ 的实部与虚部。

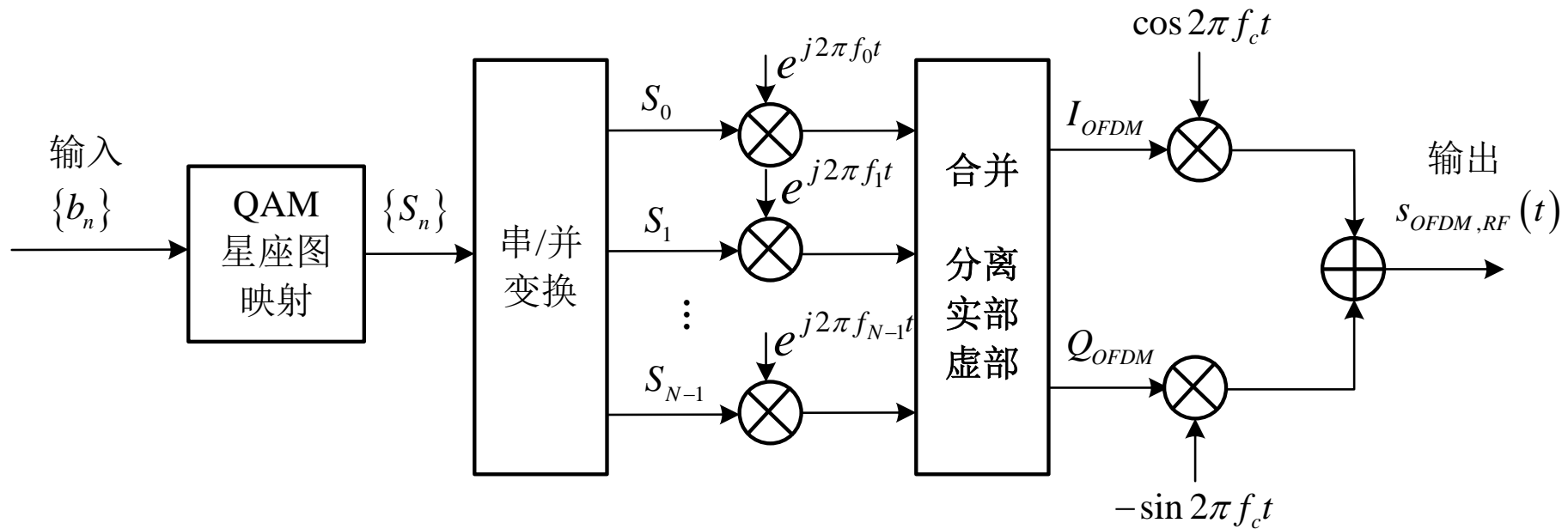
$s_{OFDM}(t)$ 的实部与虚部分别进一步对射频信号 $\cos \omega_c t$, $\sin \omega_c t$

进行调制，生成可通过无线发射的OFDM信号 $s_{OFDM,RF}(t)$ 。

OFDM的基本原理(续)



正交频分复用：采用复数子载波的实施方案



OFDM的基本原理(续)



正交频分复用：采用复数子载波的OFDM信号的解调

下变频

$$S_{OFDM,RF}(t) \xrightarrow{\text{下变频}} S_{OFDM}(t) = I_{OFDM}(t) + jQ_{OFDM}(t)$$

相关解调

$$\frac{1}{T_S} \int_0^{T_S} s_{OFDM}(t) e^{-j2\pi f_i t} dt = \frac{1}{T_S} \int_0^{T_S} \left(\sum_{k=0}^{N-1} S_k e^{j2\pi f_k t} \right) e^{-j2\pi f_i t} dt = S_i$$
$$i = 0, 2, \dots, N-1$$

恢复原来的星座点符号 $S_i \rightarrow$ 原来的二进制码组

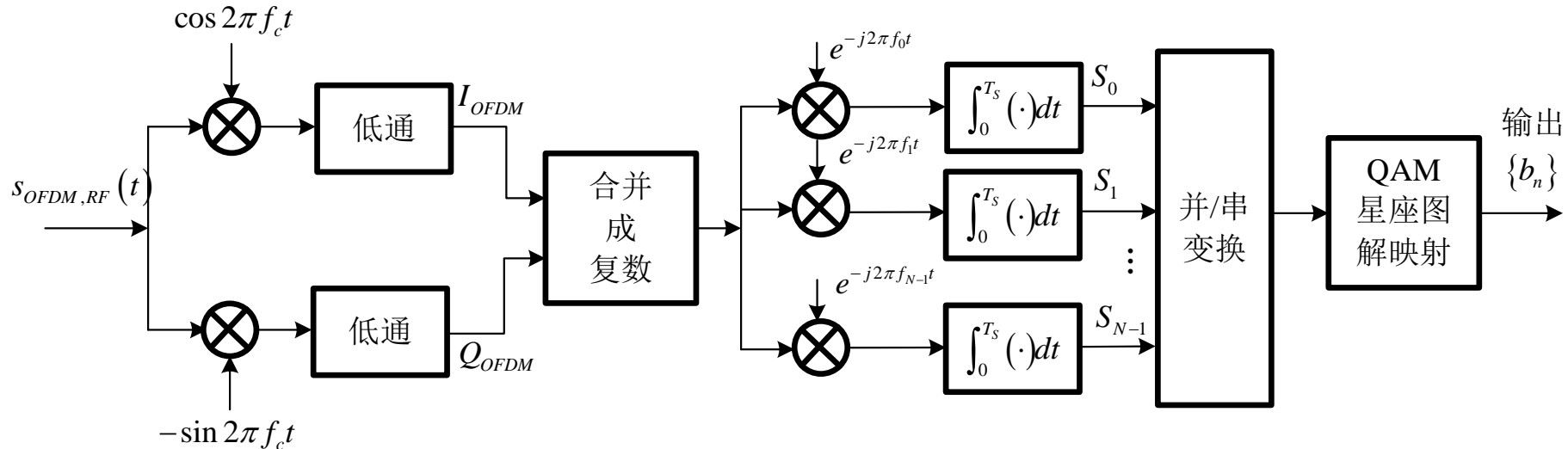
相关解调过程中利用了复数子载波间正交的条件

$$\frac{1}{T_S} \int_0^{T_S} e^{j2\pi f_j t} e^{-j2\pi f_k t} dt = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}, j, k = 0, 1, \dots, N-1$$

OFDM的基本原理(续)



正交频分复用：采用复数子载波的OFDM信号的解调
解调系统的实现原理



OFDM的基本原理(续)



OFDM信号调制解调的IFFT/FFT算法实现

基于复数子载波的OFDM系统实现并没有解决实现的复杂性问题

复数子载波的引入可使得OFDM的调制解调与IFFT/FFT建立特定的关系，从而解决系统实现的复杂性问题。

已知
$$s_{OFDM}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} S_n e^{j2\pi f_n t}$$

若取
$$T_s = NT$$

离散化的OFDM信号可以表示为
$$s_{OFDM}(kT) = \sum_{n=0}^{N-1} S_n e^{j2\pi f_n kT}$$

若定义
$$f_n = n \frac{1}{T_s} = \frac{n}{NT}$$

则有

$$s_{OFDM}(kT) = \sum_{n=0}^{N-1} S_n e^{\frac{j2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

OFDM的基本原理(续)



根据IDFT/DFT的原理, 可得

$$\text{调制 (IDFT): } S_{OFDM}(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} S_n e^{\frac{j2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{解调 (DFT): } S_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} S_{OFDM}(k) e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

IDFT与DFT的运算可通过快速傅里叶变换(IFFT/FFT)的方法实现

$$\text{调制 (IFFT): } S_{OFDM}(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} S_n W_N^{-nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{解调 (FFT): } S_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} S_{OFDM}(k) W_N^{nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

其中 $W_N^{nk} = e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$

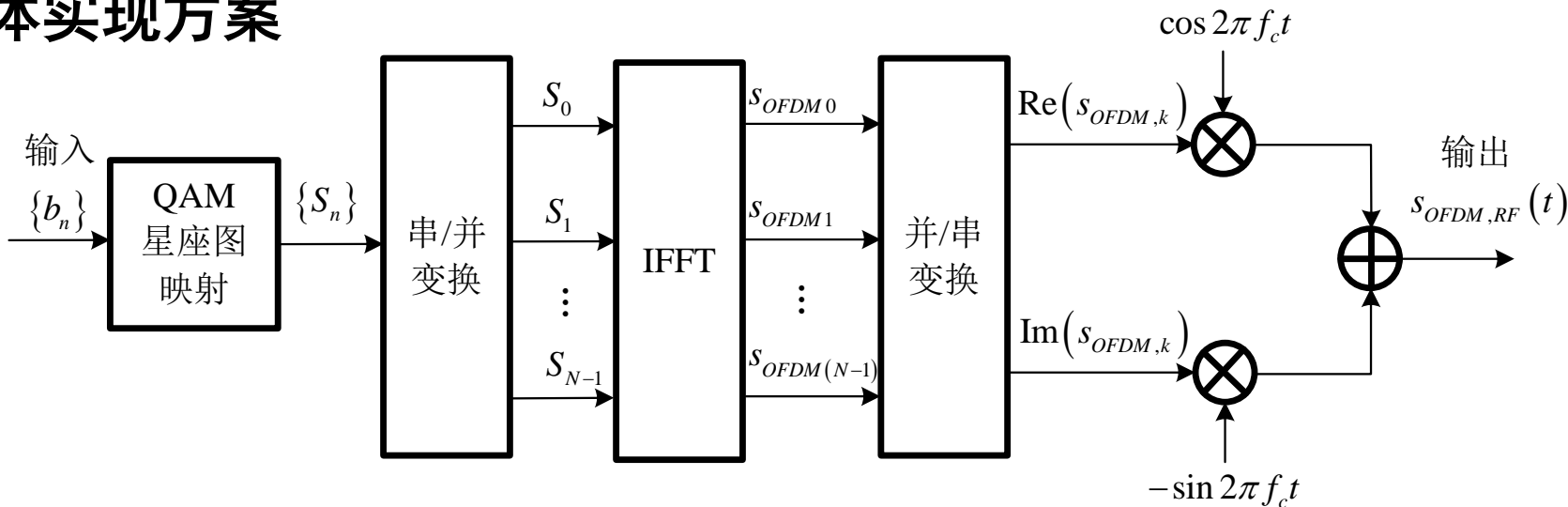
OFDM的基本原理(续)



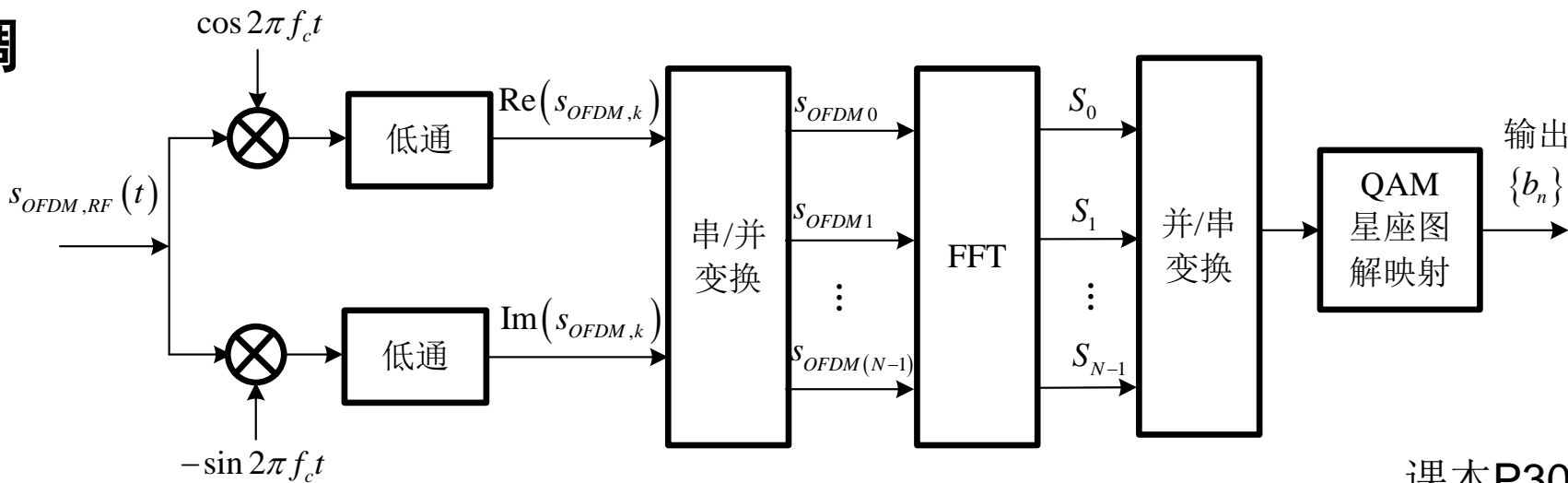
IFFT/FFT运算解决了OFDM调制解调实现过程的复杂性问题

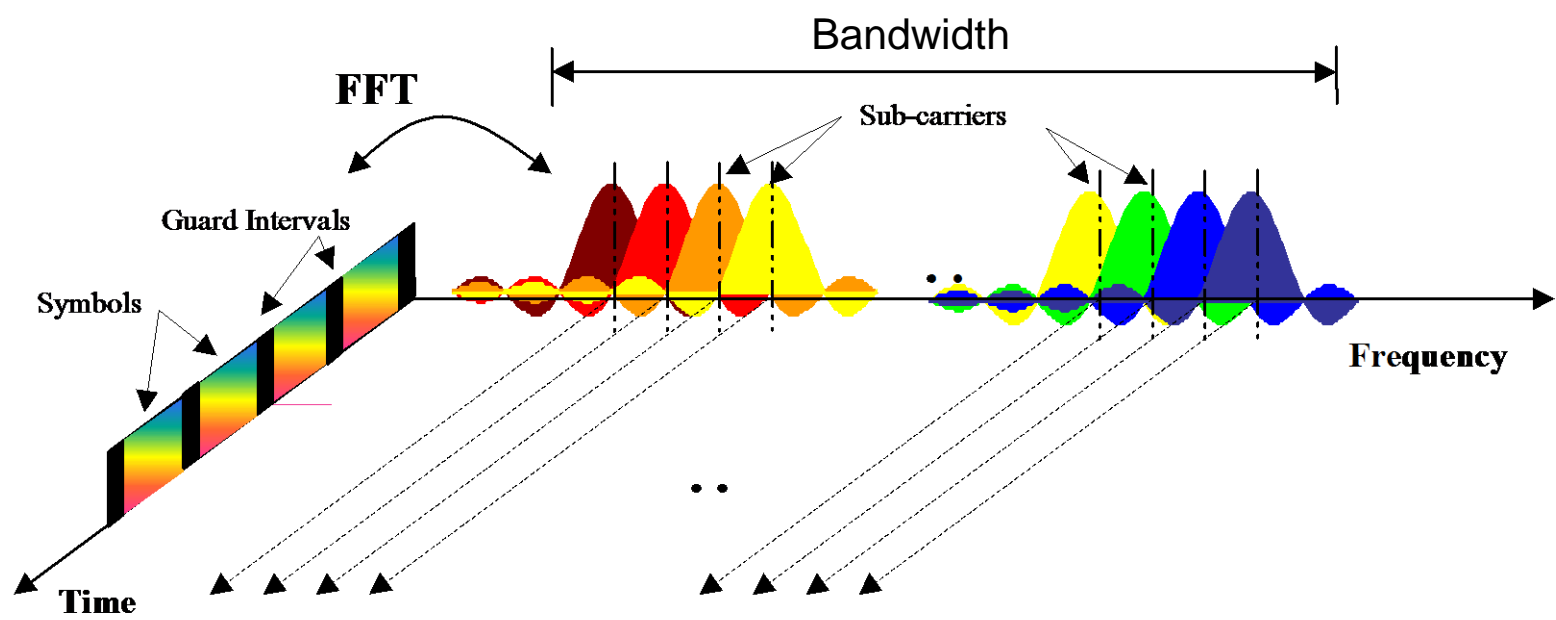
具体实现方案

调制



解调





OFDM信号的时间保护间隔与循环前缀

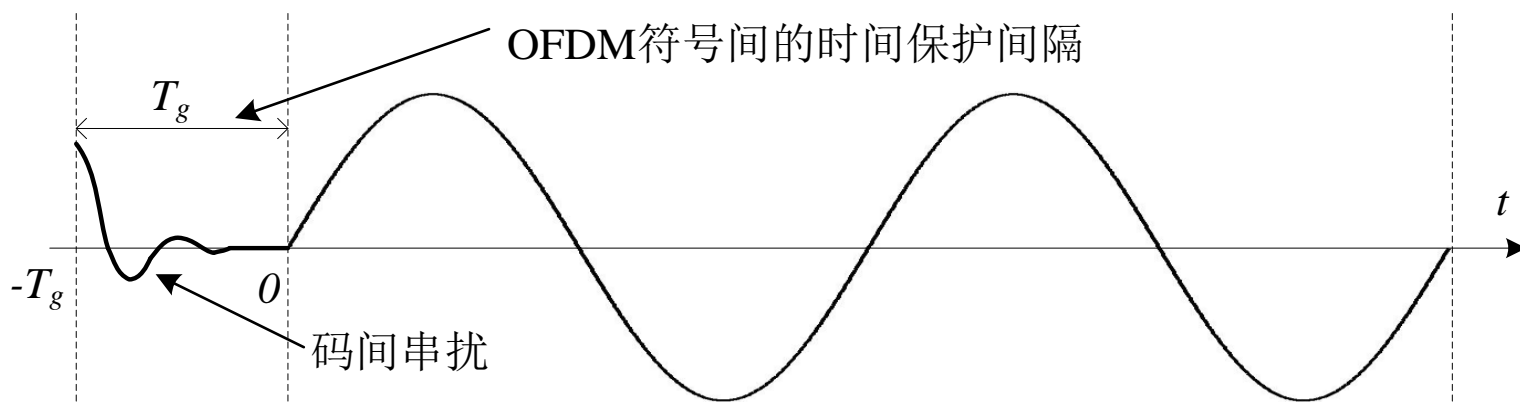


保护间隔

OFDM信号在传输过程中信道的非理想会使得OFDM符号在时间上受到扩展。

如果发生符号的时间扩展，而两个OFDM符号间没有间隔，则会造成码间串扰的影响。

为避免码间串扰，如下图，可在相邻符号间引入时间保护间隔



保护间隔的引入会降低系统的效率。在实际应用中，保护间隔的大小可根据(信道特性)情况进行调整。

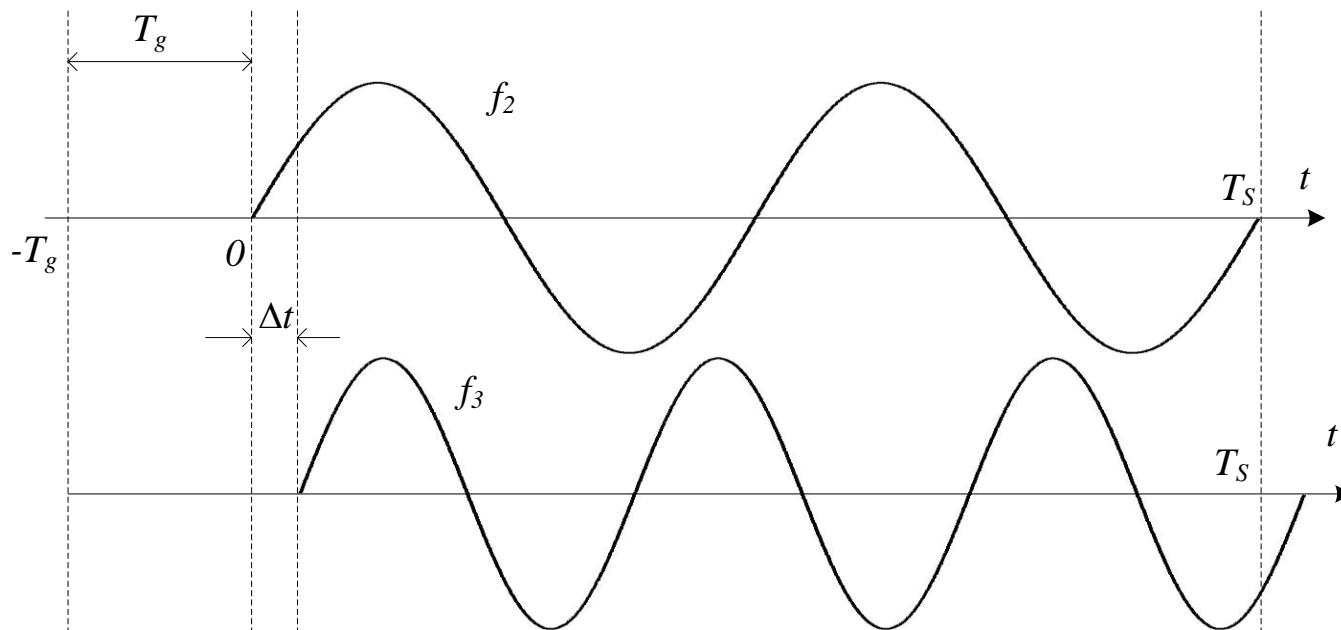
OFDM信号的时间保护间隔与循环前缀



循环前缀

若仅仅简单地设置保护间隔，当信道的时延与信号的频率有关联时，可能会出现一个符号周期内不满足整数倍子载波的情况

如图



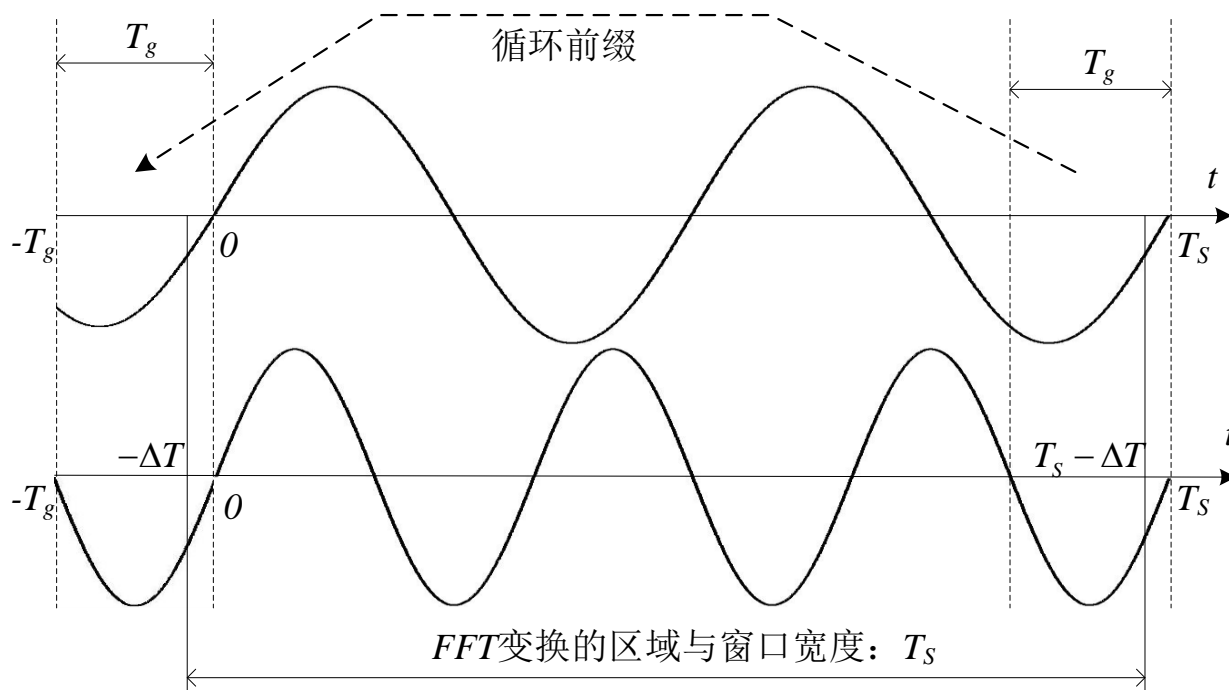
此时，符号间的正交性受到破坏，解调时会出现子载波间的串扰。

OFDM信号的时间保护间隔与循环前缀



循环前缀

如图，可在保护间隔(T_g)中加入循环前缀，即将符号结束前长为 T_g 一段的信号，复制到保护间隔内。



解调时，只要一个符号采用区间保护间隔与下一个符号之前的时间段内，就可以保证符号间的正交性不会受到破坏，避免子载波间的串扰。

OFDM信号的功率谱



OFDM信号可展开为

$$\begin{aligned} S_{OFDM}(t) &= \sum_{n=0}^{N-1} S_n e^{j\omega_n t} = \sum_{n=0}^{N-1} (S_{I,n} + jS_{Q,n}) (\cos \omega_n t + j \sin \omega_n t) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (S_{I,n} \cos \omega_n t - S_{Q,n} \sin \omega_n t) + j \sum_{n=0}^{N-1} (S_{Q,n} \cos \omega_n t + S_{I,n} \sin \omega_n t) \end{aligned}$$

调制射频载波得到信号

$$\begin{aligned} S_{OFDM,RF}(t) &= \sum_{n=0}^{N-1} (S_{I,n} \cos \omega_n t - S_{Q,n} \sin \omega_n t) \cos \omega_c t \\ &\quad - \sum_{n=0}^{N-1} (S_{Q,n} \cos \omega_n t + S_{I,n} \sin \omega_n t) \sin \omega_c t \end{aligned}$$

第 n 个子载波星座点符号序列的实部与虚部分别为 $\{S_{I,n}\}$ 和 $\{S_{Q,n}\}$

相应的自相关函数分别为 $R_{\{S_{I,n}\}}(k)$ 和 $R_{\{S_{Q,n}\}}(k)$

若

$$P_{\{S_{I,n}\}}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{\{S_{I,n}\}}(k) e^{-j2\pi f k T_s}$$

$$P_{\{S_{Q,n}\}}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{\{S_{Q,n}\}}(k) e^{-j2\pi f k T_s}$$

OFDM信号的功率谱

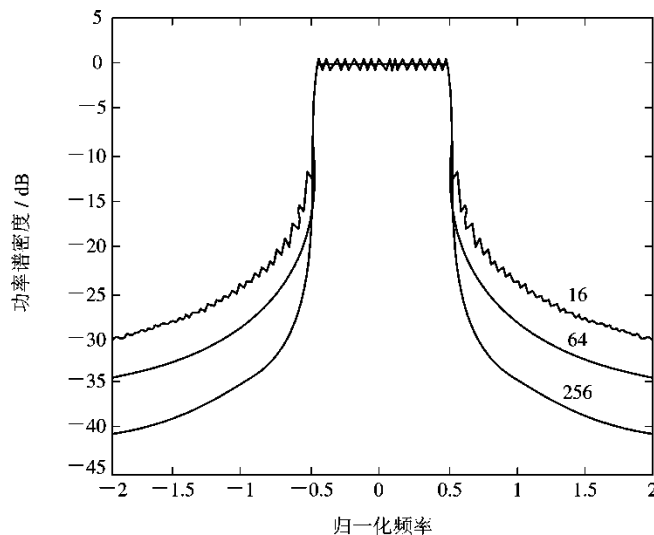


则对应包含 N 个子载波的OFDM信号的功率谱为

$$P_s(f) = \sum_{n=1}^{N-1} 2 \times \frac{1}{4T_S} \left(P_{\{S_{I,n}\}}(f) + P_{\{S_{Q,n}\}}(f) \right) \left(|G_T(f + f_n)|^2 + |G_T(f - f_n)|^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2T_S} \sum_{n=1}^{N-1} \left(P_{\{S_{I,n}\}}(f) + P_{\{S_{Q,n}\}}(f) \right) \left(\left| \frac{\sin(f + f_n)T_S}{(f + f_n)T_S} \right|^2 + \left| \frac{\sin(f - f_n)T_S}{(f - f_n)T_S} \right|^2 \right)$$

下图给出了OFDM信号的功率谱特性，对同样的带宽，划分出的信道数越多，则其功率谱越呈现出“矩形”的特性。



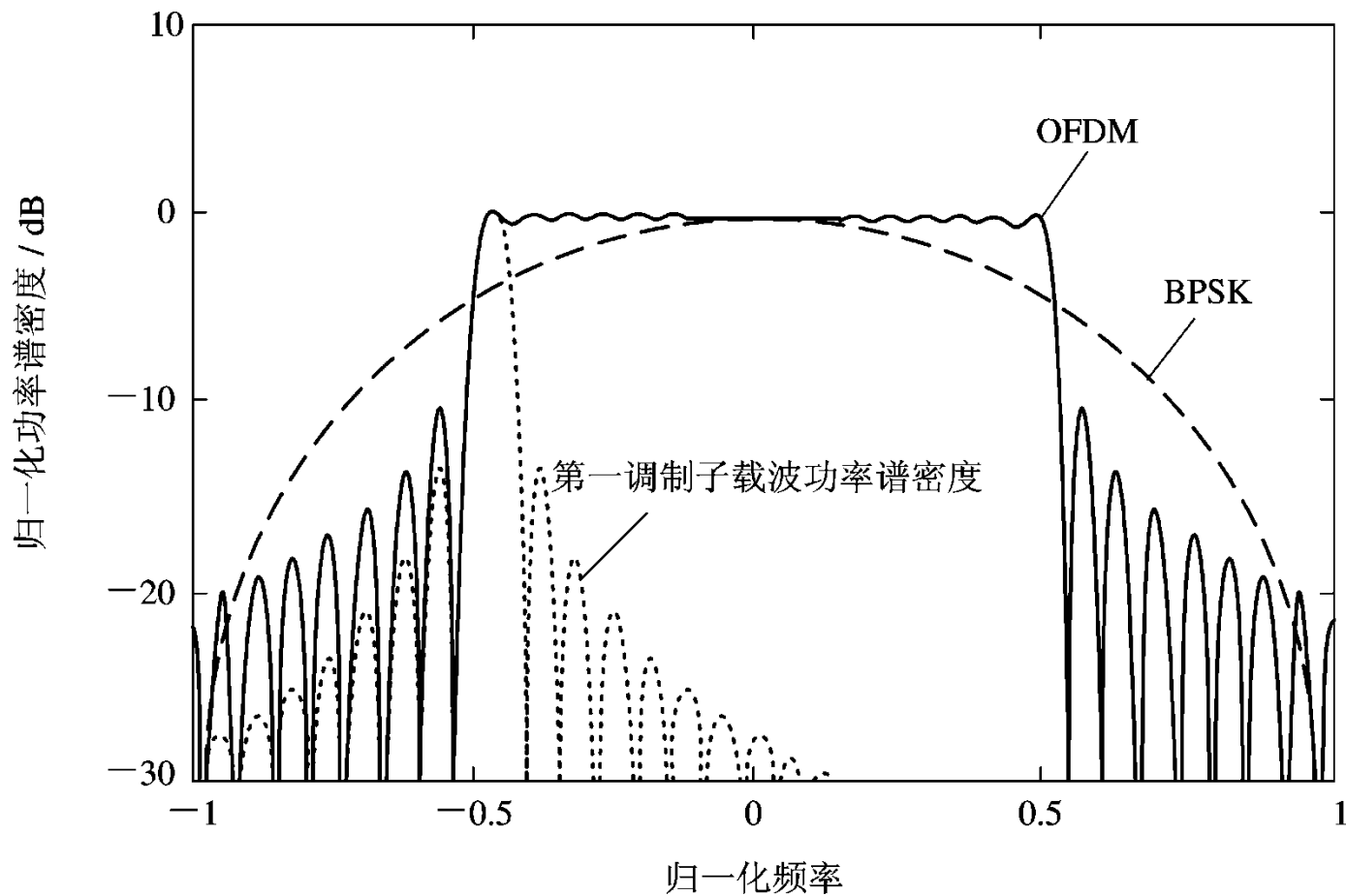


图 OFDM信号的功率谱密度

OFDM技术的特点



OFDM已经成为新一代宽带无线通信系统(LTE/4G)的基本技术。

OFDM技术有如下的优点：

(1) 可有效对抗频率选择性衰落和窄带干扰

并行传输将一个高速宽带系统转变为多个低速窄带系统；

宽带系统中的复杂的频率选择性衰落在窄带系统变为易于处理的平坦衰落；

窄带的干扰只会影响特定位置的子载波

(2) 可有效克服符号间串扰

高速宽带系统中符号周期很短，容易发生串扰；

同样的符号间串扰在子载波中当符号周期扩大几十，甚至上千倍时影响将微不足道。

OFDM技术的特点



(3) 频谱利用率高

各个相邻的子载波有50%交叠，在满足正交性的前提下使得带宽资源得到最大限度的利用。

(4) 具有快速算法实现调制解调运算

通过具有成熟技术的IFFT/FFT变换，实现了复杂的多路并行调制解调的问题。

(5) 便于在多用户系统中灵活的分配传输资源

反映传输资源多少的子载波数可根据用户的需求灵活划分，达到很小的颗粒度，使便于调整分配给不同的用户。



OQDM技术的缺点:

(1) 易受频率偏差的影响

频率偏差很容易导致破坏子载波间的正交性,产生子载波间的干扰。

(2) 有较大的峰值平均功率比(峰均比)

大的峰均比信号对功率放大器的线性度的要求较高,特别是在大功率的应用环境下需要较为复杂的处理技术。

小结



◆ 二进制调制

➤ 2ASK 2FSK 2PSK DPSK

◆ M进制调制

➤ MASK MPSK MFSK

➤ QPSK DQPSK OQPSK

➤ QAM

◆ 恒包络相位调制

➤ MSK GMSK

◆ OFDM

作业



◆ 6.1

◆ 6.3

◆ 6.13

◆ 6.14

◆ 6.18